

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Curso de Introducción

José C. Sabina de Lis
Universidad de La Laguna

26 de junio de 2013

Índice general

PRÓLOGO	v
1. Métodos elementales	1
1.1. Introducción	1
1.1.1. Ejemplos	1
1.1.2. Escritura unificada	4
1.1.3. Campo de direcciones	5
1.1.4. Poligonales de Euler	6
1.1.5. Ejercicios	6
1.1.6. Soluciones de los ejercicios ♣	11
1.2. El problema de Cauchy	14
1.2.1. Ejercicios	18
1.3. Métodos de integración elemental	19
1.3.1. Ecuaciones en variables separadas	19
1.3.2. Ecuaciones Homogéneas	22
1.3.3. Ejercicios	23
1.3.4. Solución a los ejercicios ♣	25
1.3.5. Ecuaciones Lineales	27
1.3.6. Ejercicios	28
1.3.7. Soluciones de los ejercicios ♣	29
1.3.8. Ecuaciones de Bernouilli y Riccati	32
1.3.9. Ejercicios	33
1.3.10. Ecuaciones Exactas	34
1.3.11. Factores integrantes	38
1.3.12. Ejercicios	38
1.4. Familias de curvas y ecuaciones diferenciales	41
1.4.1. Ejercicios	43
1.5. Ecuaciones implícitas	44
1.5.1. Parametrizaciones por la derivada	48
1.5.2. Soluciones en el lugar singular	49
1.5.3. Envolventes	51
1.5.4. Algunas ecuaciones implícitas	53
1.5.5. Ejercicios	57
1.5.6. Algunas soluciones	59

2. Existencia y Unicidad	61
2.1. Herramientas auxiliares. Teorema de Banach	61
2.1.1. Preliminares	61
2.1.2. Puntos fijos	63
2.1.3. Ejercicios	67
2.2. Teorema de Picard-Lindelöf	69
2.2.1. Problemas en bandas	69
2.2.2. Método de las aproximaciones sucesivas	71
2.2.3. Teorema de Picard-Lindelöf. Versiones local y global . . .	72
2.2.4. Ejercicios	74
2.2.5. Algunas soluciones	77
2.3. Teorema de Cauchy-Peano	79
2.3.1. Familias equicontinuas. Teorema de Ascoli-Arzelà	79
2.3.2. Ejercicios	81
2.3.3. Teorema de Cauchy-Peano	83
2.4. Comportamiento de las soluciones globales	86
2.4.1. Ejercicios	89
2.5. Teoremas de Brouwer y de Schauder	93
2.6. Anexo	93
3. Dependencia continua	97
3.1. Dependencia continua y aproximación de soluciones	97
3.1.1. Demostración del teorema de Peano	101
3.2. Anexo: un resultado general debido a Kamke	103
3.3. Diferenciabilidad con respecto a los datos iniciales	103
3.4. Ejercicios	106
3.5. Soluciones	110
3.6. Ejercicios suplementarios	113
4. Ecuaciones lineales	115
4.1. Teoría básica	115
4.2. La ecuación de orden n	119
4.2.1. Sistemas fundamentales	119
4.2.2. Ejercicios	121
4.2.3. Algunas soluciones	123
4.2.4. Fórmula de variación de las constantes	124
4.2.5. Ejercicios	125
4.2.6. Método de coeficientes indeterminados	125
4.2.7. Ejercicios	126
4.2.8. Algunas soluciones	127
4.3. Sistemas	129
4.3.1. Representación matricial de soluciones	129
4.3.2. Eliminación	132
4.3.3. Exponencial de un operador lineal	138
4.4. Forma canónica de Jordan	141
4.4.1. La forma canónica real	147

4.4.2.	Operaciones Elementales	149
4.4.3.	Cálculo de la forma de Jordan	150
4.4.4.	Casos complejos	153
4.4.5.	Estructura de las soluciones	154
4.4.6.	Ejercicios	155
4.5.	Sistemas fundamentales	159
4.5.1.	Casos no diagonalizables 2×2	161
4.5.2.	Casos no diagonalizables 3×3	161
4.5.3.	Casos no diagonalizables 4×4	162
4.5.4.	Ejercicios	164
4.6.	Ejercicios	165
4.6.1.	Ejercicios	168
4.7.	Anexo I: Método de Putzer	171
4.8.	Teoría de Floquet	171
4.9.	Ejercicios suplementarios	174
5.	Teoría cualitativa	175
5.1.	Ecuaciones autónomas	175
5.2.	Clasificación de órbitas	178
5.3.	Órbitas de las ecuaciones lineales	180
5.3.1.	Ejercicios	184
5.4.	Puntos críticos	186
5.4.1.	Péndulo con fricción	191
5.4.2.	Especies en competición	192
5.4.3.	Presa y depredador	192
5.4.4.	Ejercicios	193
5.5.	La ecuación orbital	195
5.5.1.	Interacciones presa y depredador	201
5.6.	Problema de dos cuerpos	202
5.6.1.	Ejercicios	204
5.7.	Curvas de Jordan	206
5.8.	Ecuación orbital	208
	BIBLIOGRAFÍA	213

Prólogo

Las presentes notas comprenden las lecciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que he impartido durante algunos cursos en la Universidad de La Laguna. La materia, cuatrimestral y obligatoria, se impartió a razón de 5 horas/semana; por tanto el contenido de las notas excede ligeramente los temas que se expusieron en realidad.

La Laguna, 26 de junio de 2013.

Capítulo 1

Introducción y Métodos elementales

1.1. Introducción

En términos informales, una ecuación diferencial tiene por incógnita una función $y(x)$ la cual ha de satisfacer junto con sus derivadas hasta el orden n , $y, \dots, y^{(n)}$, una relación de la forma

$$F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

El objetivo consiste en hallar $y(x)$ en base a dicha relación.

Si en dicha ecuación se puede despejar la derivada de mayor orden $y^{(n)}$, es decir expresarla así:

$$y^{(n)} = G(x, y, \dots, y^{(n-1)}),$$

se dice que está en “forma normalizada”. Para poder aplicar los resultados teóricos que se desarrollan en este curso es necesario expresar las ecuaciones en este formato.

En los ejemplos que siguen,

- se presentan diversas clases de ecuaciones diferenciales aprendiendo a escribirlas de una manera unificada,
- se comprueba que con gran generalidad, poseen una infinidad de soluciones,
- se observa que las soluciones se pueden escoger con unicidad cuando se imponen condiciones iniciales.

1.1.1. Ejemplos

Ejemplo 1.1. Teorema fundamental del cálculo. La más elemental de las ecuaciones es

$$y' = f(x),$$

donde $f(x)$ es una función continua dada, definida en un intervalo (a, b) . Esta ya se ha estudiado en el capítulo de cálculo de primitivas.

Recuérdese el siguiente resultado (ver por ejemplo [11]) “Si $f = f(t)$, $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces la función $F(t) = \int_{\alpha}^t f(s) ds$ es derivable en $[\alpha, \beta]$ (en α por la derecha y en β por la izquierda) y además $F'(t) = f(t), \forall t \in [\alpha, \beta]$ ”. Se deduce de aquí el siguiente resultado.

Propiedad 1.1. *Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces el problema*

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

admite, cualesquiera que sean $x_0 \in (a, b)$ y $y_0 \in \mathbb{R}$, una única solución definida en (a, b) . A saber,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s) ds.$$

La conclusión más importante es que genéricamente, las ecuaciones diferenciales admiten infinitas soluciones. Lo corroboraremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.2. El oscilador armónico con un grado de libertad. Un objeto de masa m se mueve sin rozamiento sobre la recta bajo el campo de fuerzas $F(x) = -kx$, $k > 0$ (Ley de Hooke), donde x es la posición.

Propiedad 1.2. *Para $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ dados, el problema*

$$\begin{cases} mx'' = -kx \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = v_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

admite una única solución. La solución tiene la forma explícita

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0)$$

Ejemplo 1.3. Se puede afirmar que la teoría de ecuaciones diferenciales nació en torno al siguiente problema: “determinar la trayectoria $x(t)$ de una partícula de masa m sometida a un campo de fuerzas $F = F(x)$, $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuando se conocen su posición y velocidad inicial: $x(t_0), x'(t_0) \in \mathbb{R}^3$ ”. En otras palabras, hallar la solución del problema,

$$\begin{cases} mx'' = F(x) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = v_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

donde los datos son los valores $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^3$ y el campo de fuerzas $F(x)$ se supone conocido.

Ejemplo 1.4. Problema de los dos cuerpos. Dos cuerpos aislados de masas m_1 , m_2 sometidos a la interacción gravitatoria mutua, se desplazan en un plano ¹. Si $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t)$ son sus trayectorias, las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{x}}_1 &= Gm_2 \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|^3}, \\ \ddot{\bar{x}}_2 &= Gm_1 \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|^3}.\end{aligned}$$

El centro de masas

$$\bar{r} = \bar{x}_1 + \theta(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = (1 - \theta)\bar{x}_1 + \theta\bar{x}_2, \quad 1 - \theta = \frac{m_1}{M}, \quad \theta = \frac{m_2}{M},$$

$M = m_1 + m_2$ cumple

$$\ddot{\bar{r}} = 0.$$

Se tiene que

$$\bar{x}_1 - \bar{r} = -\theta\bar{x}, \quad \bar{x}_2 - \bar{r} = (1 - \theta)\bar{x}$$

donde $\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$. Por tanto el movimiento relativo de los dos objetos celestes m_1 , m_2 con respecto al centro de masas $\bar{r}$ se reduce a conocer $\bar{x}(t)$. Se comprueba inmediatamente que

$$\ddot{\bar{x}} = -GM \frac{\bar{x}}{\rho^3}, \quad (1.4)$$

donde $\rho = |\bar{x}|$. Dicha ecuación debe integrarse (“resolverse”) junto con los datos de la posición y velocidad iniciales $\bar{x}_0$, $\bar{v}_0$ para determinar el movimiento. Recuérdese que al ser éste plano $\bar{x} = (x(t), y(t))$.

Fue Newton quien planteó y resolvió a plena satisfacción el problema. Trataremos de ello un poco más adelante. Obsérvese que (1.4) constituye en realidad un sistema de dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \ddot{x} = -GM \frac{x}{\rho^3} \\ \ddot{y} = -GM \frac{y}{\rho^3}, \end{cases}$$

donde $\bar{x} = (x, y)$.

Ejemplo 1.5. Ley de crecimiento de Malthus. Si $x(t)$ representa el número de individuos de una población biológica, entonces el cociente $\frac{x'(t)}{x(t)}$ se llama tasa de crecimiento de la población. La población sigue la ley de Malthus si dicha tasa es constantemente k , $k > 0$.

Propiedad 1.3. *El problema*

$$\begin{cases} x'(t) = kx(t) + g(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

¹Basta para ello que las velocidades iniciales y el vector diferencia de posiciones iniciales sean coplanarios.

admite una única solución:

$$x = x_0 e^{k(t-t_0)} + \int_0^t e^{k(t-\tau)} g(\tau) d\tau.$$

El término g tiene dimensiones de número de individuos por unidad de tiempo y representa las perturbaciones sobre la población causadas por procesos de captura (pesca, caza, cosecha).

En algunos casos es razonable suponer que la tasa de crecimiento de la población es sensible a cambios estacionales. Por ejemplo $k = k(t)$ una función T -periódica. La forma de la correspondiente solución se estudia más adelante.

Los procesos migratorios constituyen otra de las maneras en que pueden aumentar o disminuir los efectivos de una población. No nos ocupamos en este curso de las ecuaciones que regulan estos procesos más complejos.

Ejemplo 1.6. Crecimiento logístico. Si la tasa de la población es $\frac{x'(t)}{x(t)} = k - \alpha x(t)$ se dice que la población sigue la ley de crecimiento logístico o de Verhulst.

Propiedad 1.4. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, el problema,

$$\begin{cases} x'(t) = x(k - \alpha x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

admite una única solución. Además, dos de las soluciones de la ecuación (las que corresponden, respectivamente, a los datos iniciales $x_0 = 0$ y $x_0 = k/\alpha$) son constantes.

1.1.2. Escritura unificada

Un sistema general de ecuaciones diferenciales de primer orden adopta la forma:

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases}$$

Escrito abreviadamente,

$$x' = f(t, x),$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), f = (f_1, \dots, f_n).$$

Todas las ecuaciones de los ejemplos anteriores, incluso la ecuación diferencial de orden n en forma normalizada

$$x^{(n)}(t) = G(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)),$$

se pueden expresar como un sistema de primer orden.

Para convencerse de ello basta observar, por ejemplo, que la ecuación

$$x''(t) + x(t) = 0,$$

con $x \in \mathbb{R}$ equivale al sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -x_1, \end{cases}$$

para lo que se ha hecho la substitución $(x_1, x_2) = (x, x')$. El caso general se trata igual.

Por lo tanto, toda la teoría de ecuaciones diferenciales se desarrolla para sistemas de primer orden.

1.1.3. Campo de direcciones

Supongamos que $f(x, y)$ es una función continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Si $y(x)$ es una solución de la ecuación

$$y' = f(x, y), \quad (1.7)$$

en cada uno de los puntos $(x, y(x))$ de la curva $y = y(x)$ la recta tangente tiene pendiente $m = f(x, y(x))$.

Una ecuación diferencial en Ω define por tanto un “campo de direcciones” en Ω ; cada punto (x, y) tiene asociado una recta de pendiente $m = f(x, y)$, las soluciones de la ecuación son curvas que se “ajustan” al campo pues pasan por los puntos de Ω ciñéndose a las rectas tangentes que les prescribe la ecuación. Esto se expresa de manera más formal como sigue.

Un elemento de línea (un “elemento”) es el triplete (x, y, m) donde $(x, y) \in \Omega$, m la pendiente de una recta por (x, y) . Por tanto, un elemento es un punto y una dirección. Una curva derivable $y(x)$, $x \in I$, I un intervalo, define una familia uniparamétrica de elementos $(x, y(x), y'(x))$. Una función $f(x, y)$ definida en Ω puede observarse como fijando una dirección en cada punto $(x, y) \in \Omega$. La familia $(x, y, f(x, y))$ se llama un *campo de direcciones* en Ω y la ecuación diferencial (1.7) induce un tal campo en Ω . Una curva $y(x)$ es solución si todos sus elementos $(x, y(x), y'(x))$ pertenecen al campo de direcciones $(x, y, f(x, y))$.

Una manera de visualizar las soluciones de (1.7) consiste en trazar en Ω las isoclinas de su campo de direcciones. Para m fijado, el conjunto

$$\mathcal{C}_m = \{(x, y) \in \Omega / f(x, y) = m\}$$

se denomina curva isoclina, siempre que $\mathcal{C}_m$ sea una curva (ver más adelante el Teorema de la Función Implícita). En efecto, todas las soluciones que cortan a $\mathcal{C}_m$ lo hacen con pendiente m .

La ecuación da así información sobre sus soluciones. Por ejemplo en $\Omega^+ = \{f(x, y) \geq 0\}$, $\Omega^- = \{f(x, y) \leq 0\}$ las soluciones son respectivamente, crecientes o decrecientes.

Si la solución $y(x)$ es dos veces derivable (Capítulo III), entonces

$$y'' = f_x + f_y f.$$

Las soluciones son por tanto convexas en la región $\{f_x + f_y f \geq 0\}$ y cóncavas en $\{f_x + f_y f \leq 0\}$.

1.1.4. Poligonales de Euler

El método de las poligonales de Euler proporciona las aproximaciones más “ingenuas” de la posible solución al problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0. \end{cases}$$

Se sustenta en las ideas geométricas del epígrafe anterior. Se trata de aproximar la gráfica de una solución $(t, x(t))$ en un cierto intervalo $[a, b]$ mediante una poligonal de vértices $P_0, P_1, \dots, P_N$.

Para ello se construye un algoritmo que permite calcular el punto P_i de la poligonal a partir del P_{i-1} . Así, conocida la regla de paso $P_{i-1} \rightarrow P_i$ sólo necesitamos conocer P_0 para obtener $P_1, \dots, P_N$ tras la aplicación del procedimiento N veces.

Primeramente se divide $[a, b]$ en N partes $\{t_0 = a, t_1 = t_0 + h, \dots, t_N = t_0 + Nh = b\}$ donde $h = \frac{b-a}{N}$ se denomina el paso del algoritmo. Por otra parte se toma $P_0 = (t_0, x_0)$, es decir, los datos iniciales del problema de Cauchy cuya solución vamos a aproximar. Finalmente, conocido $P_{i-1} = (t_{i-1}, x_{i-1})$, el punto $P_i = (t_i, x_i)$ se deduce mediante las ecuaciones

$$t_i = t_{i-1} + h, \quad x_i = x_{i-1} + f(P_{i-1})h.$$

Nótese que los tramos que enlazan x_{i-1} con x_i en la poligonal, se recorren con velocidad $f(P_{i-1})$.

A modo de ilustración se ha realizado la simulación (usando ‘MATLAB’) en el ejemplo:

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

del que se conoce la solución exacta, $y = e^{x^2/2}$. En la Figuras 5.1, 5.2 se han construido las poligonales para $h = 0,1, h = 0,01$.

1.1.5. Ejercicios

1. Probar que la ecuación del Ejemplo 1.1 se reduce a

$$\ddot{x} + x = 0.$$

2. ♣ Siguiendo la pauta del Ejemplo 1.1 demuéstrese que para valores x_0 y v_0 cualesquiera el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'' - x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0, \end{cases}$$

admite una única solución.

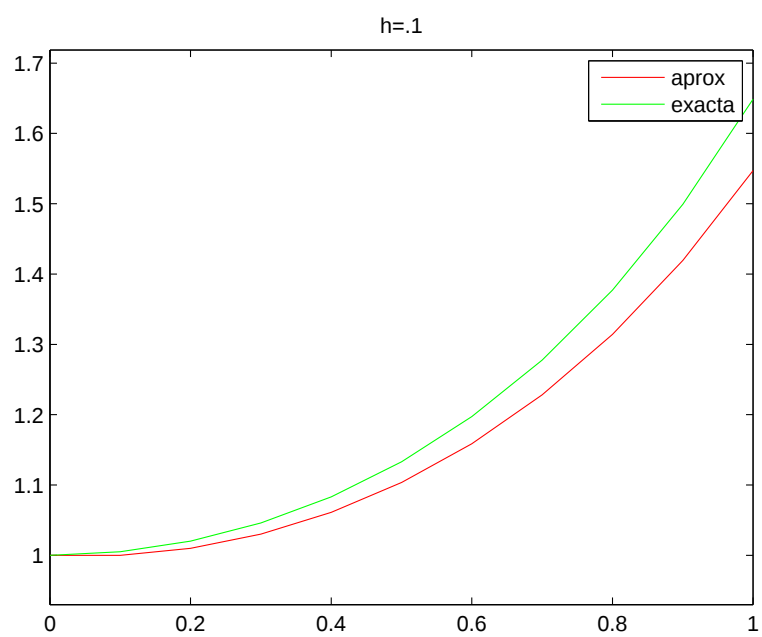


Figura 1.1: Poligonal para $h = 0,1$.

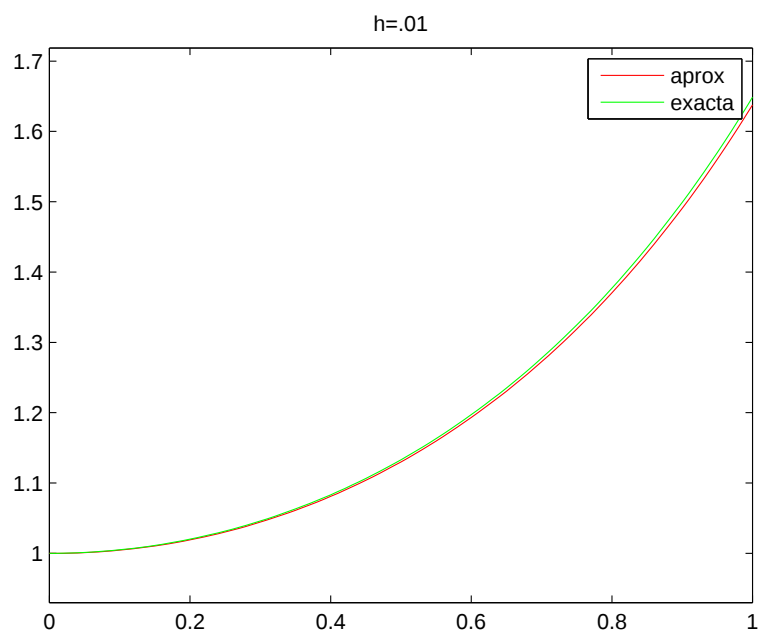


Figura 1.2: Poligonal para $h = 0,01$.

3. Determinar los movimientos $x(t) = (x_i(t))$ en el espacio $\mathbb{R}^3$ con aceleración nula.
4. Determinéense los valores de λ para que las siguientes ecuaciones diferenciales tengan solución de la forma $y = e^{\lambda x}$.
- a) $y' + 2y = 0$.
- b) $y'' + y' - 6y = 0$.
- c) $y'' - y = 0$.
- d) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$.

Soluciones. a) $\lambda = -2$, b) $\lambda = 2, -3$, c) $\lambda = \pm 1$, d) $\lambda = 1, 2$.

5. Determinéense los valores de p para que las siguientes ecuaciones diferenciales tengan solución de la forma $y = x^p$.
- a) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$.
- b) $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$.

Soluciones. a) $p = -1, -2$, b) $p = 1, 4$.

6. Escribir como una ecuación de primer orden las siguientes ecuaciones:

- a) $y'' + 2y' - y = e^t$
- b) $y''' - 4(y')^2 + \sin x = 3 - y$
- c) $x'' + f(x) = 0$.

7. Sea $g \in C(\mathbb{R})$. Probar que

$$x(t) = \int_0^t e^{k(t-\tau)} g(\tau) d\tau$$

resuelve la ecuación diferencial

$$x' = kx + g.$$

8. ♣ Demuéstrese que para cada $g \in C(\mathbb{R})$ periódica de periodo T , i.e. $\forall t \in \mathbb{R} : g(t+T) = g(t)$, la ecuación diferencial

$$x' = kx + g.$$

admite una solución periódica.

9. Trácese el campo de direcciones de la ecuación:

$$x' = t^2 + x,$$

esbozando la gráfica aproximada de las soluciones.

10. Dada la ecuación:

$$x' = 1 + t - x,$$

hállese el campo de direcciones. Demuéstrese que $x(t) = t$ es una solución y dése la forma aproximada de las soluciones.

11. Aplicando el método de isoclinas, trazar aproximadamente las curvas integrales de las ecuaciones diferenciales siguientes.

a) $y' = -\frac{y}{x}$.

b) $y' = y$.

c) $y' = x + y$.

d) $y' = y - y^2$.

12. Sea $y(x)$ una solución C^∞ (ver Capítulo III) de una ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

de la que se sabe que f es de clase C^∞ . Calcúlense las derivadas y'' , y''' y $y^{(iv)}$ de la solución. Convénzase el lector que pueden calcularse todas las derivadas de y que se quieran.

13. Resolver aproximadamente, usando el método de Euler, los siguientes problemas, en los intervalos especificados y con el paso dado.

a) $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$, $x \in [1, 4]$, $h = 0'5$.

b) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$, $h = 0'1$.

c) $y' = 1 + xy^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$, $h = 0'1$.

14. Tomando paso $h = 1/n$ y usando el método de Euler para aproximar la solución de:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

pruébese que

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

con y_n el valor aproximado de $y(1)$.

15. Escribir en cada caso la ecuación diferencial que satisfacen las curvas

- a) que contenidas en el primer cuadrante, cada uno de sus puntos divide en partes iguales al segmento de tangente que queda en dicho cuadrante,
 b) aquellas cuya la normal en cada punto y la recta que lo une con el origen forman un triángulo isósceles con el eje OX ,

- c) aquellas cuyas normales pasan por un punto fijo,
- d) aquellas tales que la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa en dicho punto.
16. ♣ Está nevando con regularidad. A las 12 sale una máquina quitanieves que retira una cantidad constante de nieve por unidad de tiempo. En la primera hora recorre 2 kms y en la siguiente sólo uno. ¿A qué hora empezó a nevar?

1.1.6. Soluciones de los ejercicios ♣

- **Solución 2.** Razonando como en el Ejemplo 1.1 se encuentra que e^t , e^{-t} y

$$x(t) = Ae^t + Be^{-t}$$

son soluciones de la ecuación y que

$$x(t) = x_0 \cosh t + v_0 \sinh t$$

es solución del problema.

En cuanto a la unicidad si $y(t)$ es otra solución entonces $z(t) = x(t) - y(t)$ cumple:

$$z'' - z = 0.$$

Multiplicando por z' encontramos que

$$z'^2 - z^2 = C,$$

con C constante y al ser $z = z' = 0$ en $t = 0$ resulta

$$z'(t)^2 - z(t)^2 = 0$$

es decir

$$z'(t) = \pm z(t)$$

para todo t .

Afirmamos que $z(t) = 0$. Si no, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $t_1 > 0$ donde

$$z(t_1) > 0,$$

por tanto existe $0 \leq t_0 < t_1$ tal que $z > 0$ en $(t_0, t_1]$ y $z(t_0) = 0$. Al ser, de la ecuación

$$z'' = z,$$

z es convexa en $[t_0, t_1]$ luego necesariamente:

$$z'(t_1) > 0,$$

y por la misma razón $z' > 0$ en $(t_0, t_1]$. Por tanto:

$$z' = z$$

en $[t_0, t_1]$. Según la Propiedad 1.3 esto implica

$$z = z(t_1)e^{(t-t_1)}$$

que es imposible porque tal z no se anula nunca ($z(t_1) > 0$).

- **Solución 8.** En primer lugar observamos que la solución periódica es única. Dos soluciones periódicas $x_1(t)$, $x_2(t)$ difieren en $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$ que cumple:

$$z' = kz,$$

con lo cual z es T -periódica y

$$z(t) = Ce^{kt}.$$

La única manera en la que el segundo miembro es T -periódico es con $C = 0$. Luego $x_1(t) = x_2(t)$.

Buscamos ahora x_0 de suerte que la solución genérica de $x' = kx + g(t)$:

$$x(t) = x_0e^{kt} + \int_0^t e^{k(t-\tau)}g(\tau) d\tau$$

sea T -periódica. A tal fin obsérvese que

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x_0e^{k(t+T)} + \int_0^{t+T} e^{k(t+T-\tau)}g(\tau) d\tau = \\ &= x_0e^{k(t+T)} + \int_0^T e^{k(t+T-\tau)}g(\tau) d\tau + \int_0^t e^{k(t-s)}g(s+T) ds = \\ &= x_0e^{k(t+T)} + \int_0^T e^{k(t+T-\tau)}g(\tau) d\tau + \int_0^t e^{k(t-\tau)}g(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Igualando

$$x(t) = x(t+T)$$

resulta

$$x_0e^{kt} = x_0e^{k(t+T)} + \int_0^T e^{k(t+T-\tau)}g(\tau) d\tau,$$

de donde, simplificando e^{kt} resulta:

$$(1 - e^{kT})x_0 = \int_0^T e^{k(T-\tau)}g(\tau) d\tau,$$

es decir:

$$x_0 = \frac{1}{(1 - e^{kT})} \int_0^T e^{k(T-\tau)}g(\tau) d\tau.$$

Este es el valor de x_0 que da la única solución periódica.

- **Solución 16.** Empieza a nevar a las t_0 horas y la altura de la nieve es:

$$h(t) = c(t - t_0),$$

donde c es constante (está nevando con regularidad ...).

Llamamos v al volumen de nieve desalojado por unidad de tiempo (litros/hora) por la “quitanieves” (v constante), A el ancho de la carretera (que suponemos rectilínea).

Por tanto un avance dx de la quitanieves en dt unidades de tiempo supone al mismo tiempo desalojar una cantidad de $Ah(t)dx$ litros de nieve.

El balance es:

$$vdt = Ah(t)dx.$$

De aquí:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v}{Ac(t - t_0)}.$$

La trayectoria de la máquina es:

$$x(t) = x_0 + \frac{v}{Ac} \log \left(\frac{t - t_0}{12 - t_0} \right).$$

Los datos del problema son:

$$x(13) = x_0 + 2 \quad x(14) = x_0 + 3.$$

Haciendo $\tau = 12 - t_0$ resulta:

$$\left(\frac{\tau + 1}{\tau} \right)^3 = \left(\frac{\tau + 2}{\tau} \right)^2 \Rightarrow \tau = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Así, empezó a nevar a las

$$12 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

horas.

1.2. El problema de Cauchy

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto,
 $(t, x) \longmapsto f(t, x)$
 diremos que el par (x, I) , donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned} x : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto x(t) \end{aligned}$$

una función diferenciable, es una solución de la ecuación diferencial

$$x' = f(t, x), \quad (1.9)$$

si

- (a) Para cada $t \in I$: $(t, x(t)) \in \Omega$,
- (b) $x'(t) = f(t, x(t))$ para todo $t \in I$.

Observación 1.7. En el contexto de las ecuaciones y sus aplicaciones se conoce a $f(t, x)$ como el “campo” asociado a (1.9).

Cuando $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ no depende de t , se dice que f es un
 $x \longmapsto f(x)$
 campo vectorial (“estacionario”) en Ω . Una solución $x(t)$ de la ecuación

$$x' = f(x)$$

parametriza una curva $\gamma \subset \Omega$ cuyas tangentes “se adaptan” al campo f .

Observación 1.8. La ecuación (1.9) constituye en realidad lo que podríamos denominar un sistema de ecuaciones diferenciales. Si $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $f(t, x) = (f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n))$ entonces (1.9) se lee

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Como ya se ha señalado, esta clase de ecuaciones también comprende a las ecuaciones escalares de orden n

$$x^{(n)} = G(t, x, \dots, x^{(n-1)}).$$

Definición 1.5. Para $f(t, x)$ como antes el problema de Cauchy con datos iniciales $(t_0, x_0) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.10)$$

consiste en hallar una solución (x, I) de $x' = f(t, x)$ tal que $t_0 \in I$ y $x(t_0) = x_0$.

Observaciones. La definición de solución que hemos dado resalta que debe tenerse en cuenta el dominio de definición I de los candidatos a solución. Cuando la solución se construye de manera teórica, ésta sólo está definida en un pequeño intervalo que va prolongándose paulatinamente. Puede considerarse en la definición cualquier tipo de intervalo I a condición de que tenga interior no vacío y las derivadas en los extremos que pertenezcan al intervalo se consideren laterales. Sin embargo, salvo que se advierta lo contrario, siempre supondremos que los intervalos I son *abiertos*.

El concepto de solución introducido, amén de aparatoso, lleva a especulaciones triviales del tipo siguiente. Si (y, J) es una solución de (1.9), entonces dicha solución genera infinitas más. En efecto, para cualquier subintervalo $I \subset J$, se define $x = y|_I$ (es decir, la restricción de y a I) y entonces (x, I) también es otra solución de (1.9).

Definición 1.6. *Dadas dos soluciones $(x, I), (y, J)$ de:*

$$x' = f(t, x),$$

se dice que (y, J) es una prolongación de (x, I) o simplemente que $y(t)$ extiende a $x(t)$ si $I \subset J$ mientras $y(t) = x(t)$ para todo $t \in I$.

Observaciones. El problema interesante consiste en hallar aquellas soluciones (x^*, I^*) de (1.10) que extiendan a todas las otras posibles soluciones (x, I) del problema (1.10). En el Capítulo 2 se analizará la cuestión en profundidad.

A estos y otros efectos resulta útil la siguiente propiedad.

Propiedad 1.7. *Sean $y : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, z : [b, c) \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluciones de la ecuación:*

$$x' = f(t, x),$$

tales que $y(b) = z(b)$. Entonces $x(t) = y(t)$ si $t \in (a, b]$, $x(t) = z(t)$ si $t \in (b, c)$ es una solución de dicha ecuación.

Conviene también clarificar qué se entiende por el hecho (casi obvio) de que (1.10) admita una única solución.

Definición 1.8. *Se dice que el problema de Cauchy (1.10) tiene la propiedad de unicidad de soluciones si cualesquiera que sean las soluciones $(x, I), (y, J)$ de (1.10) se cumple que*

$$x(t) = y(t) \quad \text{para cada } t \in I \cap J. \quad (1.11)$$

Se dice que (1.10) cumple la propiedad de unicidad local de soluciones si existe $\varepsilon > 0$ tal que la identidad (1.11) se cumple solamente en $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I \cap J$.

Se dice asimismo que (1.10) satisface la propiedad de unicidad de soluciones a la derecha de t_0 si (1.11) se cumple en $[t_0, \infty) \cap I \cap J$. El problema (1.10) satisface la propiedad de unicidad local a la derecha de t_0 si (1.11) se cumple en $[t_0, t_0 + \varepsilon) \cap I \cap J$ para cierto $\varepsilon > 0$. Las correspondientes nociones de unicidad y unicidad local a la izquierda de t_0 se definen simétricamente.

La unicidad de soluciones está relacionada directamente con la construcción de soluciones globales.

Propiedad 1.9. *Si el problema (1.10) posee la propiedad de unicidad de soluciones entonces admite una única solución maximal (x^*, I^*) .*

Demostración. Se considera la clase

$$\mathcal{S} = \{(y, J) : (y, J) \text{ solución de (2)}\} = \{(y_\alpha, J_\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Formamos el intervalo $I^* = \cup_\alpha J_\alpha$. Se define $x^* : I^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ como $x^*(t) = y_\alpha(t)$ si $t \in J_\alpha$. Se comprueba que x^* está bien definida y que es solución. Para esta última afirmación nótese que si $t_1 \in I^*$ entonces $t_1 \in J$ donde (y, J) es una solución. Luego $x^* = y$ en J , x^* es diferenciable en un entorno de t_1 y cumple la ecuación (¡el entorno es J !). Resulta obvio que (x^*, I^*) es maximal. $\square$

La siguiente propiedad dice que si el problema (1.10) posee al menos una solución para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ y tiene la propiedad de unicidad local de soluciones entonces cumple la propiedad de unicidad de soluciones (tal como se ha definido antes).

Propiedad 1.10. *Si el problema (1.10) cumple a la vez, para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$, la propiedad de admitir al menos una solución (x, I) y la propiedad de unicidad de local de soluciones entonces dicho problema posee la propiedad de unicidad de soluciones para cada (t_0, x_0) .*

Demostración. Sean (y, J) , (z, S) dos soluciones de (1.10). Definimos

$$E = \{t \in J \cap S : y(t) = z(t)\}.$$

El conjunto $E \neq \emptyset$ pues $t_0 \in E$. Supongamos ahora que $t_n \in E$ y que $t_n \rightarrow \bar{t}$ con $\bar{t} \in J \cap S$. Como $y(t_n) = z(t_n)$ resulta $y(\bar{t}) = z(\bar{t})$ y $\bar{t} \in E$. Por tanto E es cerrado en $J \cap S$.

Probamos a continuación que E es abierto en $J \cap S$. Si $t_1 \in E$ y llamamos $x_1 = y(t_1) = z(t_1)$ entonces (y, J) , (z, S) son también soluciones del problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_1) = x_1. \end{cases}$$

Por la propiedad de unicidad local se cumple que $y(t) = z(t)$ para $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$. Luego $(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \subset E$ y E es abierto en $J \cap S$.

Por conexidad $E = J \cap S$.

$\square$

Ejemplo 1.9. Hemos considerado ejemplos donde se cumple la propiedad de unicidad de soluciones. El que sigue es un ejemplo clásico de no unicidad. El problema de Cauchy,

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

admite al menos dos soluciones. Una de ellas es (x_1, I_1) , con $x_1(t) \equiv 0, I_1 = \mathbb{R}$, otra es (x_2, I_2) donde $x_2(t) = \text{signo}(t) \frac{t^2}{4}$, siendo $\text{signo}(t) = -1$ (respectivamente, $0, 1$) si $t < 0$ (respectivamente, $t = 0, t > 0$). Recalquemos que lo notable es que el problema de Cauchy tenga más de una solución; por la breve experiencia que se tiene, las ecuaciones diferenciales admiten siempre infinitas soluciones.

En las aplicaciones es muy frecuente el siguiente tipo de ecuación diferencial,

$$x^{(k)} = G(t, x, x', \dots, x^{(k-1)}) \quad (1.12)$$

donde,

$$\begin{aligned} G : \quad \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}) &\longmapsto G(t, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}), \end{aligned}$$

Ω es un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ y G es continua. Una solución de (1.12) es asimismo un par (x, I) , I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $x = x(t)$ una función que admite derivadas hasta el orden k en I , tal que,

- a) $(t, x(t), \dots, x^{(k-1)}(t)) \in \Omega, \forall t \in I$,
- b) $x^{(k)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k-1)}(t)), \forall t \in I$.

Se dice que (1.12) es una ecuación diferencial de orden k . El problema de Cauchy para (1.12) con datos iniciales $(t_0, \xi_1, \dots, \xi_k)$ consiste en hallar una solución (x, I) que cumpla además

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \xi_1 \\ x'(t_0) &= \xi_2 \\ &\vdots \\ x^{(k-1)}(t_0) &= \xi_k. \end{aligned}$$

Las ecuaciones (1.12) se puede expresar de forma equivalente como una ecuación del tipo (1.9).

Propiedad 1.11. *Toda ecuación de la forma (1.12) es equivalente a una cierta ecuación de la forma (1.9).*

Demostración. Supongamos que $x(t)$ es una solución de (1)' definida en el intervalo I . Entonces la función

$$\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(k-1)}(t))$$

es solución de:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \dots \\ x'_k = G(t, x_1(t), \dots, x_k(t)), \end{array} \right. \quad (1.13)$$

ecuación de la forma (1.9), concretamente $\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})$ donde $\bar{f} = (f_1, \dots, f_k)$ es $f_1 = x_2, \dots, f_k = G(t, x_1, \dots, x_k)$. Por otra parte, si $(\bar{x}, I)$ es una solución de ésta última, $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t))$, entonces $x_1(t)$ (ó (x_1, I)) es solución de (1.12). $\square$

1.2.1. Ejercicios

1. Sea $x(t)$ una solución de la ecuación autónoma:

$$x' = f(x).$$

Pruébese que $y(t) = x(t - c)$ también es solución, cualquiera que sea la constante $c \in \mathbb{R}$.

2. Se considera la ecuación diferencial

$$x' = \sqrt{|x|}.$$

- a) ¿Es $x(t) = t^2/4$ es una solución? ¿Lo es en algún intervalo I de $\mathbb{R}$? Determinar el mayor de tales intervalos I .
- b) Demostrar que existen infinitas soluciones que satisfacen $x(0) = 0$.
- c) ¿Para qué valores de α existen infinitas soluciones en $[0, \alpha]$ cumpliendo $x(0) = -1$?
3. Para k y α constantes positivas estúdiense las soluciones de la ecuación:

$$x' = kx(\alpha - x),$$

sin resolverla.

1.3. Métodos de integración elemental

El siguiente resultado se conoce de cursos anteriores aunque quizás bajo un aspecto diferente del que vamos a considerar. El problema principal consiste en probar la existencia de soluciones y de una ecuación $G(\alpha, y) = 0$ donde α es un parámetro. En algunos casos, para un valor particular α_0 es fácil resolver la ecuación, y en efecto podemos hallar una solución en particular y_0 . Bajos ciertas condiciones –que se precisan a continuación– se puede probar la existencia de otras soluciones y próximas a y_0 , para valores de α próximos a α_0 . Se puede garantizar además que en esas condiciones de proximidad dichas soluciones son únicas. Por eso, el que sigue constituye el prototipo de *teorema de existencia y unicidad*.

Teorema 1.12 (Teorema de la Función Implícita). *Sea*

$$\begin{aligned} F : \quad U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y), \end{aligned}$$

U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, una función de clase C^1 . Supongamos que existe $(x_0, y_0) \in U$ tal que

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

Supongamos además que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ es nonsingular, o lo que es lo mismo, que existe la inversa $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)^{-1}$. Entonces, existen $\varepsilon, \delta > 0$ y una función C^1 ,

$$\begin{aligned} g : \quad B_\varepsilon(x_0) &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

con $g(x_0) = y_0$ y $g(B_\varepsilon(x_0)) \subset B_\delta(y_0)$ tal que:

a) (Existencia de soluciones) $\forall x \in B_\varepsilon(x_0)$ el par $(x, y) = (x, g(x))$ es solución de la ecuación:

$$F(x, y) = 0. \quad (E)$$

b) (Unicidad de soluciones) Las únicas soluciones (x, y) de (E) en el conjunto $B_\varepsilon(x_0) \times B_\delta(y_0)$ son las que se indican en a). Es decir, si $(x, y) \in B_\varepsilon(x_0) \times B_\delta(y_0)$ es solución de (E), entonces $\exists x \in B_\varepsilon(x_0)$ tal que $y = g(x)$.

1.3.1. Ecuaciones en variables separadas

Teorema 1.13 (Teorema de existencia y unicidad, ecuaciones en variables separadas). Sean $p = p(t)$, $p : (a_1, a_2) \rightarrow \mathbb{R}$ y $f = f(x)$, $f : (b_1, b_2) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Entonces, $\forall t_0 \in (a_1, a_2)$, $x_0 \in (b_1, b_2)$ el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = p(t)f(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.14)$$

admite una solución (x, I) . Además:

a) El problema posee la propiedad de unicidad local si $f(x_0) \neq 0$.

b) Si f es de clase C^1 entonces ² se satisface la propiedad de unicidad de soluciones sin restricciones sobre el valor de $f(x_0)$. Se cumple por tanto la propiedad de unicidad de soluciones y (1.14) posee una única solución maximal $(x^*(t), I^*)$.

Observación 1.10. El intervalo de existencia maximal I^* se suele representar como (α, ω) .

El semintervalo $[t_0, \omega)$ representa la máxima predicción futura que proporciona la ecuación.

Uno de los grandes problemas abiertos en ecuaciones –que se resuelve explícitamente en el caso de variables separadas– consiste en dar información sobre dicho intervalo en clases generales de ecuaciones (ver la observación ii) debajo).

Observaciones 1.11.

- i) Como prueba el ejemplo de $x' = \sqrt{|x|}$ la sola continuidad de f no basta para conseguir la unicidad local si $f(x_0) = 0$.
- ii) La ecuación está definida para $t \in (a_1, a_2)$. Sin embargo, los ejemplos que siguen muestran que en general las soluciones no están definidas en dicho intervalo.

Ejemplo 1.12. Hállese el dominio de existencia de las soluciones del problema,

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Ejemplo 1.13. Recapitúlese el dominio de existencia de las soluciones del problema:

$$\begin{cases} x'(t) = x(k - \alpha x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Obsérvese la influencia de la posición inicial x_0 sobre dicho dominio. En particular, considérense los rangos (a) $x_0 < 0$, (b) $0 \leq x_0 \leq \frac{k}{\alpha}$ y (c) $x_0 > \frac{k}{\alpha}$.

Ejemplo 1.14. Estúdiense las soluciones de $x' = \cos t (1 + x^2)$ para diversas elecciones de los valores iniciales y del parámetro α .

Cuando $f(x_0) = 0$ lo que sucede es que $x(t) = x_0$ es solución del problema (1.14). Este tipo de soluciones recibe un nombre especial.

Definición 1.14. Se dice que $x(t)$ es una solución estacionaria de la ecuación $x' = f(t, x)$ si $x(t) = c$ con c constante.

Propiedad 1.15. $x(t) = c$ es una solución estacionaria de $x' = f(t, x)$ si y solamente si $f(t, c) = 0$ para todo t .

²En realidad bastan condiciones más débiles de regularidad que veremos con posterioridad, por ejemplo, f localmente Lipschitziana en (b_1, b_2) .

Un caso importante de ecuación en variables separadas es la ecuación autónoma:

$$x' = f(x),$$

así denominada porque el tiempo no aparece explícitamente en el segundo miembro.

Una observación importante tiene que ver con la solución del problema:

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Si:

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)},$$

y si $f(x_0) \neq 0$ la solución cumple:

$$x(t) = F^{-1}(t - t_0). \quad (1.16)$$

La relación (1.16) dice que basta resolver el problema con $t_0 = 0$, cuya solución es $y(t) = F^{-1}(t)$, para tener la de (1.15) por traslación $x(t) = y(t - t_0)$.

Otra propiedad que tiene que ver con la ecuación autónoma es la siguiente.

Propiedad 1.16. Si $x(t)$ resuelve $x' = f(x)$, está definida para $t \in [t_0, \infty)$ y cumple:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c,$$

entonces $y(t) = c$ es una solución estacionaria, es decir, $f(c) = 0$.

En el caso de la ecuación autónoma

$$x' = f(x)$$

las soluciones de equilibrio juegan un papel importante con respecto a las soluciones próximas.

Propiedad 1.17. Sea f una función C^1 en el intervalo (c_1, c_2) y $c \in (c_1, c_2)$ un cero de f . Supóngase además que

$$f(x) > 0 \quad x \in (c_1, c), \quad f(x) < 0 \quad x \in (c, c_2).$$

Entonces para todo $x_0 \in (c_1, c_2)$ la solución de

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

está definida en $[t_0, \infty)$ y además:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c.$$

Estudiamos ahora el comportamiento de las soluciones no acotadas de la ecuación $x' = f(x)$.

Propiedad 1.18. *Sea f una función C^1 en el intervalo (a, ∞) mientras*

$$f(x) > 0 \quad x > b \geq a.$$

Entonces para cada $x_0 > b$ la solución maximal (x, I) de

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

es creciente en $I \cap [t_0, \infty) = [t_0, \omega)$ y satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \omega} x(t) = +\infty.$$

Más aún:

$$\omega = t_0 + \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)}.$$

Observación 1.15. La relación integral precedente permite decidir –sin hallar la solución– si el extremo ω del intervalo maximal es o no finito.

A título de ejemplo considérense las ecuaciones $x' = x$, $x' = \log x$, $x' = x \log x$ y $x' = x^\alpha$ con $\alpha > 0$, $x > 0$.

1.3.2. Ecuaciones Homogéneas

Supongamos que $f : (a_1, a_2) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Una ecuación diferencial homogénea es aquella cuyo “campo” o segundo miembro tiene la forma $f(t, x) = f\left(\frac{x}{t}\right)$. Es decir,

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Nótese que la ecuación está definida en los sectores (uno y su opuesto) $\Omega = \{(t, x)/a_1 < \frac{x}{t} < a_2\}$. Para normalizar siempre supondremos que $t > 0$. Dichas ecuaciones se reducen a ecuaciones en variables separadas cuando se introduce el cambio de variable $u(t) = \frac{x(t)}{t}$. En efecto, para $(t_0, x_0) \in \Omega$ el problema de Cauchy,

$$\begin{cases} x' = f\left(\frac{x}{t}\right) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

es equivalente a,

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{f(u) - u}{t} \\ u(t_0) = \frac{x_0}{t_0}. \end{cases}$$

Proposición 1.19. Si $f \in C(a_1, a_2)$ el problema (P) admite al menos una solución. Si $f \in C^1(a_1, a_2)$ dicha solución es única.

Observación 1.16. Nótese que $x = mt$ es solución si y solamente si $f(m) = m$. Esta es la versión para ecuaciones homogéneas de las soluciones estacionarias.

Ejemplo 1.17. Hállese la solución del problema,

$$\begin{cases} x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Algunas ecuaciones sencillas se reducen a ecuaciones homogéneas. Esto se muestra en los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1.1. Considérese la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dt} = \frac{t + u + 1}{t - u + 3}.$$

Estudiar un cambio de variable de la forma $U = u + k_1$, $\tau = t + k_2$ que permita resolver la ecuación.

Ejercicio 1.2. Demuéstrese que la ecuación diferencial,

$$\frac{du}{dt} = \frac{at + bu + m}{ct + du + n},$$

puede reducirse a casos elementales. Para ello es conveniente distinguir entre $ad - bc \neq 0$ y $ad - bc = 0$. Estúdiense como aplicación las soluciones de las ecuaciones diferenciales:

$$(1 + t - 2y) + (4t - 3y - 6)y' = 0 \quad (t + 2y + 3) + (2t + 4y - 1)y' = 0.$$

1.3.3. Ejercicios

1. Resolver las siguientes ecuaciones en variables separadas:

$$\begin{array}{ll} (a) \quad \frac{dy}{dt} + y \cos t = 0. & (b) \quad y' = (1 + t)(1 + y) \\ (c) \quad y' = e^{t+y+3} & (d) \quad \cos y \sin t \frac{dy}{dt} = \sin y \cos t \\ (e) \quad \frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2 & (f) \quad t^2(1 + y^2) + 2yy' = 0 \end{array}$$

2. Resolver los siguientes problemas de Cauchy.

- (a) $t^2(1+y^2) + 2y \frac{dy}{dt} = 0$, $y(0) = 0$
 (b) $\cos y \frac{dy}{dt} = -\frac{t \operatorname{sen} y}{1+t^2}$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \frac{\pi}{2}$
 (c) $3t \frac{dy}{dt} = y \cos t$, $y(1) = 0$
 (d) $\frac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2}y = 0$, $y(0) = \sqrt{5}$
 (e) $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y+yt^2}$, $y(0) = 1$
 (f) $\frac{dy}{dt} = k(a-y)(b-y)$, $y(0) = 0$ ($a, b > 0$)
 (g) $(1+t^2)^{1/2} \frac{dy}{dt} = ty^3(1+t^2)^{-1/2}$, $y(0) = 1$.

Indicación. En d) $\int_0^t \sqrt{1+t^2} = t\sqrt{1+t^2} - \operatorname{argsh} t$, para lo que se sugiere hacer $t = \sinh s$.

3. Determinar las curvas tales que la normal en cada punto y la recta que lo une con el origen forman un triángulo isósceles con el eje OX .
4. Demuéstrese que una curva regular plana tal que todas sus normales pasan por un punto fijo es una circunferencia.
5. Demostrar que una curva regular plana tal que la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa en dicho punto es una parábola.
6. ♣ Dos compuestos químicos A y B reaccionan de forma que un mol de A se combina con otro de B para dar un mol de C . Se sabe que la velocidad de producción de C es proporcional en cada instante al producto de las concentraciones de A y B presentes en el reactor (ley de acción de masas). Suponiendo conocidas las concentraciones iniciales A_0 , B_0 junto con el valor de formación inicial $C'_0 = \frac{dC}{dt}$, determinar la concentración en función del tiempo.
7. Comprobar que las siguientes ecuaciones son homogéneas, y resolverlas:

$$\begin{array}{ll} (a) & y' = \frac{y^2 + 2ty}{y^2} \\ (b) & y' = \frac{y^3 + t^3}{y^2t + t^3} \\ (c) & xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \\ (d) & y' = \frac{y^3}{xy^2 - x^3}. \end{array}$$

8. Hallar la solución de los siguientes problemas de Cauchy:

- (a) $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$, $y(1) = 1$
 (b) $x' = \frac{2tx}{3t^2 - x^2}$, $x(1) = 1$
 (c) $2ty'(t^2 + y^2) = y(y^2 + 2t^2)$, $y(1) = 1$
 (d) $(y^2 - 3x^2)dy + xydx = 0$, $y(1) = 1$.

Soluciones. a) $y = x$, b) $x = t$.

9. ♣ Dos curvas planas $C = \{(x, y) : y = f(x), a < x < b\}$ y $C' = \{(x, y) : y = g(x), c < x < d\}$ se dicen homotéticas si existe $\lambda > 0$ (la razón de homotecia) tal que $C' = \{(\lambda x, \lambda y) : (x, y) \in C\}$. Pruébese que dos soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ de la ecuación:

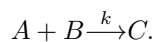
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad x > 0,$$

con datos iniciales en una semirecta $y = mx$ son homotéticas. ¿Bajo qué condiciones es $y = mx$ una solución de la ecuación? Discútase el caso de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

10. ♣ Supongamos que en un espejo de ecuación $y = f(x)$ los rayos de luz se reflejan de forma que el ángulo de incidencia coincide con el ángulo de reflexión. ¿Cuál es la forma del espejo si todos los rayos emanados desde un punto exterior V se reflejan paralelamente a una recta?

1.3.4. Solución a los ejercicios ♣

- **Solución 6.** La reacción química expresada esquemáticamente es



Si a, b, c representan las concentraciones de A, B, C las ecuaciones para a, b, c son:

$$\begin{cases} \dot{a} = -kab \\ \dot{b} = -kab \\ \dot{c} = kab. \end{cases}$$

Se conocen a_0, b_0 y $\dot{c}_0 = \dot{c}(0)$ de donde:

$$k = \frac{\dot{c}_0}{a_0 b_0}.$$

Por otra parte:

$$a + c = a_0 \quad b + c = b_0,$$

pues $c(0) = 0$. La ecuación diferencial resultante es:

$$\frac{dc}{dt} = k(a_0 - c)(b_0 - b) \quad c(0) = 0.$$

Esta ecuación se integra inmediatamente con los datos facilitados.

- **Solución 9.** Supongamos que

$$\mathcal{C} = \{(x, g(x)) : x \in I\}$$

entonces:

$$\mathcal{C}_\lambda = \{(x, \lambda g(\frac{x}{\lambda})) : x \in \lambda I\}$$

donde suponemos $\lambda > 0$ e $I \subset (0, \infty)$.

Si $y = g(x)$, parametrizando la curva $\mathcal{C}$ resuelve

$$\begin{cases} y' = f(y/x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

entonces $y = g_1(x) = \lambda g(x/\lambda)$ –que parametriza $\mathcal{C}_\lambda$ – es la solución de

$$\begin{cases} y' = f(y/x) \\ y(\lambda x_0) = \lambda y_0. \end{cases}$$

Por tanto dos soluciones cortadas por una semirecta desde $(0, 0)$ son necesariamente homotéticas.

Un caso especial ocurre cuando $m_0 = y_0/x_0$ cumple $f(m_0) = m_0$. Entonces

$$g(x) = \lambda g\left(\frac{x}{\lambda}\right) = m_0 x$$

y $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\lambda$.

- **Solución 10.** En la reflexión en un espejo, la tangente en el punto de incidencia es bisectriz del ángulo formado por el rayo incidente y el reflejado. Suponemos que los rayos parten de $(0, 0)$, que la dirección reflejada es paralela a $e_1 = (1, 0)$ y la curva está parametrizada por $(x(s), y(s))$.

La condición de reflexión es:

$$c(s)(\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = \frac{(x(s), y(s))}{r} + e_1.$$

Escribiendo la curva en la forma $y = y(x)$ la ecuación es

$$y' = \frac{y}{x + r}.$$

Integrando nos da que:

$$x - \sqrt{x^2 + y^2} = V_0. \quad (1.17)$$

Nótese que la constante V_0 tiene que ser negativa. Esto sale de la expresión. Por otro lado, la ecuación diferencial no está definida en el semieje $x \leq 0$. Se comprueba que la ecuación es invariante frente al cambio $y \rightarrow -y$ mientras $y = 0$ en $x > 0$ es solución.

Las curvas definidas por la ecuación (1.17) son parábolas.

1.3.5. Ecuaciones Lineales

Consideremos la función continua $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ más general, con la propiedad de ser lineal en x . Tal f será de la forma $f(t, x) = a(t)x$, con $\Omega = (a_1, a_2) \times \mathbb{R}$ y $a(t)$ continua en (a_1, a_2) . Una pequeña variante de tal f es, a su vez, $f(t, x) = a(t)x + b(t)$, donde $b(t)$ también es continua en (a_1, a_2) . La ecuación,

$$x' = a(t)x, \quad (1.18)$$

se dice lineal y homogénea, mientras que

$$x' = a(t)x + b(t), \quad (1.19)$$

se dice la no homogénea asociada a (1.18).

Propiedad 1.20. *Para cada $(t_0, x_0) \in (a_1, a_2) \times \mathbb{R}$ el problema*

$$\begin{cases} x' = a(t)x \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admite por única solución a

$$x(t) = x_0 \exp\left\{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau\right\}.$$

Propiedad 1.21.

- a) Si $y_1(t), y_2(t)$ son soluciones de (1.19), entonces la diferencia $x(t) = y_1(t) - y_2(t)$ es una solución de (1.18).
- b) Si $x_p(t)$ es una solución fijada de (1.19) entonces $\forall x(t)$ solución de (1.19) $\exists y(t)$, una cierta solución de (1.18), tal que

$$x(t) = x_p(t) + y(t).$$

- c) Para cada $(t_0, x_0) \in (a_1, a_2) \times \mathbb{R}$ el problema,

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tiene por solución única a

$$x(t) = x_0 \exp\left\{\int_{t_0}^t a(s) ds\right\} + \int_{t_0}^t \exp\left\{\int_s^t a(\tau) d\tau\right\} b(s) ds. \quad (1.20)$$

Observación 1.18. Se conoce a la expresión (1.20) como la fórmula de variación de las constantes de Lagrange, de la que se dará la correspondiente versión para ecuaciones lineales de orden superior.

Ejemplos 1.19. Estúdiense las soluciones de las ecuaciones,

a) $x' + (\cos t)x = 0$

b) $x' + \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{1}{1+t^2}$

c) $(1+t^2)x' + tx = (1+t^2)^{\frac{5}{2}}$

Observaciones 1.20. Las soluciones de las ecuaciones lineales (1.18) y (1.19) existen donde estén definidos los coeficientes, es decir en (a_1, a_2) . Si, por ejemplo, éstos pueden extenderse por continuidad a un intervalo mayor $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$, $(a_1, a_2) \subset (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$, entonces cada solución de (H) o (NH) en (a_1, a_2) se extiende con unicidad a dicho intervalo (ejercicio). Sin embargo, si los coeficientes $a(t)$ o $b(t)$ no pueden extenderse continuamente más allá de (a_1, a_2) , porque presentan alguna singularidad en uno de los extremos, en general, las soluciones tampoco podrán ser prolongadas. Véanse los siguientes ejemplos.

Ejemplos 1.21. a) $x' = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t^2}$, $t > 0$ (ninguna solución es regular cuando $t \rightarrow 0+$).

b) $x' = -\frac{1}{\sqrt{t}}x + e^{-2\sqrt{t}}$ $t > 0$ (todas son regulares en $t \rightarrow 0+$).

c) $x' = -\frac{1}{t}x + \cos t + \frac{\sen t}{t}$ $t > 0$ (algunas de las soluciones son regulares cuando $t \rightarrow 0+$).

1.3.6. Ejercicios

1. Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

(a) $\frac{dy}{dt} + \frac{2t}{1+t^2}y = \frac{1}{1+t^2}$

(b) $\frac{dy}{dt} + y = te^t$

(c) $\frac{dy}{dt} + t^2y = t^2$

(d) $(1+t^2)\frac{dy}{dt} - ty = t(1+t^2)^{5/2}$

(e) $y' - y = 2xe^{x+x^2}$

(f) $y' - \frac{y}{x+1} = \frac{1}{2}(x+1)^3.$

2. Hallar la solución de los siguientes problemas de Cauchy:

(a) $(1+t^2)\frac{dy}{dt} + 4ty = t, \quad y(1) = \frac{1}{4}$

(b) $\frac{dy}{dt} - 2ty = t, \quad y(0) = 1$

(c) $y' + y \tan x = \sec x, \quad y(0) = 0$

(d) $y' + y \cos x = \sen x \cos x, \quad y(0) = 1.$

3. Demostrar que todas las soluciones de la ecuación $y' + ay = be^{-ct}$ donde a y c son constantes positivas, $b \in \mathbb{R}$, tienden a cero cuando $t \rightarrow +\infty$.

4. Hallar las curvas contenidas en el primer cuadrante tales que cada punto divide en partes iguales al segmento de tangente que queda en dicho cuadrante.

5. ♣ Dada la ecuación diferencial $y' + a(t)y = f(t)$ donde a y f son continuas en $\mathbb{R}$, $a(t) \geq c > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, pruébese que todas las soluciones tienden a cero cuando $t \rightarrow +\infty$.

6. Hallar una solución continua del problema:

$$y' + y = g(t) \quad y(0) = 0,$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

7. ♣ Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en un medio es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_0 del medio. Si la temperatura del medio es de 20°C y el cuerpo se enfría en 20 minutos desde 100° hasta 60° , ¿dentro de cuanto tiempo su temperatura decenderá hasta 30° ?
8. El cuerpo de una víctima de asesinato se descubrió a las 11 p.m. El médico forense llegó a las 11:30 p.m., e inmediatamente tomó la temperatura del cuerpo, que era de $34,8^\circ \text{C}$. Después de una hora, volvió a tomarla, y era de $34,1^\circ \text{C}$. Si la temperatura de la habitación era de 20°C , calcular la hora del asesinato.
9. ♣ Se disuelven 50 gramos de una sustancia en 300 litros de agua contenidos en un tanque. Por otro lado se introduce en el mismo una disolución de la misma sustancia en agua a una concentración de 2 gramos/litro y a razón de 3 litros/minuto (l/m), mientras la solución convenientemente homogeneizada se extrae a razón de 2 l/m.

Si $C = C(t)$ designa la masa en gramos de la sustancia en el tanque pruébese que la ecuación que determina C es:

$$\frac{dC}{dt} = 6 - 2 \frac{C}{300 + t}.$$

1.3.7. Soluciones de los ejercicios ♣.

- **Solución 5.** Una solución arbitraria es:

$$y = y_0 e^{-\int_0^t a} + \int_0^t e^{-\int_s^t a} f(s) ds := y_1(t) + y_2(t).$$

En primer lugar:

$$|y_1(t)| \leq |y_0| e^{-ct} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty.$$

Por otra parte $|f(t)| \leq \frac{\varepsilon C}{2}$ si $t \geq M > 0$. Escribimos:

$$y_2(t) = e^{-\int_M^t a} \int_0^M e^{-\int_s^M a} f(s) ds + \int_M^t e^{-\int_s^t a} f(s) ds := y_3(t) + y_4(t).$$

Está claro que:

$$|y_3(t)| \leq K e^{-ct} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty.$$

Por tanto $|y_3(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ si $t \geq M_1 \geq M$. Asimismo

$$|y_4(t)| \leq \frac{\varepsilon c}{2c} = \frac{\varepsilon}{2},$$

para $t \geq M_1$. Se tiene entonces que $|y_2(t)| \leq \varepsilon$ si $t \geq M_1$ y $y_2(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

- **Solución 7.** La ley de enfriamiento de Newton se puede expresar en la forma:

$$u' = -c(u - T)$$

donde $u(t)$ mide la temperatura del cuerpo, $c > 0$ es la constante de intercambio con el medio, T la temperatura del exterior.

Si la temperatura en t_0 es u_0 la expresión de la temperatura es:

$$u - T = (u_0 - T)e^{-c(t-t_0)}.$$

Usando los datos del problema:

$$40 = 80e^{-20c} \quad 10 = 80e^{-ct^*},$$

donde t^* el tiempo neto que tarda el cuerpo en alcanzar 30° C. Por tanto:

$$c = \frac{\log 2}{20} \quad t^* = \frac{1}{c} \log 8 = 60.$$

- **Solución 9.** Supongamos que entra agua en el depósito con un caudal de v_i litros/minuto y una concentración de c_i gramos litro. Asimismo que la mezcla homogeneizada se bombea fuera del depósito a razón de v_e litros/minuto.

La variación de volumen es (en litros minuto)

$$\frac{dV}{dt} = v_i - v_e \quad \Rightarrow \quad V(t) = V_0 + \int_0^t (v_i - v_e),$$

así

$$V(t) = V_0 + (v_i - v_e)t,$$

aunque podíamos haber supuesto perfectamente que v_i y v_e son variables con el tiempo.

La substancia entra en el depósito a razón de

$$\frac{dC_i}{dt} = c_i v_i$$

gramos/minuto y sale del depósito a razón de

$$\frac{dC_e}{dt} = c(t)v_e = v_e \frac{C(t)}{V(t)}$$

gramos por minuto donde $C(t)$ es la masa disuelta en el instante t , $c(t) = C(t)/V(t)$ la concentración. Por tanto, la variación de masa por minuto es:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC_i}{dt} - \frac{dC_e}{dt} = c_i v_i - v_e \frac{C(t)}{V(t)}. \quad (C)$$

Substituyendo datos, la $C(t)$ de nuestro problema cumple:

$$\frac{dC}{dt} = 6 - 2 \frac{C(t)}{300 + t} \quad C(0) = 50.$$

La ecuación (C) se puede expresar también en términos de la concentración:

$$\frac{(cV)}{dt} = v_i c_i - v_e c \quad \Rightarrow \quad V\dot{c} + c\dot{V} = v_i c_i - v_e c,$$

por tanto:

$$\frac{\dot{c}}{c_i - c} = \frac{v_i}{V(t)},$$

$$\log \left(\frac{c_i - c_0}{c_i - c} \right) = \int_0^t \frac{v_i}{V(s)} ds.$$

Por tanto:

$$\left(\frac{c_i - c_0}{c_i - c} \right) = \left(\frac{300 + t}{300} \right)^{v_i}$$

donde $c_i = 2$, $c_0 = 1/6$, $v_i = 34$.

1.3.8. Ecuaciones de Bernoulli y Riccati

Tras el caso lineal, donde el segundo miembro $f(t, x)$ de una ecuación escalar es lineal en x , el siguiente nivel en complejidad corresponde a $f(t, x)$ polinómica en x :

$$f(t, x) = a_0(t) + a_1(t)x + \cdots + a_n(t)x^n,$$

donde los coeficientes $a_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, son funciones continuas de t en un intervalo $(a_1, a_2) \subset \mathbb{R}$. Sin embargo esta es una clase demasiado amplia de ecuaciones como para poder ser estudiada desde el punto de vista elemental del presente capítulo. De hecho, el único caso que es integrable elementalmente es

$$x' = a_1(t)x + a_n(t)x^n, \quad (n \geq 2).$$

Dicha ecuación (llamada de *Bernoulli*) se trata mediante el cambio de variable,

$$y(t) = x(t)^{1-n},$$

para llegar a:

$$y' = (1-n)a_1(t)y + (1-n)a_n(t).$$

El problema:

$$\begin{cases} x' = a_1(t)x + a_n(t)x^n \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.21)$$

es equivalente entonces a:

$$\begin{cases} y' = (1-n)a_1(t)y + (1-n)a_n(t) \\ y(t_0) = x_0^{1-n}, \end{cases}$$

Obsérvese que si $x_0 = 0$, $x(t) \equiv 0$ es la solución del problema (1.21). Usando el mismo argumento que en el Teorema 1.13 se demuestra que (1.21) admite una única solución para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in (a_1, a_2)$.

Si $a_0(t) \neq 0$ en la expresión de $f(t, x)$ correspondiente a $n = 2$, la ecuación resultante tiene la forma

$$x' = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2,$$

y se la llama ecuación de *Riccati*. A mediados del siglo XIX Liouville demostró la imposibilidad de integrar elementalmente dicha ecuación. Es decir, expresar sus soluciones como el resultado de aplicar un número finito de veces los operadores algebraicos estándar, el operador integral y las funciones elementales (función racional, función exponencial e inversa, funciones trigonométricas y sus inversas) sobre los coeficientes de la ecuación.

Sin embargo, si se conoce explícitamente una solución $x_0(t)$ de la ecuación de Riccati, entonces ésta se puede integrar elementalmente. En efecto, el cambio $y(t) = x(t) - x_0(t)$ lleva a la ecuación de Bernoulli:

$$y'(t) = (a_1(t) + 2a_2(t)x_0(t))y + a_2(t)y^2.$$

Ejemplo 1.22. Hállese una solución particular de la ecuación:

$$x' = x - x^2 + f(t),$$

donde $f(t) = \cos t - \sin t + \sin^2 t$ o bien $f(t) = \cos t - \sin t + e^{2t} + 2e^t \sin t + \sin^2 t$.

Ejemplo 1.23. Estúdiense las soluciones de la siguiente ecuación,

$$x' = -tx + x^2 + 1.$$

1.3.9. Ejercicios

1. Usar el argumento del Teorema 1.13 para probar la unicidad local de soluciones del problema de Cauchy para la ecuación de Bernoulli

$$\begin{cases} x' = a_1(t)x + a_n(t)x^n \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

2. Resolver las siguientes ecuaciones de Bernoulli y de Riccati:

$$\begin{array}{ll} (a) & (1+x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0 \\ (b) & x \frac{dy}{dx} - y = y^2 \log x \\ (c) & y^2(x+x^2) + 3 + x^2y \frac{dy}{dx} = 0 \\ (d) & x \frac{dy}{dx} + y = (x \log x)y^2 \\ (e) & (1-x^3) \frac{dy}{dx} + 2x + x^2y - y^2 = 0 \\ (f) & xy^2 \frac{dy}{dx} + y^3 = \frac{a^3}{x}. \end{array}$$

Indicación (e): usar $y_p(x) = -x^2$ como solución particular.

3. Calcular la solución de los problemas de Cauchy:

$$\begin{array}{ll} (a) & y' = x^2 - 2xy + y^2, & y(0) = 1 \\ (b) & x^2y' + 2x^3y = y^2(1 + 2x^2), & y(2) = 2 \\ (c) & x(1-x^2)y' - x^2 + (x^2-1)y + y^2 = 0, & y(1) = 1 \\ (d) & y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3y^2, & y(0) = 1. \end{array}$$

4. Se considera la ecuación de Bernoulli

$$y' + a(t)y = b(t)y^n,$$

donde $t \in I$, I un cierto intervalo de interior no vacío. Escribir la ecuación en la forma $(\mu(t)y)' = b(t)\mu(t)y^n$ para una función $\mu(t)$. Escribese ésta última como

$$(F(\mu(t)y))' = \tilde{b}(t)$$

e intégrese así la ecuación.

1.3.10. Ecuaciones Exactas

En contextos geométricos se trata con ecuaciones de la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (1.22)$$

donde M, N son funciones (continuas) definidas en un cierto dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Típicamente se supone que el vector (M, N) es no nulo en Ω . Se dice que una curva parametrizada C^1 , $(x(s), y(s))$, $s \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, resuelve (1.22) si:

$$M(x(s), y(s))x'(s) + N(x(s), y(s))y'(s) = 0 \quad s \in I.$$

Esto significa geoméricamente que las curvas solución son ortogonales al campo (M, N) en cada punto de Ω .

Si expresamos la curva en la forma $y = y(x)$, $x \in J$, la ecuación (1) toma la forma:

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad (1.23)$$

mientras que si expresamos $x = x(y)$ (1) se expresa como:

$$x' = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}. \quad (1.24)$$

En lo sucesivo adoptaremos (1.23) como opción preferente de escribir la ecuación (1.22).

Para justificar la próxima definición vamos a presentar un ejemplo. Supongamos que $(x(s), y(s))$, $s \in I$ (I un intervalo), es una parametrización C^1 mientras $V = V(x, y)$ es una función C^1 que se mantiene constante sobre la parametrización. Es decir:

$$V(x(s), y(s)) = c,$$

para $s \in I$. Entonces $(x(s), y(s))$ cumple:

$$V_x(x(s), y(s))x'(s) + V_y(x(s), y(s))y'(s) = 0 \quad s \in I.$$

Esta ecuación es del tipo (1.22) con $M = V_x, N = V_y$. Define esencialmente lo que llamaremos una ecuación exacta.

Definición 1.22. Sean $M, N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $N(x, y) \neq 0$ para cada $(x, y) \in \Omega$. Se dice que la ecuación diferencial $y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ es exacta en Ω si para cada $(x, y) \in \Omega$ existe $U \subset \Omega$, entorno abierto de (x, y) y $V(x, y) \in C^1(U, \mathbb{R})$ tales que $M = V_x$ y $N = V_y$ en U .

Observación 1.24. En la definición precedente el entorno U y la correspondiente función V pueden depender en principio del punto de referencia $(x, y) \in \Omega$.

Teorema 1.23. *Supongamos que la ecuación diferencial $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ es exacta en Ω . Entonces, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$ el problema,*

$$\begin{cases} y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

admite una única solución que localmente satisface

$$V(x, y) = c,$$

donde c es constante.

Teorema 1.24. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio y $M, N \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tales que,*

$$M_y = N_x \quad \text{en } \Omega.$$

Entonces, la ecuación diferencial $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ es exacta en Ω .

Observaciones 1.25. De la demostración se desprende que una posible solución $V(x, y)$ del sistema de ecuaciones: $V_x = M(x, y)$, $V_y = N(x, y)$ (hay infinitas soluciones $V(x, y)$ que en cada componente conexa de Ω se diferencian en una constante) es:

$$V_1(x, y) = \int_{x_0}^x M(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y N(x, s) ds,$$

o también,

$$V_2(x, y) = \int_{x_0}^x M(t, y) dt + \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds.$$

Ambas expresiones coinciden en un entorno de (x_0, y_0) . Podría pensarse que su valor común $V(x, y)$ puede extenderse a todo el dominio Ω . Sin embargo, una condición necesaria y suficiente para que esto suceda es que Ω sea *simplemente conexo*. Un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo si toda curva de Jordan γ en Ω tiene su “interior” $\text{int } \gamma$ enteramente contenido en Ω . En otras palabras, Ω carece de agujeros.

En este caso podemos definir $V(x, y)$ como:

$$V(x, y) = \int_{\Gamma} M dx + N dy,$$

donde Γ es cualquier poligonal de lados paralelos a los ejes que conecte (x_0, y_0) con (x, y) . Más aún, Γ puede ser una curva C^1 a trozos cualquiera. Razonamos por qué es esto cierto más abajo.

A estos efectos debe recordarse que si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto y conexo entonces todo par de puntos $x_0, x \in \Omega$ se puede conectar mediante una poligonal $\Gamma \subset \Omega$ de lados paralelos a los ejes.

Si Ω no es simplemente conexo la afirmación es falsa como muestran la propiedad y ejemplo siguientes.

Propiedad 1.25. Sea $V \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio, $M = V_x$, $N = V_y$, y γ cualquier curva cerrada contenida en Ω de clase C^1 a trozos (sin restricciones sobre su interior). Entonces:

$$\int_{\gamma} M \, dx + N \, dy = 0.$$

Demostración. Si $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$, $a \leq t \leq b$ define una parametrización de γ ,

$$\int_{\gamma} M \, dx + N \, dy = \int_a^b \frac{d}{ds} V(g(s)) \, ds = V(g(t))|_a^b = 0.$$

□

Ejemplo 1.26. Consideremos el dominio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}.$$

No existe una función C^1 , $V = V(x, y)$, definida en todo Ω tal que:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

En efecto, si tal V existe y Γ es la circunferencia de radio $\varepsilon \in (0, 1)$ orientada positivamente, por ejemplo $(x, y) = \varepsilon(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t < 2\pi$, resulta que:

$$\int_{\Gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy = 2\pi.$$

Sin embargo, tal integral debería ser cero pues:

$$\int_{\Gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy = \int_0^{2\pi} \{V_x x' + V_y y'\} \, dt = 0.$$

Por tanto V no puede existir.

Un dominio maximal dentro de Ω donde puede construirse V es por ejemplo Ω menos un radio.

Teorema 1.26. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio plano simplemente conexo, $M, N \in C^1(\Omega)$ de clase C^1 cumpliendo la condición de exactitud:

$$M_y = N_x.$$

Para $P_0 = (x_0, y_0)$ fijado en Ω y $P = (x, y) \in \Omega$ arbitrario sea $\gamma(P_0, P)$ una poligonal de lados paralelos a los ejes que conecta P_0 con P . La función

$$V(P) = \int_{\gamma(P_0, P)} M \, dx + N \, dy$$

está bien definida en Ω , es C^1 y $V_x = M$, $V_y = N$. En consecuencia, y en virtud de la propiedad precedente $\gamma(P_0, P)$ puede sustituirse por cualquier arco C^1 a trozos que conecte P_0 con P .

Idea de la prueba. Para demostrar la independencia del camino tomamos dos poligonales γ_1 y γ_2 como $\gamma(p_0, p)$. Entonces $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ define una poligonal cerrada con lados paralelos a los ejes; por tanto con un número finito de auto-intersecciones (salvo coincidencia parcial de lados). Dicha poligonal se factoriza en una suma finita de curvas de Jordan, más curvas cerradas triviales del tipo segmentos recorridos en un sentido y el contrario. Con ayuda del teorema de Green (ver más abajo) en los lazos no triviales concluimos:

$$\int_{\gamma} M \, dx + N \, dy = 0.$$

A continuación observamos que si $Q \in \Omega$ es un punto arbitrario y $B \subset \Omega$ es una bola centrada en Q entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} V(P) &= \int_{\gamma(P_0, P)} M \, dx + N \, dy = \int_{\gamma(P_0, Q)} M \, dx + N \, dy \\ &\quad + \int_{\gamma(Q, P)} M \, dx + N \, dy = \int_{\gamma(P_0, Q)} \{M \, dx + N \, dy\} + W(P), \end{aligned}$$

donde $P \in B$. Como W es una de las funciones V_i introducidas en la Observación 1.25 entonces $V_x = M$, $V_y = N$ en B . Con esto concluye la prueba. $\square$

Teorema 1.27 (Teorema de Green). *Sean M, N de clase C^1 en un dominio Ω , $\gamma \subset \Omega$ una curva de Jordan C^1 a trozos, orientada positivamente con $R = \text{int } \gamma \subset \Omega$. Entonces:*

$$\int_{\gamma} M \, dx + N \, dy = \iint_R (N_x - M_y) \, dx dy.$$

En realidad, un cuidadoso análisis de la demostración del Teorema 1.26 revela que basta con la siguiente versión elemental del teorema de Green.

Teorema 1.28 (Teorema de Green en rectángulos). *Sean M, N de clase C^1 en un dominio Ω , $R \subset \Omega$ un rectángulo cerrado de lados paralelos a los ejes con frontera ∂R orientada positivamente. Entonces:*

$$\int_{\gamma} M \, dx + N \, dy = \iint_R (N_x - M_y) \, dx dy.$$

Demostración. Es suficiente con emplear una simple integración por partes. $\square$

Observación 1.27. Para la prueba del Teorema 1.26 se observa que la poligonal cerrada γ se factoriza como la suma de bordes de rectángulos ∂R más segmentos recorridos en los dos sentidos.

1.3.11. Factores integrantes

Se deduce del teorema previo que, en general, no todas las ecuaciones son exactas. Sin embargo, dada la ecuación:

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad (1.25)$$

con M y N definidas y continuas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, se dice que una cierta función real $\mu = \mu(x, y)$ es un factor integrante de (1.25) si la ecuación equivalente:

$$y' = \frac{-\mu M(x, y)}{\mu N(x, y)},$$

es exacta en Ω . Siendo μ , M y N de clase C^1 en Ω es evidente que:

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x,$$

constituye una condición necesaria y suficiente para que $\mu(x, y)$ sea un factor integrante de (1.25). Tal relación define una ecuación en derivadas parciales de primer orden en μ . Puede probarse que siempre existen tales factores integrantes, aunque en la generalidad de los casos no pueden calcularse explícitamente. Por otra parte, se demuestra en un curso de ecuaciones en derivadas parciales que la resolubilidad de tal ecuación para μ equivale a la de la ecuación original (1.25) (método de las características). Es decir, el tratamiento de los factores integrantes no simplifica el problema de la existencia de soluciones.

Ejemplos 1.28.

1) La ecuación,

$$x' = \frac{2t + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \quad (' = \frac{d}{dt})$$

es exacta.

2) La ecuación:

$$y' = -\frac{xy^2 + x^2y^2 + 3}{x^2y} \quad (' = \frac{d}{dx})$$

admite a $\mu(x, y) = e^{-2x}$ como factor integrante.

1.3.12. Ejercicios

1. Resolver las siguientes ecuaciones exactas:

$$(a) \quad 2t \sin y + y^3 e^t + (t^2 \cos y + 3y^2 e^t) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$(b) \quad 1 + (1 + ty)e^{ty} + (1 + t^2 e^{ty}) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$(c) \quad y \sec^2 t + \sec t \tan t + (2y + \tan t) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$(d) \quad \left(\frac{y^2}{2} - 2ye^t \right) dt + (yt - 2e^t) dy = 0.$$

Soluciones. La solución está implícita en $V = c$, c constante, donde

- a) $V = t^2 \operatorname{sen} y + y^3 e^t$,
- b) $V = (1 + e^{ty})t + y$,
- c) $V = y^2 + y \tan t + \sec t$
- d) $V = \frac{ty^2}{2} - 2ye^t$.

2. Para $P, Q \in C^1(\Omega)$ se considera la ecuación $P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$, la cual suponemos es exacta. Pruébese que $P(x, y) - \int_{y_0}^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, s) ds$ es una función que sólo depende de la variable x .

3. En cada uno de los casos siguientes hallar la función $M(x, y)$ más general que hace que las siguientes ecuaciones sean exactas:

- a) $Mdx + (\sec^2 y - \frac{x}{y})dy = 0$
- b) $Mdx + (\operatorname{sen} x \cos y - xy - e^{-y})dy = 0$.

4. Buscar un factor integrante para las siguientes ecuaciones, y resolverlas.

- (a) $ydx + (2x - ye^y)dy = 0$
- (b) $y' = e^{2x} + y - 1$
- (c) $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$
- (d) $x + y^2 - 2xyy' = 0$.

Soluciones.

- a) $\mu = y$. $V = xy^2 - (1 + y)e^y$.
- b) $\mu = e^{-x}$. $V = 2 \cosh x - ye^{-x}$.
- c) $\mu = \frac{1}{x^2}$. $V = \frac{y^2}{2} - xy - \frac{1}{x}$.
- d) $\mu = \frac{1}{x^2}$. $V = \log |x| - \frac{y^2}{x}$.

5. Resolver las siguientes ecuaciones, buscando un factor integrante como se indica:

- (a) $3x^2 - t + (2x^3 - 6tx)x' = 0$, $\mu = \mu(t + x^2)$
- (b) $x - 2y + 4 + (2x - 4y + 4)y' = 0$, $\mu = \mu(x + \alpha y)$, α por determinar,
- (c) $x dx + y dy + x(x dy - y dx) = 0$, $\mu = \mu(x^2 + y^2)$
- (d) $t^2 y^3 + t(1 + y^2)y' = 0$, $\mu = \frac{1}{t} \varphi(y)$.

Soluciones.

- a) $\mu = (t + x^2)^{-3}$
- b) $\alpha = -2$, $\mu = \frac{1}{x-2y+3}$

c) $\mu = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

d) $\varphi(y) = \frac{1}{y^3}$.

6. En cada uno de los casos siguientes búsquese un factor integrante de la forma $x^n y^m$ para las siguientes ecuaciones:

a) $(2y^2 - 6xy)dx + (3xy - 4x^2)dy = 0$

b) $(12 + 5xy)dx + (6xy^{-1} + 3x^2)dy = 0$

c) $(5x^2y + 6x^3y^2 + 4xy^2)dx + (2x^3 + 3x^4y + 3x^2y)dy = 0$.

7. Supóngase que $M(x, y), N(x, y)$ son funciones regulares tales que

$$\frac{N_x - M_y}{xM - yN} = h(xy),$$

es decir, el primer miembro es una función de xy . Demuéstrese que la ecuación diferencial:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

admite un factor integrante que es función de xy . Como aplicación resuélvase la ecuación:

$$\left(2 + \frac{1}{x} \cos xy\right) dx + \left(\frac{x}{y} + \frac{1}{y} \cos xy\right) dy = 0.$$

8. Hállese la solución de los problemas de Cauchy siguientes.

(a) $3t^2 + 4ty + (2y + 2t^2)y' = 0, \quad y(0) = 1$

(b) $\cos 2te^{ty}y - 2 \operatorname{sen} 2te^{ty} + 2t + (t \cos 2te^{ty} - 3)y' = 0, \quad y(0) = 0$

(c) $2t \cos y + 3t^2y + (t^3 - t^2 \operatorname{sen} y - y)y' = 0, \quad y(0) = 2$

(d) $2ty + y^2 + (t^2 + 2ty)y' = 0, \quad y(2) = 1$

(e) $\frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\right)dy = 0, \quad y(1) = 1$

(f) $x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos y \quad y' = 0, \quad y(0) = 0$

(g) $2xy^2 - 3y^3 + (7 - 3xy^2)y' = 0, \quad y(1) = 1.$

9. Hállense todas las $f(t)$ tales que la ecuación:

$$y^2 \operatorname{sen} t + yf(t)y' = 0$$

sea exacta.

10. Se sabe que la ecuación:

$$f(t)y' + t^2 + y = 0$$

admite a $\mu(t, y) = t$ como factor integrante. Hállense las funciones $f(t)$.

1.4. Familias de curvas y ecuaciones diferenciales

Ya se dijo que un elemento (x, y, p) es un triplete que representa un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y p una recta que pasa por (x, y) con pendiente p . Si Ω es un dominio de $\mathbb{R}^2$ un campo de direcciones $\mathcal{F}$ en Ω es una familia de elementos $\mathcal{F} = \{(x, y, p) : p = f(x, y)\}$ para una cierta función continua $f \in C(\Omega)$. Una solución $y \in C^1(I)$ de la ecuación:

$$y' = f(x, y)$$

puede considerarse una subfamilia $\{(x, y(x), y'(x)) : x \in I\}$ de $\mathcal{F}$. Un campo de direcciones es una familia de rectas en Ω y una solución es toda curva que se adapta al campo en el sentido de que su tangente en cada punto es la recta del campo correspondiente a dicho punto.

Una familia $\mathcal{C}$ de curvas de clase C^1 en Ω es una colección de funciones

$$\{(y, I) : I \text{ un intervalo abierto } f \in C^1(I)\}$$

tales que para cada (x_0, y_0) en Ω existe un único par $(y, I) \in \mathcal{C}$ tal que $x_0 \in I$, $y_0 = y(x_0)$. Toda familia de curvas $\mathcal{C}$ en Ω define un campo de direcciones, es decir una ecuación, de la que las curvas son soluciones. Tal ecuación es:

$$y' = f(x, y),$$

donde

$$f(x_0, y_0) = y'(x_0),$$

donde $(y, I) \in \mathcal{F}$ es la curva que pasa por (x_0, y_0) . Recíprocamente, toda función $f(x, y)$ suficientemente regular define una familia de curvas en Ω . Esto se probará más tarde.

Ejemplo 1.29. La familia

$$y = \lambda \operatorname{sen} x \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, \pi),$$

es una familia de curvas en $(0, \pi) \times \mathbb{R}$. La ecuación asociada es:

$$y' = (\operatorname{tag} x)y.$$

Una familia de curvas parametrizadas de clase C^1

$$\mathcal{C} = \{((x, y), I) : I \text{ un intervalo abierto } x = x(s), y = y(s) \in C^1(I)\}$$

define una familia de curvas en Ω si para cada curva $|(x'(s), y'(s))| \neq 0$ en I y a demás:

a) Para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$ existe un único par en $((x, y), I) \in \mathcal{C}$ con

$$(x(s_0), y(s_0)) = (x_0, y_0),$$

para algún $s_0 \in I$.

b) Si para (x_0, y_0) , $((x, y), I) \in \mathcal{C}$, $s_0 \in I$ como en a) se cumple:

$$(x(s_1), y(s_1)) = (x_0, y_0),$$

para $s_1 \neq s_0$, entonces:

$$(x'(s_1), y'(s_1)) = \kappa(x'(s_0), y'(s_0))$$

para alguna constante κ . La condición se satisface si por ejemplo $(x(s), y(s))$ es periódica de periodo $s_1 - s_0$.

Ejemplo 1.30. La familia

$$x^2 + y^2 = \lambda^2$$

define para $\lambda > 0$ una familia de curvas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Ejemplo 1.31. Más generalmente sea $F = F(x, y, \lambda)$ una función C^1 para $(x, y) \in \Omega$, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ donde Ω es un dominio de $\mathbb{R}^2$. Suponemos que $(F_x, F_y) \neq (0, 0)$ en $\Omega \times (\lambda_1, \lambda_2)$ y que para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$ existe un único λ_0 tal que

$$F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0.$$

Puede probarse que entonces $F(x, y, \lambda) = 0$ define una familia uniparamétrica de curvas en Ω .

Toda familia $\mathcal{C}$ de curvas parametrizadas en Ω define una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Basta tomar $M(x_0, y_0) = -y'(s_0)$, $N(x_0, y_0) = x'(s_0)$.

En el caso del Ejemplo 1.31 la ecuación toma la forma:

$$F_x(x, y, \lambda)dx + F_y(x, y, \lambda)dy = 0,$$

donde para cada $(x, y) \in \Omega$, $\lambda = \lambda(x, y)$ es el valor que hace que (x, y) satisfaga $F = 0$.

Dada una familia de curvas $\mathcal{F}$, la familia familia ortogonal $\mathcal{F}'$ es aquella cuyos miembros al cortar a los de $\mathcal{F}$ lo hacen necesariamente bajo ángulo recto. Si $y' = f(x, y)$ constituye la ecuación de la familia $\mathcal{F}$, la ecuación diferencial de los integrantes de $\mathcal{F}'$ es:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

Análogamente, la familia de curvas isogonales a una dada $\mathcal{F}$ se define coma aquella $\mathcal{F}'$ cuyos elementos cortan a los de $\mathcal{F}$ bajo un ángulo α . Si $f(x, y)$ es el campo asociado a $\mathcal{F}$, su familia isogonal se encuentra resolviendo la ecuación diferencial

$$y' = \frac{f + \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)f}.$$

En el siguiente capítulo se dan condiciones generales que aseguran cuándo esta última ecuación define una familia de curvas en Ω .

Ejemplo 1.32. La familia de las circunferencias del ejemplo anterior tiene por ecuación

$$xdx + ydy = 0,$$

luego su campo en $y \neq 0$ es

$$y' = -\frac{x}{y},$$

la ecuación de las curvas ortogonales es

$$y' = \frac{y}{x}.$$

La correspondiente familia de curvas es:

$$y = \lambda x.$$

1.4.1. Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes casos, determinar una ecuación diferencial que satisfaga la familia en cuestión hallando una familia de curvas ortogonales a las de la familia dada.
 - (a) Circunferencias centradas en el origen.
 - (b) Circunferencias tangentes al eje OY en el origen.
 - (c) $xy = C$
 - (d) $y = Cx^2$
 - (e) $x^2 + 4y^2 = C^2$
 - (f) $y^2 = Cx^3$.

1.5. Ecuaciones implícitas

Sea $F = F(x, y, p)$ una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$ o en algún dominio suyo $Q \subset \mathbb{R}^3$. Una ecuación diferencial implícita es aquella de la forma:

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1.26)$$

en la que y' no está expresada explícitamente en términos de (x, y) .

Para resolver la ecuación (1.26) es necesario primero “despejar” p en términos de (x, y) en la ecuación:

$$F(x, y, p) = 0, \quad (1.27)$$

en la forma

$$p = f(x, y),$$

para obtener “una” o “varias” ecuaciones en forma normal:

$$y' = f(x, y).$$

Estos son unos ejemplos.

Ejemplo 1.33. La ecuación

$$y'^2 + (x-1)y' - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{(1-x) \pm \sqrt{(x-1)^2 + 4y}}{2}$$

en la región

$$\Delta = 4y + (x-1)^2 > 0.$$

Nótese que las ecuaciones resultantes no están propiamente definidas en los puntos donde $\Delta = 0$.

Ejemplo 1.34. La ecuación

$$y'^2 - (x+y)y' + xy = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x+y \pm |x-y|}{2}$$

en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.35. La ecuación

$$y'^3 - yy' - x^2y' + x^2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = y, \quad y' = x, \quad y' = -x.$$

En general, se observa la siguiente regla heurística: habrá tantas ecuaciones diferenciales como “grado” tenga la ecuación (1.26) con respecto a p (ver más abajo el Ejemplo 1.39).

El análisis del problema de Cauchy ayuda considerablemente a entender la naturaleza de estas ecuaciones. La existencia de solución de

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.28)$$

requiere en primer lugar que la ecuación en p :

$$F(x_0, y_0, p) = 0$$

admita al menos una solución $p = p_0$. Es decir (x_0, y_0, p_0) ha de ser un elemento de la ecuación. En segundo lugar, y a efectos de usar técnicas elementales o teóricas es asimismo necesario poder despejar p

$$p = f(x, y)$$

para todo (x, y, p) próximo a (x_0, y_0, p_0) . Usando el Teorema de la Función implícita podemos establecer el resultado básico de este capítulo.

Teorema 1.29. *Sea F de clase C^1 y (x_0, y_0, p_0) un elemento de la ecuación:*

$$F(x, y, y') = 0$$

tal que:

$$F_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0.$$

Entonces el problema de Cauchy (1.28) admite una única solución local $y(x)$ si se impone la condición “extra” de que en el punto x_0 dicha solución cumple la condición:

$$y'(x_0) = p_0.$$

Demostración. El problema equivale a

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

donde $p = f(x, y)$ es la única función C^1 que, como resultado de despejar p en términos de (x, y) en (1.27) para (x, y, p) próximo a (x_0, y_0, p_0) , cumple $p_0 = f(x_0, y_0)$. En estas condiciones, se demuestra en el Capítulo II que éste último problema admite una única solución. $\square$

Corolario 1.30. *Si la ecuación*

$$F(x_0, y_0, p) = 0$$

admite exactamente N soluciones $p_{01}, \dots, p_{0N}$ tales que

$$F_p(x_0, y_0, p_{0i}) \neq 0 \quad i = 0, \dots, N,$$

entonces el problema (1.28) admite exactamente N soluciones locales $y_i = y_i(x)$ caracterizadas por las condiciones:

$$y'(x_0) = p_{0i} \quad i = 0, \dots, N.$$

Observaciones 1.36.

a) A diferencia de lo que sucede con el caso normalizado:

$$y' = f(x, y),$$

la ecuación (1.26) puede asignar a un punto dado (x, y) uno, varios o ningún valor de p tal que se cumpla la ecuación:

$$F(x, y, p) = 0.$$

Esto significa que, fijado (x_0, y_0) , podemos tener más de un candidato a p_0 .

b) Se llama elemento (x, y, p) de la ecuación a cualquier solución de (1.27) (campo de direcciones). Como se ha dicho, (1.27) no define propiamente un campo de direcciones: en algunos casos puede no haber dirección alguna asignada a un punto (x, y) dado, en otros más de una. Una solución $y(x)$ puede visualizarse como una familia continua de elementos $(x, y, p) = (x, y(x), y'(x))$ que cumplen la ecuación para $x \in I$, I un intervalo.

Las que siguen son unas cuantas definiciones “clásicas” en este tema. Un elemento (x_0, y_0, p_0) se dice regular si existe un entorno suyo $U = V \times (p_0 - \varepsilon, p_0 + \varepsilon)$ en R^3 y una función continua $f(x, y)$ definida en U de suerte que

$$F(x, y, p) = 0,$$

sólo admite en U soluciones de la forma $(x, y, p) = (x, y, f(x, y))$, por tanto $p_0 = f(x_0, y_0)$. El elemento (x_0, y_0, p_0) del teorema precedente es, por supuesto, regular.

Se llama singular a todo elemento no regular. Un punto $P = (x, y)$ se dice singular si (x, y, p) es singular para algún p (sin detrimento de que también (x, y, p') sea simultáneamente regular para $p' \neq p$).

Se dice que $y(x)$ es una solución regular de (1.26) en el intervalo I si es de clase C^1 y todos sus elementos son regulares. Si por contra, la totalidad de sus elementos son singulares, se dirá que tal solución es singular.

Ejemplo 1.37. Sean $f(x, y)$, $g(x, y)$ funciones C^1 definidas en $\mathbb{R}^2$,

$$F(x, y, p) = (p - f(x, y))(p - g(x, y)).$$

Si $f(P_0) \neq g(P_0)$ en $P_0 = (x_0, y_0)$ entonces $(P_0, f(P_0))$, $(P_0, g(P_0))$ son los dos únicos elementos asociados al punto P_0 y son regulares. Si $f(P_0) = g(P_0)$ mientras $f \neq g$ en todo entorno de P_0 (en el sentido de que en cada entorno V de P_0 siempre existe un punto P donde $f(P) \neq g(P)$), entonces $(P_0, f(P_0))$ es el único elemento asociado a P_0 y es singular.

Típicamente, la curva $f = g$ da lugar a los puntos P con elementos asociados de tipo singular. Estúdiese por ejemplo $F = p^2 - 4x^2$ o la ecuación $y'^2 - 4x^2 = 0$.

Corolario 1.31. *Todos los elementos singulares (x, y, p) de la ecuación diferencial*

$$F(x, y, y') = 0,$$

satisfacen las condiciones:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ F_p(x, y, p) = 0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Observaciones 1.38.

a) Al falta de una terminología mejor, se define “lugar singular” de la ecuación

$$F(x, y, y') = 0$$

al lugar de los puntos del plano (x, y) para los que existe p de forma que (x, y, p) es un elemento que anula F_p . Es decir, los puntos (x, y) para los que existe p tal que:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ F_p(x, y, p) = 0. \end{cases}$$

De la discusión anterior se deduce que los puntos singulares y por tanto las soluciones singulares deben yacer en el lugar singular. Sin embargo, no todos los puntos del lugar singular tienen por que ser singulares (en este aspecto la terminología “lugar singular” debe tomarse con extrema precaución).

b) Un ejemplo canónico de elemento singular (x_0, y_0, p_0) es aquel que es común a dos soluciones distintas de la ecuación. En otras palabras, existen dos soluciones y_1, y_2 , distintas en todo entorno de x_0 pero compartiendo valores y derivadas en dicho punto. Un caso extremo de esta situación es el de la envolvente de una familia de curvas integrales (véase la ecuación de Clairaut), que genera una solución formada por elementos singulares y que en cada uno de sus puntos comparte valor y derivada con una solución distinta de ella.

Ejemplo 1.39. Un modelo estándar de ecuación implícita es:

$$a_0(x, y)\{y'\}^n + a_1(x, y)\{y'\}^{n-1} + \dots a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0.$$

Tal ecuación equivale genéricamente a n ecuaciones de primer orden de la forma:

$$y' = f_i(x, y),$$

$p = f_i(x, y)$, $1 \leq i \leq n$, la i -ésima raíz de la ecuación:

$$a_0(x, y)p^n + a_1(x, y)p^{n-1} + \dots a_{n-1}(x, y)p + a_n(x, y) = 0.$$

Ejemplo 1.40. La ecuación:

$$y'^2 + (x-1)y' - y = 0.$$

Si

$$\Delta = 4y + (x-1)^2,$$

la ecuación no está definida en la región $\Delta < 0$.

En cambio, en la región $\Delta > 0$ a cada (x, y) corresponden dos elementos no singulares que tienen

$$p = \frac{(1-x) \pm \sqrt{(x-1)^2 + 4y}}{2}$$

En $\Delta = 0$ los puntos (x, y) tienen asociado un sólo elemento singular

$$p = \frac{1-x}{2}.$$

En los puntos de $\Delta > 0$ la ecuación diferencial da lugar a dos ecuaciones diferenciales:

$$y' = \frac{(1-x) \pm \sqrt{(x-1)^2 + 4y}}{2}.$$

Para integrar las ecuaciones hacemos $u = (x-1)^2 + 4y$ para concluir:

$$\sqrt{u} - C = \pm x \quad C \geq 0.$$

De ahí

$$u = (C \pm x)^2,$$

$$y = \pm \frac{(C \pm 1)}{2}x + \frac{(C^2 - 1)}{4} \quad C \geq 0.$$

Tomando $\lambda = \frac{C+1}{2} \geq \frac{1}{2}$ y $\lambda = -\frac{C-1}{2} \leq \frac{1}{2}$ podemos escribir las soluciones de manera unificada en la forma:

$$y = \lambda x + \lambda(\lambda - 1).$$

Ejemplo 1.41. La ecuación:

$$y'^2 - (x+y)y' + xy = 0$$

asocia a cada (x, y) los elementos:

$$p = \frac{(x+y) \pm |x-y|}{2}.$$

Para $x \neq y$ hay dos elementos regulares, para $x = y$ un solo elemento que es singular.

1.5.1. Parametrizaciones por la derivada

Sea:

$$x = \varphi(p) \quad y = \psi(p),$$

una parametrización regular (diferenciable) en la que p se puede expresar en términos de x

$$p = p(x) = \varphi^{-1}(x),$$

en forma regular (por ejemplo se tiene que $\dot{\varphi}(p) \neq 0$). La parametrización define entonces $y = y(x)$ mediante:

$$y(x) = \psi(p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad y(\varphi(p)) = \psi(p).$$

Se dice entonces que $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p)$ es una “parametrización por la derivada” de la curva $y = y(x)$ si:

$$y'(\varphi(p)) = p$$

para todo p , donde $y' = \frac{dy}{dx}$. Como:

$$y'(\varphi(p)) = \frac{\dot{\psi}(p)}{\dot{\varphi}(p)}.$$

entonces las parametrizaciones por la derivada se caracterizan por la identidad:

$$\frac{\dot{\psi}(p)}{\dot{\varphi}(p)} = p.$$

En la práctica, para hallar un parametrización por la derivada se despeja x en términos de p en la ecuación:

$$y'(x) = p.$$

Ejemplo 1.42. Consideramos la curva $y = \sqrt{1-x^2}$. Para hallar un parametrización por la derivada hacemos:

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = p,$$

de donde:

$$x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

1.5.2. Soluciones en el lugar singular

Típicamente, el lugar singular

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ F_p(x, y, p) = 0, \end{cases} \quad (1.30)$$

define $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p)$ en forma regular de suerte que $x = \varphi(p)$ se resuelve como una función regular $p = p(x)$ y obtenemos una función de x , $y = y(x)$ mediante la relación:

$$y(x) = \psi(p(x)).$$

La cuestión es saber si $y(x)$ es o no solución de la ecuación. En caso afirmativo $y = y(x)$ es una solución contenida en el lugar singular y por tanto *candidata* a ser una solución singular.

Se observa que para ello es suficiente con que

$$\frac{\dot{y}(p)}{\dot{x}(p)} = \frac{\dot{\psi}(p)}{\dot{\varphi}(p)} = p,$$

pues entonces $p = y'(x(p))$ y

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Por otra parte, de las ecuaciones (1.30) se tiene que una condición necesaria para que una parametrización $(x(p), y(p))$ en el lugar singular defina una solución de la ecuación es que

$$F_x + pF_y = 0. \quad (1.31)$$

Ejemplo 1.43. En la ecuación:

$$y'^2 - 2xy' + y = 0,$$

el lugar singular es $x^2 - y = 0$. Por otro lado

$$F_x + pF_y = -2p + p = p.$$

Como la expresión sólo se anula en $p = 0$ no hay soluciones en el lugar singular.

Ejemplo 1.44. En el Ejemplo 1.40 las ecuaciones del lugar singular son:

$$\begin{cases} p^2 + (x-1)p - y = 0 \\ p = \frac{1-x}{2}. \end{cases}$$

De aquí resulta:

$$x = 1 - 2p \quad y = -p^2.$$

La curva está parametrizada por la derivada porque:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = p.$$

Por tanto, la función que define:

$$y = -\frac{(x-1)^2}{4}$$

es solución. Además, todos sus elementos son singulares y por tanto constituye una integral singular.

Ejemplo 1.45. En el Ejemplo 1.41, el lugar singular es

$$\begin{cases} p^2 - 2p^2 + xy = 0 \\ p = \frac{x+y}{2}. \end{cases}$$

En forma equivalente

$$\begin{cases} xy = p^2 \\ x + y = 2p. \end{cases}$$

Tal sistema define $x = y = p$, es decir $y = x$ pero se ve inmediatamente que esta curva no está parametrizada por la derivada y por tanto no puede ser solución. En este caso la ecuación no admite integrales (soluciones) singulares.

1.5.3. Envolventes

Una noción básica cuando se trata con familias uniparamétricas

$$y = Y(x, \lambda)$$

de soluciones de la ecuación implícita $F(x, y, y') = 0$ es la de “envolvente” de dicha familia. Se intersecta una curva $y = Y(x, \lambda_0)$ de la familia con las curvas próximas $y = Y(x, \lambda)$, $\lambda \sim \lambda_0$ y se determina la posición límite de los puntos comunes cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0$. La colección de estos puntos límite conforma la envolvente de la familia. Para calcularla se resuelve:

$$\begin{cases} y = Y(x, \lambda_0) \\ \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \{Y(x, \lambda) - Y(x, \lambda_0)\} = 0. \end{cases}$$

Tomando límites cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0$ se obtiene

$$\begin{cases} y = Y(x, \lambda_0) \\ Y_\lambda(x, \lambda_0) = 0. \end{cases}$$

Si λ puede despejarse como función regular de x en la segunda ecuación, dando $\lambda = \lambda(x)$, al sustituir en la primera obtenemos la expresión de la envolvente:

$$y = g(x) = Y(x, \lambda(x)).$$

La función $\lambda(x)$ selecciona un punto de cada curva cuya reunión da lugar a la envolvente $y = g(x)$.

La envolvente toca a cada curva haciendo contacto de primer orden:

$$g'(x) = Y'(x, \lambda(x)) + Y_\lambda(x, \lambda(x))\lambda'(x) = Y'(x, \lambda(x)).$$

Como:

$$F(x, Y(x, \lambda), Y'(x, \lambda)) = 0, \quad (1.32)$$

al tomar $\lambda = \lambda(x)$ resulta:

$$F(x, g(x), g'(x)) = 0,$$

y la envolvente satisface la ecuación.

Observación 1.46. Otra manera de construir la envolvente de una familia $\{Y(x, \lambda)\}$. Se trata de encontrar una curva $y = g(x)$ que corte a cada una de las de la familia haciendo contacto de primer orden. Si (a, b) es el dominio de g esto significa que para cada $x \in (a, b)$ existe un $\lambda = \lambda(x)$ tal que:

$$g(x) = Y(x, \lambda(x)) \quad \& \quad g'(x) = Y_x(x, \lambda(x)) \quad x \in (a, b).$$

Derivando la primera con respecto a x y usando la segunda encontramos que:

$$Y_\lambda(x, \lambda(x)) = 0,$$

pues suponemos $\lambda'(x) \neq 0$ (si $\lambda(x)$ es constante siempre estaríamos en la misma curva). Asumiendo por ejemplo que $Y_{\lambda\lambda} \neq 0$ podemos usar la última ecuación para obtener $\lambda = \lambda(x)$ que al substituir en $Y(x, \lambda)$ nos da la función $g(x)$ buscada.

Por otro lado derivando la ecuación (1.32) con respecto a λ y particularizando después en la envolvente da:

$$F_y Y_\lambda + F_p Y'_\lambda = F_p Y'_\lambda = 0,$$

mientras que derivando $Y_\lambda(x, \lambda(x)) = 0$ con respecto a x nos lleva a:

$$Y'_\lambda(x, \lambda(x)) = -Y_{\lambda\lambda} \lambda'(x).$$

En condiciones normales se espera poder aplicar el teorema de la función implícita y que $\lambda = \lambda(x)$ sea una función no constante. A efectos prácticos, que el producto $Y_{\lambda\lambda} \lambda'(x) \neq 0$. Esto significa que la envolvente yace en el lugar singular.

Ejemplo 1.47. En el Ejemplo 1.40 la envolvente de la familia

$$y = \lambda x + \lambda(\lambda - 1)$$

de soluciones es:

$$y = -\frac{(x-1)^2}{4}$$

que, según vimos, es una solución singular.

Ejemplo 1.48. El que sigue es un bonito ejemplo de envolvente (cf. [9]). Un proyectil se dispara con ángulo variable α ($\lambda = \tan \alpha$) y velocidad inicial $v = \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}$. Las ecuaciones de la trayectoria son:

$$\begin{cases} x = x_0' t \\ y = y_0' t - \frac{g}{2} t^2. \end{cases}$$

Tomando $(x_0', y_0') = v(\cos \alpha, \sin \alpha)$,

$$\begin{aligned} y &= \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha} x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \lambda x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v^2} \sec^2 \alpha \\ &= \lambda x - \frac{g}{2} (1 + \lambda^2) \frac{x^2}{v^2}. \end{aligned}$$

Para calcular la envolvente eliminamos λ usando la ecuación:

$$x - \lambda g \frac{x^2}{v^2} = 0,$$

obteniendo:

$$y = \frac{1}{2gv^2} (v^4 - g^2 x^2),$$

que es lo se conoce como “parábola de seguridad”.

1.5.4. Algunas ecuaciones implícitas

Comezamos con

$$F(y') = 0. \quad (I)$$

Por ejemplo:

$$y'^3 + 3y'^2 - y' - 3 = 0.$$

Sus soluciones son de la forma:

$$y = p_0 x + C$$

donde $F(p_0) = 0$. El ejemplo admite tres familias de soluciones: $y = x + C$, $y = x - C$, $y = -3x + c$.

Un segundo tipo es:

$$F(x, y') = 0. \quad (II)$$

La opción natural es despejar y' en términos de x e integrar. En algunos casos lo que uno obtiene es:

$$x = g(y').$$

En este caso parametrizamos por la derivada p obteniendo $x = g(p)$ mientras:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = p \quad \dot{y} = p \dot{g}(p),$$

con lo que

$$y(p) = y_0 + \int_{p_0}^p t \dot{g}(t) dt.$$

Para resolver la ecuación con datos $y(x_0) = y_0$ se determina primero $p = p_0$ en la ecuación:

$$x_0 = g(p).$$

Otro camino para resolver (II) es resolver:

$$F(x, p) = 0$$

en la forma:

$$x = \varphi(t) \quad p = \psi(t).$$

En este caso:

$$y'(x) = \psi(t),$$

mientras

$$y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Despejando sale

$$\dot{y} = \psi(t)\dot{\varphi}(t),$$

luego:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t \psi(s)\dot{\varphi}(s) ds.$$

Como antes $t = t_0$ debe calcularse en $x_0 = \varphi(t)$ si pretendemos resolver $y(x_0) = y_0$.

Ejemplos 1.49.

a) $x = y'^3 - y' - 1.$

b) $x\sqrt{1 + y'^2} = y'.$

Otra clase de ecuaciones es:

$$F(y, y') = 0. \quad (III)$$

La opción natural es despejar y' en términos de y . En ocasiones es factible tener:

$$y = f(y').$$

Parametrizando por la derivada $y = f(p)$ con

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = p,$$

luego:

$$\dot{x} = \frac{\dot{f}(p)}{p},$$

en donde se puede calcular $x = x(p)$.

Alternativamente es posible que:

$$F(y, p) = 0$$

permita escribir:

$$y = \varphi(t) \quad p = \psi(t),$$

y si $y = y(x)$ buscamos representar $x(t)$. Habrá de ser:

$$y(x(t)) = \varphi(t) \quad y'(x(t)) = \psi(t).$$

Derivando en la primera con respecto a t y usando la segunda encontramos que:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \frac{\dot{\varphi}(s)}{\psi(s)} ds.$$

Si lo que pretendemos es resolver el problema de Cauchy con datos $y(x_0) = y_0$ habremos de calcular $t = t_0$ en la ecuación:

$$y_0 = \varphi(t),$$

y usar ese valor de t_0 en la expresión de $x(t)$.

Ejemplos 1.50.

a) $y = y'^5 + y'^3 + y' + 5.$

b) $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = 1.$

Más generalmente, la ecuación

$$F(x, y, y') = 0$$

se puede abordar parametrizando la superficie:

$$F(x, y, p) = 0,$$

mediante las funciones:

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v) \quad p = \chi(u, v).$$

La solución $y = y(x)$ cumple:

$$y(\varphi(u, v)) = \psi(u, v).$$

Si se supone por ejemplo que $v = v(u)$ obtenemos al derivar con respecto a u :

$$y'(\varphi(u, v))(\varphi_u + \varphi_v \dot{v}) = \psi_u + \psi_v \dot{v},$$

que junto con

$$y'(\varphi(u, v)) = \chi(u, v),$$

da:

$$\dot{v} = \frac{\psi_u - \chi \varphi_u}{\chi \varphi_v - \psi_v} = -\frac{\chi \varphi_u - \psi_u}{\chi \varphi_v - \psi_v}.$$

Una versión más sencilla de este cálculo consiste en suponer que

$$F(x, y, p) = 0$$

define $x = \varphi(p)$, $y = \psi(p)$. Si tal parametrización permite escribir $y = y(x)$ entonces

$$y(\varphi(p)) = \psi(p).$$

Para que $y(x)$ defina una solución de

$$F(x, y, y') = 0,$$

debe cumplirse que

$$y'(\varphi(p)) = p.$$

Esto requiere según se ha dicho que

$$\dot{\psi} = p\dot{\varphi}.$$

En ecuaciones como:

$$y = G(x, y') \quad (IV)$$

basta obtener $x = x(p)$ para determinar una solución de la ecuación. Derivando con respecto a p e imponiendo $\dot{y} = p\dot{x}$ obtenemos:

$$\dot{x} = \frac{G_p}{p - G_x}.$$

Se procede exactamente igual si la ecuación adopta la forma:

$$x = H(x, y'). \quad (V)$$

En este caso la ecuación para $y = y(p)$ es:

$$\dot{y} = \frac{pH_p}{1 - pH_y}.$$

Un caso particular de la primera es la ecuación de *Lagrange*:

$$y = xf(y') + g(y')$$

que da lugar a la ecuación lineal en $x(p)$:

$$\dot{x} = \frac{\dot{f}}{f(p) - p}x + \frac{\dot{g}}{f(p) - p}.$$

Para resolver el problema de Cauchy:

$$y = xf(y') + g(y') \quad y(x_0) = y_0$$

se calcula primero $p = p_0$ en la ecuación

$$y_0 = x_0f(p) + g(p).$$

Una vez hallado p_0 se resuelve:

$$\dot{x} = \frac{\dot{f}}{f(p) - p}x + \frac{\dot{g}}{f(p) - p} \quad x(p_0) = x_0.$$

El procedimiento falla si

$$f(p_0) = p_0$$

porque la ecuación es singular en p_0 . En este caso, no obstante

$$y = p_0x + g(p_0)$$

es la solución buscada.

En cuanto a soluciones singulares, el lugar singular es:

$$\begin{cases} y = xf(p) + g(p) \\ 0 = x\dot{f}(p) + \dot{g}(p). \end{cases}$$

Si tal sistema define $x = x(p)$, $y = y(p)$ entonces

$$\dot{y} = \dot{x}f + x\dot{f} + \dot{g} = \dot{x}f.$$

Tal parametrización define una solución sólo cuando

$$f(p) = p$$

para cada p . Este caso especial de la ecuación de Lagrange se conoce como la ecuación de *Clairaut*:

$$y = xy' + g(y').$$

Admite como soluciones (ver más arriba) a la familia de rectas:

$$y = \lambda x + g(\lambda).$$

Genéricamente, el lugar singular contiene como hemos visto una solución. Ésta constituye la envolvente de la familia de rectas.

1.5.5. Ejercicios

1. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'^2 - (2x + y)y' + (x^2 + xy) = 0$

b) $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

c) $y'^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$

d) $y'^3 + (x + 2)e^y = 0$

e) $y'^3 - yy'^2 - x^2y' + x^2y = 0.$

2. Parametrícense las curvas siguientes usando la derivada y' como parámetro:

a) $y = x^3$

b) $y = \operatorname{sen} x$.

3. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y = y'^2 e^{y'}$

b) $y = e^{\frac{y'}{y}}$

c) $x = \log y' + \operatorname{sen} y'$

d) $x = y'^2 - 2y' + 2$

e) $y = (y' - 1)e^{y'}$

f) $x(1 + y'^2)^{3/2} = a$

g) $y^{2/5} + y'^{2/5} = a^{2/5}$.

h) $y^4 - y'^4 - yy'^2 = 0$

i) $x = y' + \operatorname{sen} y'$

j) $y = y'(1 + y' \cos y')$.

4. Discútanse en detalle las propiedades de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Clairaut:

$$y = xy' + e^{y'}.$$

5. Estúdiese la existencia de solución singular para las siguientes ecuaciones:

a) $y = 2xy' - y'^2$.

b) $y'^2 + y^2 = 4$.

c) $y = 5xy' - y'^2$.

d) $(y' - 2)^3 = x - 5y$.

6. Estudiar la existencia de una solución singular de la ecuación de Lagrange:

$$x - y = \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3.$$

7. Estudiar las ecuaciones:

a) $y'^3 - e^{2x}y' = 0$.

b) $y = x^2 + 2y'x + \frac{y'^2}{2}$.

c) $y'^2 + (x + a)y' - y = 0$ donde a es una constante.

d) $y'^2 - 2xy' + y = 0$.

e) $y'^2 + 2yy' \cot x - y^2 = 0$.

1.5.6. Algunas soluciones

- **Solución del Ejercicio 5.**

a) No tiene soluciones singulares. La condición de singularidad da:

$$x = p \quad y = p^2$$

mientras:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2p.$$

Estas relaciones no parametrizan una solución, es decir el parámetro p no es la derivada.

b) La condición de singularidad da:

$$p^2 + y^2 = 4, \quad p = 0,$$

luego las posibles soluciones singulares son

$$y = \pm 2.$$

Integrando la ecuación con

$$p = 2 \cos t \quad y = 2 \sin t,$$

uno obtiene la familia de soluciones

$$y = 2 \sin(x + C),$$

por lo que las rectas $y = \pm 2$ son envolventes de dicha y por tanto son genuinas soluciones singulares.

c) No tiene soluciones singulares por razones análogas al caso b).

d) La condición de singularidad implica que $p = 2$ luego

$$y = 2x + C.$$

Es inmediato comprobar que ninguna recta de esa forma cumple $5y - x = 0$.

- **Solución del Ejercicio 6.** El lugar singular es:

$$\begin{cases} x - y = \frac{4}{9}p^2 - \frac{8}{27}p^3 \\ p(p - 1) = 0. \end{cases}$$

Para $p = 0$, $y = x$ que no es solución mientras que

$$y = x + \frac{8}{27} - \frac{4}{9},$$

correspondiente a $p = 1$ sí es solución. Las demás soluciones se representan como:

$$x = \frac{4}{9}p^2 + \lambda \quad y = \frac{8}{27}p^3 - \lambda,$$

y se obtienen de

$$x - y = \frac{4}{9}p^2 - \frac{8}{27}p^3$$

tras derivar con respecto a p y hacer $\dot{y} = p\dot{x}$.

Capítulo 2

Existencia y Unicidad. Prolongación

2.1. Herramientas auxiliares. Teorema de Banach

2.1.1. Preliminares

Los resultados de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales tienen por escenario ciertos espacios métricos de funciones. La métrica de estos espacios procede de una norma y el espacio resultante es completo. Es conveniente, por tanto, recapitular algunos hechos básicos sobre el tema.

Si X es un espacio vectorial real o complejo se dice que una aplicación $|\cdot| : X \rightarrow [0, +\infty)$ es una norma en X si

- a) $|x| = 0$ implica $x = 0$,
- b) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ para λ real o complejo y x cualesquiera,
- c) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para $x, y \in X$ arbitrarios.

Una norma $|\cdot|$ induce la métrica $d(x, y) = |x - y|$.

Si el espacio resultante es completo se dice que $(X, |\cdot|)$ es un espacio de Banach.

Definición 2.1. Se dice que dos normas $|\cdot|_a$ y $|\cdot|_b$ en el espacio X son equivalentes si cualquier sucesión x_n convergente en $(X, |\cdot|_a)$ también es convergente en $(X, |\cdot|_b)$ al mismo límite y recíprocamente.

Teorema 2.2. Dos normas $|\cdot|_a$ y $|\cdot|_b$ son equivalentes si y sólo si existen constantes positivas k, K tales que $k|x|_a \leq |x|_b \leq K|x|_a$ para todo $x \in X$.

Por poner ejemplos conocidos, $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Banach con cualquiera de las normas $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ o $|\cdot|_\infty$ donde $|x|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$, $|x|_2^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $|x|_\infty = \max |x_i|$. Las tres normas (y cualquier otra concebible en $\mathbb{C}^n$) son equivalentes.

Es un buen ejercicio encontrar las constantes k, K que corresponden a las tres normas señaladas.

Entre los espacios de dimensión infinita que usaremos aquí destaca $X = C(I, \mathbb{R}^n)$, $I = [a, b]$, el espacio de las funciones $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ que son continuas en I .

Teorema 2.3. *El espacio $X = C(I, \mathbb{R}^n)$ es de Banach con respecto a la norma $|x|_\infty = \sup_I |x(t)|$. Además:*

- a) *La sucesión $x_n(t)$ converge a $x(t)$ en X si y sólo si $x_n \rightarrow x$ uniformemente en I .*
- b) *La sucesión $x_n(t)$ es de Cauchy en X si y sólo si $x_n \rightarrow x$ satisface la condición de Cauchy uniformemente en I .*

Definición 2.4. *Para $\alpha > 0$ se define la norma de Bielecki $|\cdot|_{\infty, \alpha}$ en $C(I, \mathbb{R}^n)$ como:*

$$|x|_{\infty, \alpha} = \sup_{t \in [a, b]} e^{-\alpha(t-a)} |x(t)|.$$

Teorema 2.5. *La norma de Bielecki $|\cdot|_{\infty, \alpha}$ es equivalente a la norma del supremo $|\cdot|_\infty$ en el espacio $X = C(I, \mathbb{R}^n)$.*

Proposición 2.6. *Sean $(X, |\cdot|)$, $(Y, |\cdot|)$ son espacios normados y $L : X \rightarrow Y$ es una aplicación lineal. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

- a) *L es continua en $x = 0$,*
- b) *L es continua en X ,*
- c) *L está acotada en cualquier bola $B(x, R)$ de X .*

Observación 2.1. Todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$ son continuas. Sólo cuando X e Y tienen dimensión infinita existen aplicaciones lineales que no son continuas.

De c) se sigue que si L es continua entonces $\sup_{|x| \leq 1} |L(x)| < \infty$. Denotando $\mathcal{L}(X, Y)$ el espacio de las aplicaciones lineales y *continuas* de X a Y puede probarse que

$$\|L\| := \inf\{K > 0 : |L(x)| \leq K|x| \text{ para todo } x \in X\},$$

constituye una norma en $\mathcal{L}(X, Y)$. Se comprueba fácilmente que

$$\|L\| = \sup_{|x| \leq 1} |L(x)| = \sup_{|y|=1} |L(y)|.$$

En el caso de aplicaciones lineales escribiremos con frecuencia Lx en lugar de $L(x)$.

Para $X = Y$ denotamos $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Proposición 2.7. *Si $(X, |\cdot|)$ es un espacio de Banach entonces $(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|)$ también es un espacio de Banach. Se cumplen además las siguientes propiedades:*

a) Si $L \in \mathcal{L}(X)$

$$|L(x)| \leq \|L\| |x|,$$

para todo $x \in X$.

b) Para $T, L \in \mathcal{L}(X)$ cualesquiera se tiene que:

$$\|T \circ L\| \leq \|T\| \|L\|,$$

El siguiente resultado de cálculo diferencial para funciones de varias variables resulta de suma utilidad.

Propiedad 2.8 (Teorema de los incrementos finitos). Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, una aplicación de clase C^1 mientras $x, y \in \Omega$ son tales que el segmento $[x, y] \subset \Omega$. Entonces:

$$|F(x) - F(y)| \leq \sup_{z \in [x, y]} \|DF(z)\| |x - y|.$$

Demostración. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ existe una aplicación lineal $l : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|l\| = 1$ y

$$l(F(x) - F(y)) = |F(x) - F(y)|.$$

Se construye la función real $g(t) = l(F(x + t(y - x)))$. Existe entonces $c \in (0, 1)$ tal que:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= |g(1) - g(0)| = |g'(c)| = \\ &= |l(DF(x + c(y - x)))(y - x)| \leq \|l(DF(x + c(y - x)))\| |y - x|. \end{aligned}$$

Como

$$\|l(DF(x + c(y - x)))\| \leq \sup_{z \in [x, y]} \|DF(z)\|,$$

concluimos el resultado. $\square$

Observación 2.2. La existencia de la forma lineal l es inmediata en espacios de dimensión finita. Para el caso general ver [1], Capítulo I. Usando esta información la propiedad se extiende a funciones $F : X \rightarrow Y$, X, Y espacios de Banach.

2.1.2. Puntos fijos

La literatura sobre puntos fijos de aplicaciones es considerablemente abundante. Aquí nos limitaremos a los resultados básicos (ver [4] y el artículo “Puntos Fijos” en [5]).

Definición 2.9. Sean (X, d) un espacio métrico y $T : X \rightarrow X$ una aplicación. Se dice que T es contractiva o que T es una contracción en X si existe un $0 \leq \theta < 1$ tal que para $x, y \in X$ cualesquiera se cumple:

$$d(T(x), T(y)) \leq \theta d(x, y).$$

Se llama a θ la constante de contracción.

Definición 2.10. Sea $T : X \rightarrow X$ una aplicación en un conjunto X . Se dice que $x \in X$ es un punto fijo de T (también un punto de equilibrio) si $T(x) = x$.

Teorema 2.11 (Teorema del punto fijo de Banach). Sea (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una aplicación contractiva de constante θ . Entonces T admite un único punto fijo $\bar{x}$ en X . Además,

1. Para cada $x_0 \in X$ se tiene que $\bar{x} = \lim T^n(x_0)$, mientras que para $x \in X$, $n, h \in \mathbb{N}$ arbitrarios se satisface:

$$d(T^{n+h}(x), T^n(x)) \leq \theta^n \frac{1 - \theta^h}{1 - \theta} d(T(x), x).$$

2. Para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$d(T^n(x_0), \bar{x}) \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} d(T(x_0), x_0).$$

Una ligera extensión de este resultado que tiene cierto interés es la siguiente.

Teorema 2.12 ([10]). Sea X un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una aplicación *continua* con la propiedad de que una iteración suya $T^k = T \circ \overset{k}{\dots} \circ T$ es contractiva. Entonces T admite un único punto fijo $\bar{x}$. Además,

$$\bar{x} = \lim T^n(x_0), \quad (2.1)$$

donde x_0 es un elemento arbitrario de X .

Observación 2.3. La hipótesis de continuidad en T sólo se usa para establecer la convergencia (2.1).

Definición 2.13 ([10]). Sean (Y, d) un espacio métrico y X un conjunto. La aplicación $T = T(x, y)$, $T : X \times Y \rightarrow Y$, se denomina una *contracción uniforme* en Y con respecto a $x \in X$ si existe θ independiente de x , $0 \leq \theta < 1$, tal que

$$d(T(x, y_1), T(x, y_2)) \leq \theta d(y_1, y_2),$$

para $y_1, y_2 \in Y, x \in X$ cualesquiera.

Teorema 2.14. Sean X e Y espacios métricos, Y completo, $T : X \times Y \rightarrow Y$ una contracción uniforme en Y con respecto a $x \in X$ de suerte que para cada $y_0 \in Y$ la aplicación $x \mapsto T(x, y_0)$ es continua de X en Y . Si para cada $x \in X$, $y = g(x)$ designa el punto fijo de la aplicación $T_x : Y \rightarrow Y$ dada por $T_x(y) = T(x, y)$, entonces

$$\begin{array}{ccc} g : & X & \longrightarrow Y \\ & x & \longmapsto y = g(x) \end{array}$$

es continua.

El teorema de la función implícita (Capítulo I) es sin duda la consecuencia más importante del teorema del punto fijo de Banach.

Teorema 2.15. Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, U abierto, una aplicación de clase C^1 . Supongamos que existe (x_0, y_0) tal que:

i) $F(x_0, y_0) = 0$,

ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ es invertible.

Entonces existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ positivos y $g : \overline{B}_{\varepsilon_1}(x_0) \rightarrow \overline{B}_{\varepsilon_2}(y_0)$ de clase C^1 tales que:

1) $y_0 = g(x_0)$ y además

$$F(x, g(x)) = 0,$$

para cada $x \in \overline{B}_{\varepsilon_1}(x_0)$.

2) Si $(x, y) \in \overline{B}_{\varepsilon_1}(x_0) \times \overline{B}_{\varepsilon_2}(y_0)$ y

$$F(x, y) = 0,$$

entonces

$$y = g(x).$$

Demostración. Sea (x_0, y_0) el punto de referencia y $L_0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$, que es una aplicación invertible lineal invertible. La ecuación:

$$F(x, y) = 0,$$

es equivalente a:

$$y - L_0^{-1}F(x, y) = y.$$

Es por ello razonable definir en $\overline{B}_{\varepsilon_1}(x_0) \times \overline{B}_{\varepsilon_2}(y_0)$ (aquí $X = \overline{B}_{\varepsilon_1}(x_0)$, $Y = \overline{B}_{\varepsilon_2}(y_0)$), bajo elecciones adecuadas de ε_1 y ε_2) la aplicación:

$$T_x(y) = T(x, y) = y - L_0^{-1}F(x, y).$$

Una solución y de la ecuación $F(x, y) = 0$ define un punto fijo y de la aplicación $T_x(y) = T(x, y)$.

Que T constituye una contracción uniforme es consecuencia de $\partial_y T(x_0, y_0) = 0$ junto con la continuidad de dicha derivada (véase Teorema 2.8, de los incrementos finitos). Esto permite fijar $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tal que

$$\|\partial_y T(x, y)\| \leq \theta < 1$$

para todo $(x, y) \in \overline{B}_{\varepsilon_1}(x_0) \times \overline{B}_{\varepsilon_2}(y_0)$. En segunda instancia corregimos ε_1 para lograr que $\overline{B}_{\varepsilon_2}$ resulte invariante por T_x . En efecto, para $y \in \overline{B}_{\varepsilon_2}(y_0)$ con x fijo en $\overline{B}_{\varepsilon_1}(x_0)$,

$$\begin{aligned} |T_x(y) - y_0| &\leq |T(x, y) - T(x, y_0)| + |T(x, y_0) - T(x_0, y_0)| \\ &\leq \theta \varepsilon_2 + \sup_{B_{\varepsilon_1}(x_0)} |T(x, y_0) - T(x_0, y_0)| \end{aligned}$$

Basta reducir ε_1 adecuadamente de forma que:

$$\sup_{B_{\varepsilon_1}(x_0)} |T(x, y_0) - T(x_0, y_0)| \leq (1 - \theta)\varepsilon_2.$$

□

El teorema precedente establece la existencia, unicidad y continuidad de la función implícita $y = g(x)$ cuando se realizan las elecciones señaladas. La prueba de la diferenciabilidad es un poco más complicada (véase [2] o el Anexo al final de este Capítulo).

Anexo

Probamos la diferenciabilidad de la función g en el Teorema 2.15 (de la función implícita). Todo se reduce a establecer la siguiente mejora del Teorema 2.14.

Teorema 2.16. *En las condiciones del Teorema 2.14 supóngase que $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$ y que además T es una aplicación de clase C^1 . Entonces, el punto fijo $y = g(x)$ es continuamente diferenciable con respecto a x .*

Demostración. Fijamos $x \in \mathbb{R}^n$ tomamos $h \in \mathbb{R}^n$, hemos de probar que

$$g(x + h) = g(x) + L(h) + o(|h|),$$

para cierta aplicación lineal $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ donde $o(|h|)$ representa una aplicación que cumple:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|h|)}{|h|} = 0.$$

Llamamos

$$\Delta g = g(x + h) - g(x),$$

usando que $y = g(x)$ es punto fijo de $T(x, y)$ para todo x resulta:

$$\Delta g = T(x + h, \Delta g + g(x)) - T(x, g(x)) = T_x(h) + T_y(\Delta g) + o(|h| + |\Delta g|)$$

donde hemos abreviado:

$$T_x = \frac{\partial T}{\partial x}(x, g(x)), \quad T_y = \frac{\partial T}{\partial y}(x, g(x)).$$

Se tiene ahora que (Ejercicio 2.1).

$$\|T_y\| \leq \theta.$$

En consecuencia, la aplicación lineal $I - T_y$ (I es la identidad de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$) es invertible (Ejercicio 2.2).

De la identidad para Δg obtenemos:

$$(I - T_y)(\Delta g) = T_x(h) + o(|h| + |\Delta g|).$$

Aplicando $(I - T_y)^{-1}$ a los dos miembros, poniendo

$$L := (I - T_y)^{-1}T_x$$

y observando que:

$$o(|h| + |\Delta g|) = (|h| + |\Delta g|)o(1),$$

donde $o(1)$ es una función que tiende a cero cuando $|h| + |\Delta g| \rightarrow 0$, concluimos que:

$$\Delta g = L(h) + (|h| + |\Delta g|)o(1).$$

En primera instancia, esta identidad prueba que $|\Delta g| \leq C|h|$ para cierta constante C cuando $|h| \leq R$. Por tanto,

$$(|h| + |\Delta g|)o(1) = o(|h|)$$

cuando $|h| \rightarrow 0$ y al ser

$$\Delta g = L(h) + o(|h|)$$

resulta que g es derivable con diferencial L . □

Ejercicio 2.1. Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable para la que existe $M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Demuéstrese que su diferencial $Df(x)$ cumple

$$\|Df(x)\| \leq M.$$

Ejercicio 2.2. Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ una aplicación lineal con norma

$$\|L\| < 1.$$

Si I designa la aplicación identidad en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ demuéstrese que

$$I - L$$

es una aplicación invertible.

Indicación. Pruébese que 1 no puede ser un autovalor de L .

2.1.3. Ejercicios

1. Pruébese que $f(x) = x^3$ es Lipschitziana en $[0, 1]$ ¿Es Lipschitziana en $\mathbb{R}$?
2. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 . Demuéstrese que una condición necesaria y suficiente para que f sea Lipschitziana en (a, b) es que su derivada esté acotada.

3. Estúdiense si las siguientes funciones f verifican alguna condición de Lipschitz local o global respecto a x :

a) $f(t, x) = 1 + x^2$

b) $f(t, x) = 1 + t^2$

c) $f(t, x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

4. Demuéstrese que $f(x) = x^{1/3}$ no es localmente lipschitziana en $[-1, 1]$.

5. Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase C^1 que es Lipschitziana de constante L en un abierto G . Pruébese que

$$\|Df(x)\| \leq L,$$

para todo $x \in G$.

6. Demostrar que existe una única función continua $f \in C[0, 1]$ que para cada $t \in [0, 1]$ satisface la identidad:

$$f(t) = \frac{1}{3} \int_0^t s^2 \sin f(s) \, ds.$$

Hállese dicha función.

7. Se considera $X = C[a, b]$ con su norma natural y la aplicación $T : X \rightarrow X$ dada por

$$T(f)(t) = L \int_a^t f(s) \, ds.$$

Donde L es una constante positiva.

- a) Pruébese que

$$T^k(f)(t) = L^k \int_a^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} f(s) \, ds.$$

- b) ¿Bajo qué condiciones es T contractiva?

- c) Demostrar que existe k tal que T^k es contractiva.

- d) ¿Cuál es el punto fijo de T ?

8. Determinar λ para que $f(x) = x + \lambda(2 - x - \tanh x)$ sea contractiva en $\mathbb{R}$.

9. Se considera $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log(e^x + 1)$ ¿Es una contracción?
¿Admite un punto fijo?

10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $0 < k_1 \leq f'(x)$ para $x \in [a, b]$ mientras $f(a) < 0 < f(b)$.

- a) Probar que f posee un único cero en (a, b) .

- b) Dése un método iterativo para calcular dicho cero.

Indicación. Considérese $T(x) = x - \lambda f(x)$ donde λ es un parámetro.

2.2. Teoremas de existencia, unicidad y prolongación. Teorema de Picard-Lindelöf

A lo largo del capítulo supondremos que la función “segundo miembro” (el campo) $f = f(t, x)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, es por lo menos continua.

Lema 2.17. Sean $(t_0, x_0) \in \Omega$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo a cuyo interior pertenece t_0 . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $(x, I)^1$ es una solución del problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

ii) $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$ satisface

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds,$$

para cada $t \in I$.

2.2.1. Problemas en bandas

Teorema 2.18 (Teorema de Picard-Lindelöf). Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y Lipschitziana en x , es decir, existe $L \geq 0$, tal que para $(t, x), (t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ arbitrarios se tiene,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Entonces el problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

admite una única solución definida en todo el intervalo $[a, b]$.

Observación 2.4. Si f es continua y admite derivadas parciales $\partial f / \partial x_i$, $1 \leq i \leq n$, que son continuas, no resulta difícil demostrar que f es Lipschitz con respecto a x en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ si y sólo si tales derivadas están acotadas en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$.

Observación 2.5. Bajo las mismas hipótesis el teorema es cierto si la función f toma valores en $\mathbb{C}^N$.

¹Se recuerda que (x, I) es una solución de (P) si $x = x(t)$ es diferenciable en I , satisface la ecuación y $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$.

Corolario 2.19 (El dato (t_0, x_0) se toma libremente). *En las condiciones del Teorema 2.18, el problema*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

admite una única solución definida en todo el intervalo $[a, b]$, cualquiera que sea el punto $(t_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$.

Corolario 2.20 (Prolongación). *En las condiciones del Teorema 2.18, sea (x, I) una solución arbitraria de (2.4), por tanto con $I \subset [a, b]$ en principio distinto de $[a, b]$. Entonces (x, I) admite una única prolongación al intervalo $[a, b]$.*

Corolario 2.21 (Existencia global, intervalos abiertos). *Sea $f : (a_1, a_2) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación continua tal que para todo intervalo $[a, b] \subset (a_1, a_2)$ existe L (en principio dependiente del intervalo $[a, b]$) tal que f es Lipschitziana con respecto a x en $[a, b] \times \mathbb{R}^N$:*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|,$$

$\forall (t, x), (t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}^N$. Entonces, para todo $(t_0, x_0) \in (a_1, a_2) \times \mathbb{R}^N$ el problema (2.4) admite una única solución $x(t)$ definida en todo el intervalo (a_1, a_2) .

Observación 2.6. El último enunciado es de **capital** importancia en las aplicaciones. Es válido en cualquier tipo de intervalo (a_1, a_2) , por ejemplo $\mathbb{R}$, $(-\infty, a_2)$ o (a_1, ∞) . Para dar más énfasis destacamos aparte un caso particular.

Corolario 2.22. *Sea $f : [a, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua de forma que para cada $t_1 \geq a$, f es Lipschitziana con respecto a x en la banda $[a, t_1] \times \mathbb{R}^n$ con una constante de Lipschitz finita $L > 0$ (que en general dependerá de t_1). Entonces, para cada $(t_0, x_0) \in [a, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ el problema:*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución que está definida en $[a, +\infty)$.

Obsérvese que las condiciones de los Corolarios 2.21 y 2.22 se cumplen en particular cuando para cada $t \geq a$, la función $f(t, x)$ es Lipschitz en x :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L(t)|x - y| \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

y la constante de Lipschitz $L(t)$ se mantiene acotada en intervalos acotados. Así en relación con el resultado precedente la constante L se puede tomar en el intervalo $[a, t_1]$ como

$$L = \sup_{a \leq t \leq t_1} L(t).$$

Observación 2.7. A la vista del Corolario 2.22 ¿qué sucede con la ecuación $x' = x^2$?

El espacio de las matrices complejas $M_{N \times N}(\mathbb{C})$ admite, como espacio vectorial de dimensión finita, una infinidad de normas, todas ellas equivalentes. Por ejemplo, para $A = (a_{ij})$:

$$\|A\|_{\infty} = \max |a_{ij}|.$$

Por otro lado, si $|\cdot|$ es cualquier norma en $\mathbb{C}^N$ entonces

$$\|A\| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax|$$

es otra norma en $M_{N \times N}(\mathbb{C})$. Cumple las propiedades:

- a) $|Ax| \leq \|A\||x|$ para todo $x \in \mathbb{C}^N$,
- b) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ para $A, B \in M_{N \times N}(\mathbb{C})$,
- c) $|\|A\| - \|B\|| \leq \|A - B\|$.

En la siguiente propiedad se considera a $M_{N \times N}(\mathbb{C})$ como espacio normado con ésta última norma, por ejemplo.

Lema 2.23. *Una aplicación $A : [a, b] \rightarrow M_{N \times N}(\mathbb{C})$, $t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))$ es continua si y sólo si todas sus componentes son continuas. Además $t \mapsto \|A(t)\|$ también es continua.*

Corolario 2.24. *Se considera el problema lineal:*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en donde $b : (a_1, a_2) \rightarrow \mathbb{C}^n$, $b(t) = (b_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ y $A : (a_1, a_2) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$, $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ las matrices reales $n \times n$, son funciones continuas en un cierto intervalo $(a_1, a_2) \subset \mathbb{R}$, en el sentido de que todas las componentes a_{ij}, b_i son continuas en dicho intervalo. Entonces, para cada $t_0 \in (a_1, a_2)$ y $x_0 \in \mathbb{C}^n$ el problema precedente admite una única solución $x(t)$ definida en la totalidad del intervalo (a_1, a_2) .

2.2.2. Método de las aproximaciones sucesivas

En el Teorema 2.18 (Picard-Lindelöf) la solución $x(t)$ es el límite uniforme en $[a, b]$ de la sucesión de funciones $x_n(t) = T(x_{n-1})(t)$,

$$T(y)(t) = x_0 + \int_a^t f(s, y(s)) ds \quad y \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n),$$

donde $x_0(t) = x_0$. Obsérvese que $x_n(t)$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x_{n-1}(t)) \\ x(a) = x_0. \end{cases}$$

Por esa razón se llama método de las aproximaciones sucesivas a la obtención de $x(t)$ como límite de las funciones $x_n(t)$. El teorema de Picard-Lindelöf asegura que si $f(t, x)$ es Lipschitz en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ entonces $x_n(t)$ converge hacia la única solución del problema.

Aunque no estemos estrictamente en las condiciones del Teorema 2.18 vamos a calcular las primeras aproximaciones de la solución del problema:

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Empezando por $x_0(t) = x_0$, $x'_1 = x_0^2$ y $x_1(0) = x_0$. Por tanto $x_1 = x_0 + x_0^2 t$. Análogamente, $x'_2 = x_1^2$, $x_2(0) = x_0$, es decir $x_2(t) = x_0 + (x_0/3)\{(1+x_0 t)^3 - 1\}$. Similarmente se hallan x_3, x_4 , etc.

La convergencia de las iteraciones se puede garantizar en situaciones más generales (y menos restrictivas) que las del Teorema 2.18. Sin embargo, la mera continuidad de $f(t, x)$ no basta para la convergencia del método de las aproximaciones sucesivas. Esto se evidencia con el siguiente ejemplo.

Observación 2.8 (Ejemplo, Müller (1927)). Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función (no Lipschitziana):

$$f(t, x) = \begin{cases} -2t & \text{si } x \geq t^2 \\ (-2t)\lambda + (2t)(1-\lambda) & \text{si } (t, x) = \lambda(t, t^2) + (1-\lambda)(t, 0) \\ 2t & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Se tiene entonces que la sucesión de aproximaciones del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

no converge siquiera puntualmente.

Otro ejemplo similar se recoge en el Ejercicio 6.

2.2.3. Teorema de Picard-Lindelöf. Versiones local y global

En los enunciados que siguen $\overline{Q}(h, R, t_0, x_0)$ designa el conjunto:

$$[t_0 - h, t_0 + h] \times \overline{B}_R(x_0) \quad h > 0, R > 0,$$

abreviadamente $\overline{Q}$ en algunos casos. Denotamos también $\overline{Q}^+ = \overline{Q} \cap \{t \geq t_0\}$, $\overline{Q}^- = \overline{Q} \cap \{t \leq t_0\}$. Se suele llamar a $\overline{Q}$ un “tonel” o una “caja” en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.25. *Sea $f : \overline{Q} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\overline{Q} = \overline{Q}(h, R, t_0, x_0)$, continua y Lipschitziana en $\overline{Q}$ con respecto a x , es decir, existe $L \geq 0$ tal que para cada $(t, x), (t, y) \in \overline{Q}$*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|,$$

mientras designamos:

$$M = \sup_{\bar{Q}} |f|.$$

Entonces el problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

admite una única solución maximal $x(t)$ que está definida **al menos** en el intervalo $I_1 = [t_0 - \min\{h, \frac{R}{M}\}, t_0 + \min\{h, \frac{R}{M}\}]$.

Se emplea la siguiente propiedad.

Proposición 2.26. Sean B la bola cerrada $B = \{|x| \leq R\}$ y $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitziana de constante L . Se define la extensión a $\mathbb{R}^n$:

$$F(x) = f(\bar{x}),$$

donde

$$\bar{x} = R \frac{x}{|x|}.$$

Entonces F también es Lipschitziana con la misma constante L .

Demostración del teorema 2.25. Se considera la extensión Lipschitziana de $\bar{f}$ de f a $[t_0 - h, t_0 + h] \times \mathbb{R}^n$ y el problema auxiliar

$$\begin{cases} y' = \bar{f}(t, y) & t \in [t_0 - h, t_0 + h] \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Admite una única solución $y(t)$ definida en $I_h = [t_0 - h, t_0 + h]$. Existe el mayor intervalo $J = [t_1, t_2] \subset I_h$ tal que $(t, y(t)) \in \bar{Q}$ para $t \in J$. A la vista del Teorema 2.18 y corolarios se sabe que toda solución (x, I) de (2.5) cumple $I \subset J$ con $x = y$ en I . Por tanto (y, J) es la solución maximal de (2.5) y se trata de estimar J (lógicamente es difícil determinar una expresión “cerrada” para J).

Pueden darse dos situaciones: o bien $t_2 = t_0 + h$ o bien $t_2 < t_0 + h$ en cuyo caso $|y(t_2) - x_0| = R$ de donde

$$R = |y(t_2) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t_2} |f(s, y(s))| ds \leq M(t_2 - t_0)$$

y resulta $t_2 \geq t_0 + \frac{R}{M}$. En ambos casos

$$t_2 \geq t_0 + \min\{h, \frac{R}{M}\}.$$

El razonamiento simétrico establece que

$$t_1 \leq t_0 - \min\{h, \frac{R}{M}\}$$

y la solución y está definida al menos en el intervalo (de “seguridad”)

$$t_0 - \min\{h, \frac{R}{M}\} \leq t \leq t_0 + \min\{h, \frac{R}{M}\}.$$

□

Observación 2.9. Se desprende de la demostración que si, por ejemplo,

$$t_0 + \frac{R}{M} > t_0 + h,$$

entonces $|x(t) - x_0| < R$ para todo $t_0 \leq t \leq t_0 + h$.

Se dice que una función $f = f(t, x)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *localmente Lipschitziana* en Ω con respecto a x si, para cada (t_0, x_0) existen $R > 0$, $h > 0$ y $L \geq 0$ (que en general dependen del punto (t_0, x_0)) tales que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

para cada $(t, x), (t, y) \in \bar{Q} = [t_0 - h, t_0 + h] \times \bar{B}_R(x_0)$.

Como ejemplo, recuérdese que una función continua $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que las derivadas $\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n$ existen y son continuas en Ω (¡pero no necesariamente acotadas en Ω !), es también localmente Lipschitziana con respecto a $x \in \Omega$.

Teorema 2.27 (Teorema de Picard-Lindelöf: versión global). *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, localmente Lipschitz en Ω con respecto a x , mientras $(t_0, x_0) \in \Omega$ es arbitrario. Entonces el problema:*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene la propiedad de unicidad de soluciones. Además admite una única solución maximal (o solución global) (x, I) en el sentido de que si (y, J) es cualquier otra solución de (P) entonces $J \subset I$, $x|_J = y$. Además, I es un intervalo abierto (α, ω) .

En el lenguaje de las ecuaciones (y, J) se denomina una solución local. El teorema afirma la existencia de una única solución x que es la extensión común de todas las posibles soluciones de (P). En otras palabras, todas las soluciones locales y son en realidad restricciones de la solución global x .

2.2.4. Ejercicios

1. ¿Se puede aplicar el teorema de Picard-Lindelöf a la ecuación

$$y' = y + \sqrt{|x|},$$

en alguna banda de la forma $[a, b] \times \mathbb{R}$?

2. Aplíquese el método de aproximaciones sucesivas a los problemas:

$$(a) \quad \begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$

$$(b) \quad \begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$

$$(c) \quad \begin{cases} x' = -x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$

3. Determinar por el método de aproximaciones sucesivas la solución de la ecuación diferencial

$$y' = 2y(1 + x)$$

que verifica $y(-1) = 1$.

4. Considérese el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- a) Aplicar el método de aproximaciones sucesivas y calcular $y_4(t)$.
 - b) Demostrar que las aproximaciones $y_n(t)$ están definidas en $\mathbb{R}$.
 - c) Resolver el problema de valor inicial para probar que la solución sólo está definida en el $(-\pi/2, \pi/2)$.
5. Dése una estimación del error cometido cuando se utiliza la función k -ésima $x_k(t)$ obtenida por el método de las aproximaciones sucesivas en el intervalo $[a, b]$ para el problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Como aplicación hállese dicho error para el problema,

$$\begin{cases} x' = t - x \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

estimando la diferencia $|x(0'2) - x_k(0'2)|$.

6. (W. Walter, “Ordinary Differential Equations”, Springer, 2000). Se considera el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2t - 2\sqrt{y_+} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

donde y_+ es la parte positiva de y , $y_+ = (y + |y|)/2$. Probar que la sucesión de soluciones aproximadas y_n del método de aproximaciones sucesivas no es convergente.

7. Estúdiense los dominios de existencia maximal de las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x' = \frac{1}{t} \sin(x + t^2).$

b) $x' = (\log t) \frac{x + t^2}{1 + x^2}.$

c) $x' = \sqrt{t} \frac{e^x - t}{e^{2x} + t^2}.$

8. Se considera el problema:

$$\begin{cases} y' = 2y + x^2 \frac{y}{1 + y^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Pruébese que admite una única solución la cual está definida en la totalidad de la recta real $\mathbb{R}$.

9. Se considera el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2y + 4 \frac{e^x}{e^x + 1} \frac{y}{y^2 + 4} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Explíquese por qué dicho problema admite una única solución que está definida para todo valor del tiempo $t \geq 1$.

10. En el tonel $\overline{Q} = [-1, 1] \times [1 - R, 1 + R]$ se considera el problema:

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Hállese el intervalo de seguridad $[-t_R, t_R]$ (Teorema 2.25) comparando t_R con el tiempo “real” de existencia de la solución en $\overline{Q}$.

11. Se considera el problema

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

el cual se observa en el tonel $\bar{Q} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-R, R]$. Hallar el tiempo de seguridad t_R comparándolo con el tiempo real de existencia de la solución en el tonel $\bar{Q}$.

12. ♣ Dar una demostración de la Propiedad 2.26.
13. Sean $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ funciones complejas continuas con $t \in (a_1, a_2)$. Pruébese que para valores $t_0 \in (a_1, a_2)$, $x_0, x_1 \in \mathbb{C}$ arbitrarios el problema:

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1, \end{cases}$$

admite una única solución definida en todo el intervalo (a_1, a_2) .

14. Se considera el problema,

$$\begin{cases} x' = f(x) + \sin x \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función C^2 . Demuéstrese que admite una única solución que es además de clase C^3 .

15. Sean $a_0(t)$, $\dots$, $a_n(t)$ funciones continuas sobre el intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Discútase la existencia y unicidad de soluciones del problema

$$\begin{cases} x'(t) = a_0(t) + a_1(t)x + \dots + a_n(t)x^n \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad a < t_0 < b.$$

¿Se puede asegurar en general que el dominio de existencia de las soluciones es $(\alpha, \omega) = (a, b)$?

2.2.5. Algunas soluciones

Solución del Ejercicio 12. Se reduce a probar que:

$$|\bar{x} - \bar{y}| \leq |x - y|$$

si $|x|$ e $|y|$ son mayores que R junto con

$$|\bar{x} - y| \leq |x - y|$$

si $|x| > R$ e $|y| \leq R$.

En el primer caso suponemos $|x| \leq |y|$, tomamos y' tal que $|x| = |y'|$ con $y = ty'$ (es decir $t \geq 1$). Se tiene que $|x - y'| \leq |x - y|$ porque la desigualdad equivale a:

$$2(t-1)xy' \leq (t^2-1)|y'|^2 \quad t \geq 1,$$

es decir

$$2xy' \leq (t+1)|y'|^2 \quad t \geq 1,$$

desigualdad que es consecuencia de que $xy' \leq |y'|^2$. Como $|\bar{x} - \bar{y}| \leq |x - y'| \leq |x - y|$ hemos terminado.

En el segundo supuesto $x = t\bar{x}$ con $t \geq 1$ mientras $|y| < |\bar{x}|$. Se trata de probar $|\bar{x} - y| \leq |t\bar{x} - y|$ que es consecuencia de

$$2\bar{x}y \leq (t+1)|\bar{x}|^2 \quad t \geq 1.$$

Esto se sigue de que $\bar{x}y \leq |\bar{x}||y|$. □

2.3. Existencia con segundo miembro continuo. Teorema de Cauchy-Peano

2.3.1. Familias equicontinuas. Teorema de Ascoli-Arzelà

Nos enfrentamos al siguiente problema: dada una sucesión de funciones continuas $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ¿cuándo admite dicha sucesión una subsucesión $f_{n'}$ que converge uniformemente a una cierta función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$? Como se va a explicar, se trata de una cuestión de compacidad que a su vez, encubre un genuino “teorema de existencia”.

Sea (X, d) un espacio métrico. El siguiente es un resultado bien conocido.

Proposición 2.28. *Un conjunto $K \subset X$ es compacto si y sólo si de toda sucesión x_n en K se puede extraer una subsucesión $x_{n'}$ convergente a un cierto $x \in K$.*

Si se toma el espacio $X = C([a, b], \mathbb{R}^N)$, con la norma del supremo, nuestra pregunta está íntimamente relacionada con la siguiente observación.

Proposición 2.29. *Sea x_n una sucesión de un espacio métrico (X, d) . Si la adherencia ² $K = \overline{\{x_n\}}$ de x_n es un compacto entonces de x_n se puede extraer una subsucesión $x_{n'}$ que converge en X .*

Para responder entonces a la pregunta inicial hace falta saber cuándo la adherencia $\overline{\{f_n\}}$ de una sucesión de funciones continuas en $X = C([a, b], \mathbb{R}^N)$ constituye un compacto de dicho espacio. Es ésta una cuestión delicada. La siguiente propiedad establece qué partes de un espacio métrico son candidatas a ser compactos.

Proposición 2.30. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si $K \subset X$ es un compacto entonces K tiene que ser cerrado y acotado.*

De hecho, esta clase coincide con la de los compactos si X es un espacio normado de dimensión finita. Más aún, la finita dimensionalidad del espacio equivale a la validez del teorema de Heine–Borel (ver Ejercicio 1).

Teorema 2.31. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

- i) X tiene dimensión finita.
- ii) Un conjunto $K \subset X$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Desafortunadamente, el espacio que nos interesa $(C([a, b], \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ no tiene dimensión finita. Para que una sucesión de funciones continuas f_n cumpla que $K = \overline{\{f_n\}}$ es compacto dicho conjunto tiene que ser acotado en X . Esto se reduce simplemente a la acotación de la sucesión f_n en el espacio X (como se define más abajo, que f_n esté uniformemente acotada en $[a, b]$). De hecho

²La adherencia $\overline{A}$ de A es el menor cerrado de X que contiene a A .

un subconjunto A de un espacio métrico X está acotado si y solamente si su adherencia $\bar{A}$ está acotada. Por otro lado K es cerrado por definición.

Sin embargo, para que $K = \overline{\{f_n\}}$ sea compacto no es suficiente con que K sea cerrado y acotado en $(C([a, b], \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$. Hace más de un siglo, los matemáticos italianos G. Ascoli y C. Arzelá³ encontraron qué condición “extra” ha de satisfacer la sucesión de funciones f_n para que K sea compacto. Se trata de lo siguiente.

Definición 2.32. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una sucesión de funciones continuas. Se dice que dicha sucesión es equicontinua en $[a, b]$ si todos sus elementos poseen un módulo de continuidad común en $[a, b]$ es decir si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t, s \in [a, b]$ tales que $|t - s| < \delta$ se tiene que $|f_n(t) - f_n(s)| < \varepsilon$.

Definición 2.33. Sea $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, una sucesión de funciones. Se dice que f_n está uniformemente acotada en $[a, b]$ si para cierta $M \geq 0$:

$$|f_n(t)| \leq M$$

para todo $t \in [a, b]$ y $n \in \mathbb{N}$.

La siguiente propiedad presenta el ejemplo estándar de sucesión equicontinua. Constituye el criterio más útil para localizar dichas sucesiones.

Propiedad 2.34. Sea $f_n : [a, b] \subset \mathbb{R}^N$, una sucesión de funciones C^1 a trozos en $[a, b]$ que cumple:

$$|f'_n(t)| \leq L$$

para t variando en el conjunto de derivabilidad de f_n , todo $n \in \mathbb{N}$ y cierta constante $L > 0$. Entonces la sucesión f_n es equicontinua en $[a, b]$.

Demostración. Sean $a < c_1 < \dots < c_m < b$ los puntos donde f deja de ser derivable, aunque las derivadas laterales $f'(c_i \pm)$ existen y f' es continua en cada uno de los intervalos $[a, c_1], \dots, [c_m, b]$ por separado. Para $a \leq t < s \leq b$ intercalamos los c_i 's que hagan falta:

$$a \leq t \leq c_k < \dots < c_l \leq s \leq b$$

Entonces:

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f_n(s)| &\leq |f_n(t) - f_n(c_k)| + |f_n(c_k) - f_n(c_{k-1})| + \dots + |f_n(c_l) - f_n(s)| \\ &\leq L((c_k - t) + \dots + (s - c_l)) = L(s - t) = L|t - s|. \end{aligned}$$

Por tanto todas las f_n son Lipschitzianas con la misma constante L y de ahí f_n es equicontinua. $\square$

Ejemplos 2.10.

a) $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$ es equicontinua en $[0, 1]$.

³Giulio Ascoli (1843–96), Cesare Arzelá (1847–1912).

b) $f_n(x) = x^n$ no es equicontinua en $[0, 1]$. Sin embargo sí lo es en $[0, b]$ para $0 < b < 1$. Para la primera afirmación nótese que si f_n fuese equicontinua en $[0, 1]$ se tendría para algún δ que

$$|f_n(1) - f_n(1 - \delta)| = |1 - (1 - \delta)^n| < \frac{1}{2}$$

para todo n lo que no es posible. En el segundo caso, para todo $0 \leq t \leq b$

$$|f'_n(t)| \leq nb^{n-1} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$ lo que prueba la equicontinuidad de la sucesión en $[0, b]$.

Observación 2.11. La equicontinuidad es un concepto uniforme que depende de la región que se considere. Es asimismo una noción que se refiere a un colectivo de funciones y no a una en particular.

Podemos ya dar respuesta a la cuestión formulada al principio de la sección. Recordamos la noción de convergencia uniforme que es la asociada a la topología del espacio $(C([a, b], \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$

Definición 2.35. Una sucesión de funciones $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ converge uniformemente a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ si $|f_n(t) - f(t)|$ es uniformemente pequeño con tal de que n sea grande. Es decir, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{[a, b]} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ para $n \geq n_\varepsilon$.

Teorema 2.36 (Teorema de Ascoli-Arzelà). Sea $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una sucesión de funciones continuas. Entonces $K = \{f_n\}$ es compacto en $(C([a, b], \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ si y solamente si se cumplen las condiciones:

- i) f_n está uniformemente acotada en $[a, b]$,
- ii) f_n es equicontinua en $[a, b]$.

El siguiente corolario resume la información que resulta de interés.

Corolario 2.37. Sea $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ una sucesión de funciones continuas. Si cumple las propiedades

- i) f_n está uniformemente acotada en $[a, b]$,
 - ii) f_n es equicontinua en $[a, b]$,
- entonces de f_n se puede extraer una subsucesión $f_{n'}$ que converge uniformemente a una función f continua en $[a, b]$.

2.3.2. Ejercicios

1. Sea X un espacio vectorial con producto interior $(\cdot, \cdot)$ (un espacio euclídeo) que por tanto puede considerarse un espacio normado con la norma:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Se sabe que si X tiene dimensión infinita entonces (Teorema de Gram-Schmidt) existe una sucesión x_n de vectores tales que

$$(x_n, x_m) = \delta_{mn} \quad (\text{la } \delta \text{ de Kronecker}).$$

Pruébese que x_n no puede admitir subsucesiones convergentes.

2. Sea

$$\begin{array}{ccc} f : & [a, b] \times \mathbb{R}^N & \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ & (t, x) & \longmapsto f(t, x) \end{array}$$

una función continua y acotada. Si $\mathcal{S}$ designa el conjunto de las soluciones de $x' = f(t, x)$ que están definidas en el intervalo $[a, b]$, demuéstrese que la familia $\mathcal{S}$ es equicontinua en $[a, b]$.

Nota. Se demuestra en la siguiente sección que $\mathcal{S}$ no es vacío (Teorema de Cauchy-Peano).

3. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación continua, $\overline{Q}(h, R, t_0, x_0) = I_h \times \overline{B}_R(x_0) \subset \Omega$, $I_h = [t_0 - h, t_0 + h]$, un tonel en Ω . En el espacio $Y = (C(I_h, \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ se considera la bola cerrada

$$\overline{B} = \{y(t) \in Y : \|y - x_0\|_\infty \leq R\},$$

y el operador

$$\begin{array}{ccc} T : & \overline{B} & \longrightarrow Y \\ & y(t) & \longmapsto (Ty)(t) \end{array}$$

donde

$$(Ty)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds.$$

Pruébese que todas las posibles sucesiones $y_n(t)$ en $T(\overline{B})$ son equicontinuas y uniformemente acotadas.

4. (Poligonales de Euler) Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada con $|f(t, x)| \leq M$ en $[a, b] \times \mathbb{R}$. Las poligonales de Euler del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

se construyen a continuación. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $t_0 = a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ donde $t_i = a + i\frac{h}{n}$, $0 \leq i \leq n$, $h = b - a$. La poligonal n -ésima $P_n(t)$ está definida como $P_n(t_0) = x_0$ mientras $P_n(t) = P_n(t_{i-1}) + f(t_{i-1}, P_n(t_{i-1}))(t - t_{i-1})$ para $t_{i-1} \leq t \leq t_i$.

a) Representense gráficamente las poligonales.

b) Demuéstrese que $\{P_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ está uniformemente acotada.

c) Demuéstrese que $\{P_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es equicontinua.

5. [Funnels⁴]. Para $x_0 \in \mathbb{R}^N$ fijo, sea $\mathcal{S}$ el conjunto de las soluciones del problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

en donde f está en las condiciones del Ejercicio 2 (ver también el Teorema de Cauchy-Peano). Se toma $t \in [a, b]$ arbitrario y se define la sección $\mathcal{S}_t \in \mathbb{R}^N$ de $\mathcal{S}$ en el instante t como:

$$\mathcal{S}_t = \{y(t) : y \in \mathcal{S}\}.$$

Pruébese que $\mathcal{S}_t$ es compacto.

2.3.3. Teorema de Cauchy-Peano

Teorema 2.38 (Teorema de Cauchy-Peano). *Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y acotada, es decir, existe $M \geq 0$, tal que para cada $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$*

$$|f(t, x)| \leq M.$$

Entonces el problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

admite la menos una solución definida en todo el intervalo $[a, b]$.

Demostración. Se define una sucesión $x_n(t)$ de funciones continuas en $[a, b]$ de la que se extraerá una subsucesión que converge a una función continua $x(t)$ en $[a, b]$ que cumple:

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s)) \, ds \quad t \in [a, b]. \quad (2.6)$$

La sucesión se define como sigue.

Para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario tomamos el paso:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

y definimos la partición $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ como

$$t_k = a + kh,$$

para $1 \leq k \leq n$. Llamando I_k al intervalo parcial $[t_{k-1}, t_k]$, la función $x_n(t)$ se define progresivamente: primero en I_1 , a continuación en I_2 , etc. hasta llegar a I_n . En forma sintética la construcción es como sigue:

$$x_n(t) = \begin{cases} x_0 & a \leq t \leq t_1 \\ x_0 + \int_a^{t-h} f(s, x_n(s)) \, ds & t_{k-1} \leq t \leq t_k, k \geq 2. \end{cases}$$

⁴“Foniles” que diríamos en este pueblo.

Nos convencemos de que $x_n(t)$ está bien definida.

En I_1 :

$$x_n(t) = x_0.$$

En I_2 :

$$x_n(t) = x_0 + \int_a^{t-h} f(s, x_n(s)) \, ds = x_0 + \int_a^{t-h} f(s, x_0) \, ds.$$

Por tanto $x_n(t)$ es continua hasta $t = t_2$.

En I_3 :

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_0 + \int_a^{t-h} f(s, x_n(s)) \, ds = x_0 + \int_a^{t_1} f(s, x_0) \, ds \\ &\quad + \int_{t_1}^{t-h} f(s, x_0 + \int_a^{s-h} f(t, x_0) \, dt) \, ds, \end{aligned}$$

con lo que $x_n(t)$ es continua hasta $t = t_3$. Se procede así hasta el intervalo I_n .

En la construcción se obtiene una función continua $x_n(t)$. Más aún, para $t \geq t_1$ es la integral de una función continua. Es así C^1 con derivada:

$$x'_n(t) = f(t-h, x_n(t-h)).$$

También es derivable en I_1 con derivada 0. Por tanto, x_n es derivable excepto quizás en $t = t_1$ donde:

$$x'_n(t_1-) = 0, \quad x'_n(t_1+) = f(a, x_0).$$

En cualquier caso:

$$|x'_n(t)| \leq M,$$

en los puntos de derivabilidad. Luego la sucesión $x_n(t)$ es equicontinua.

Que está uniformemente acotada es consecuencia de que:

$$|x_n(t)| \leq |x_0| + M(t-h-a) \leq |x_0| + M(b-a)$$

para $t \geq t_1$.

El teorema de Ascoli-Arzelá afirma entonces que existe una subsucesión $x_{n'}(t)$ de $x_n(t)$ tal que $x_{n'}(t) \rightarrow x(t)$ uniformemente en $[a, b]$. Probamos que $x(t)$ cumple (2.6). Para $t > a$ y n' grande resulta que

$$t > t_1 = \frac{b-a}{n'}.$$

Como $f(t, x_{n'}(t)) \rightarrow f(t, x(t))$ uniformemente en $[a, b]$ (ver Observación 2.12) podemos tomar límites en la expresión:

$$\begin{aligned} x'_n(t) &= x_0 + \int_a^{t-h} f(s, x_{n'}(s)) \, ds = \\ &= x_0 + \int_a^t f(s, x_{n'}(s)) \, ds + \int_{t-h}^t f(s, x_{n'}(s)) \, ds, \end{aligned}$$

y observando que la última integral está acotada por Mh y que $Mh \rightarrow 0$ cuando $n' \rightarrow \infty$ se concluye que $x(t)$ cumple (2.6). $\square$

Observación 2.12. Probamos que $f(t, x_{n'}(t)) \rightarrow f(t, x(t))$ uniformemente en $[a, b]$. Como

$$(t, x_{n'}(t)) \in K := [a, b] \times \{x : |x| \leq |x_0| + M\},$$

y K es compacto entonces f es uniformemente continua en K . Por tanto, para $\varepsilon > 0$ dado existe δ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| < \varepsilon$$

si $|x - y| < \delta$. Existe ahora n'_δ tal que

$$|x_{n'}(t) - x(t)| < \delta$$

para $n' \geq n'_\delta$. Luego:

$$|f(t, x_{n'}(t)) - f(t, x(t))| < \varepsilon$$

para $n' \geq n'_\delta$ y $f(t, x_{n'}(t)) \rightarrow f(t, x(t))$ uniformemente en $[a, b]$

Corolario 2.39. *En las condiciones del teorema 2, el problema*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite al menos una solución definida en todo el intervalo $[a, b]$, cualquiera que sea el punto $(t_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$.

Antes del siguiente se recuerda que –por definición– una solución (x, I) del problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se puede *prolongar* (o continuar) al intervalo J con $I \subsetneq J$ si existe una solución (y, J) tal que $y|_I = x$. Si no es posible encontrar tal prolongación se dirá que (x, I) es no prolongable (no continuable) o maximal.

Lema 2.40 (Existencia de prolongación). *Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función continua y acotada. Entonces, toda solución (x, I) del problema*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

es prolongable al intervalo $[a, b]$.

En el siguiente resultado usamos la notación de la sección anterior:

$$\overline{Q}(h, R, t_0, x_0) = [t_0 - h, t_0 + h] \times \overline{B}_R(x_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

Teorema 2.41. Sea $f : \overline{Q}(h, R, t_0, x_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua y con cota M , es decir, para cada $(t, x) \in \overline{Q}(h, R, t_0, x_0)$,

$$|f(t, x)| \leq M.$$

Entonces

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite al menos una solución $x(t)$ que es prolongable al intervalo

$$I_h^* = [t_0 - \min\{h, \frac{R}{M}\}, t_0 + \min\{h, \frac{R}{M}\}].$$

Además, toda solución de (P) es prolongable a I_h^* .

Teorema 2.42 (Teorema de Cauchy-Peano: versión global). Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua. Entonces, el problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite al menos una solución (x, I) maximal. Además, el intervalo I de la solución maximal es abierto: $I = (\alpha, \omega)$.

Demostración. Con el lema de Zorn se puede dar una demostración directa (no constructiva). Una prueba más “tolerable” se recoge en el Anexo final y usa el Corolario 2.50 (ver [6]). $\square$

2.4. Comportamiento de las soluciones globales

El objetivo de la sección es analizar el comportamiento de una solución maximal (x, I) , $x = x(t)$, $I = (\alpha, \omega)$ del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

cuando $t \rightarrow \alpha +$ (resp. $\omega -$). Supondremos que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es continua y su dominio de definición Ω un abierto.

En los resultados que se exponen a continuación probaremos que si, por ejemplo, $t \rightarrow \omega -$, entonces $(t, x(t))$ se acerca indefinidamente a la frontera $\partial\Omega$ de Ω . Como Ω es un abierto general y posiblemente no acotado, por ejemplo $\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}^N$, que $(t, x(t))$ tienda a la frontera $\partial\Omega$ precisa una definición.

Definición 2.43. Definición Sea $x = x(t)$, $x : (t_0, t_1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función tal que $(t, x(t)) \in \Omega$ para cada $t \in (t_0, t_1)$. Se dice que

$$(t, x(t)) \rightarrow \partial\Omega \quad t \rightarrow t_1 - \quad (2.7)$$

(respectivamente, $(t, x(t)) \rightarrow \partial\Omega$ si $t \rightarrow t_0+$) si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe un tiempo $t(K)$ tal que $(t, x(t)) \notin K$ para cada $t(K) < t < t_1$ (res. $t_0 < t < t(K)$).

Observaciones 2.13.

- a) Si $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado entonces (2.7) es equivalente a que $\text{dist}((t, x(t)), \partial\Omega) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_1-$
b) Si $\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}^N$, $a < t_1 < b$, y $x(t)$ es continua entonces (2.7) implica que

$$\lim_{t \rightarrow t_1-} |x(t)| = \infty.$$

c)

- b) Si $\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}$, $a < t_1 < b$, y $x(t)$ es continua entonces (2.7) implica que o bien

$$\lim_{t \rightarrow t_1-} x(t) = \infty,$$

o bien

$$\lim_{t \rightarrow t_1-} x(t) = -\infty.$$

- e) Obsérvese que por definición, (2.7) se satisface desde que $t_0 = -\infty$ ó $t_1 = +\infty$.

Definición 2.44. Sea $x : I = (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función. Se dice que (t_1, x_1) es un punto de aglomeración de la gráfica de $x = x(t)$ cuando $t \rightarrow t_1$ si existe una sucesión $\{t_n\} \subset (t_0, t_1)$ tal que $t_n \rightarrow t_1$ y $x(t_n) \rightarrow x_1$.

Ejemplo 2.14. Si $I = (-\infty, 0)$, $x(t) = \text{sen}(1/t)$; todos los puntos $\{(0, z)/|z| \leq 1\}$ son de aglomeración de la gráfica de $x(t) = \text{sen}(1/t)$.

Lema 2.45 (Lema de Wintner). Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua y $x = x(t)$, $x : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ una solución de $x' = f(t, x)$ tal que $(b, \xi) \in \Omega$ es un punto de aglomeración de su gráfica cuando $t \rightarrow b-$. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow b-} x(t) = \xi.$$

Demostración. En primer lugar existe un tonel $\bar{Q} = [b-h, b+h] \times \bar{B}_R(\xi) \subset \Omega$ centrado en (b, ξ) donde $|f(t, x)| \leq M$.

Si la afirmación no es cierta existe $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < R$, y $t'_n \rightarrow b$ tal que

$$|x(t'_n) - \xi| > \varepsilon_0.$$

Asimismo, para cada t'_n existe $t''_n > t'_n$ de suerte que:

$$|x(t''_n) - \xi| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Todavía más, y por continuidad, existen $t'_n < \bar{t}_n < \bar{t}''_n < t''_n$ tales que:

$$|x(\bar{t}_n)| = \varepsilon_0 \quad |x(\bar{t}''_n)| = \frac{\varepsilon_0}{4}$$

con

$$\frac{\varepsilon_0}{4} \leq |x(t)| \leq \varepsilon_0$$

para todo $t \in [\bar{t}'_n, \bar{t}''_n]$. Escribimos:

$$|x(\bar{t}'_n) - x(\bar{t}''_n)| \leq \int_{\bar{t}'_n}^{\bar{t}''_n} |f(s, x(s))| ds \leq M|\bar{t}'_n - \bar{t}''_n|,$$

mientras:

$$|x(\bar{t}'_n) - x(\bar{t}''_n)| \geq |(x(\bar{t}'_n) - \xi) - (x(\bar{t}''_n) - \xi)| \geq \frac{3\varepsilon_0}{4}.$$

Esto no es posible pues $\bar{t}'_n - \bar{t}''_n \rightarrow 0$.

□

Teorema 2.46. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua, Ω un abierto y sea $x(t)$ una solución maximal del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida en el intervalo $I = (\alpha, \omega)$. Entonces se tiene que

$$(t, x(t)) \rightarrow \partial\Omega \quad t \rightarrow \omega- \quad (C)$$

(respectivamente, $(t, x(t)) \rightarrow \partial\Omega$ para $t \rightarrow \alpha+$).

Demostración. Si existiese $K \subset \Omega$ compacto y $t_n \rightarrow \omega$ tal que $(t_n, x(t_n)) \in K$ para todo n , extrayendo una subsucesión $t_{n'}$ tendríamos que $(t_{n'}, x(t_{n'})) \rightarrow (\omega, \xi)$ para algún $(\omega, \xi) \in K$ luego $(\omega, \xi) \in \Omega$. Del lema de Wintner tendríamos:

$$\lim_{t \rightarrow \omega} x(t) = \xi,$$

pero entonces podríamos prolongar la solución $x(t)$ mediante una que tuviese datos iniciales (ω, ξ) . Esto contradiría el carácter maximal de $x(t)$. □

Observación 2.15. El teorema comprende las siguientes posibilidades. O bien $\omega = +\infty$, en cuyo caso ya se cumple la propiedad convergencia (C), o bien $\omega < +\infty$ y $|x(t)| \rightarrow +\infty$ que es otro caso de (C), o bien $(t, x(t))$ se mantiene acotada cuando $t \rightarrow \omega-$ y en consecuencia todos sus puntos de aglomeración están situados en $\partial\Omega$ cumpliéndose que $\text{dist}((t, x(t)), \partial\Omega) \rightarrow 0+$ cuando $t \rightarrow \omega-$. Esta es la tercera opción bajo la que puede tener lugar (C).

Ejemplo 2.16. Sea $f = f(t, x)$ una función continua definida en $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $x = x(t)$ es una solución de $x' = f(t, x)$ cuyo intervalo maximal de existencia es (α, ω) donde $\omega < +\infty$. Entonces, del teorema anterior se deduce que o bien $\lim_{t \rightarrow \omega-} x(t) = -\infty$ o bien $\lim_{t \rightarrow \omega-} x(t) = \infty$.

Ejemplo 2.17. Si $f = f(t, x)$ es continua en $\mathbb{R}^N$ y $x(t)$ es una solución maximal definida en (α, Ω) con $\omega < \infty$. Entonces $\lim_{t \rightarrow \omega} |x(t)| = \infty$.

Ejemplo 2.18. Si en las condiciones del Teorema 2.46 $x(t)$ es una solución maximal definida en (α, ω) tal que $|f(t, x(t))| \leq M$ para $t \in (\alpha, \omega)$ entonces o bien $\omega = \infty$ o bien existe $\lim_{t \rightarrow \omega} x(t) = \xi$ y $(\omega, \xi) \in \partial\Omega$.

2.4.1. Ejercicios

1. En $\Omega = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ se considera la función $f(t, x) = \operatorname{sen} t(\log t) \operatorname{sen}^2 x$. Analícense las propiedades de existencia, unicidad y prolongación de las soluciones del problema de Cauchy asociado a la ecuación $x' = f(t, x)$.
2. En cada uno de los siguientes problemas de Cauchy estúdiense la existencia, unicidad y prolongación de soluciones.

a)

$$\begin{cases} x' = \sqrt{1 - x^2} \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde $-1 \leq x_0 \leq 1$. Tómese $\Omega = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ como dominio de definición del segundo miembro.

b)

$$\begin{cases} x' = (\log t)x^\alpha \\ x(1) = x_0, \end{cases} \quad \alpha > 0 \quad x_0 > 0.$$

Indicación. Distínganse los casos $0 < \alpha \leq 1$ y $\alpha > 1$.

c)

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad \text{donde} \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & |x| < 1 \\ 1 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x' = \sqrt{|t|}(1 + x^2) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x' = \operatorname{sen} x \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} x' = |x|^\alpha \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad \alpha > 0.$$

Indicación. Distínganse los casos $0 < \alpha \leq 1$ y $\alpha > 1$.

g)

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x_0 \geq 0,$$

donde $x \geq 0$, $f(x) = x^2 \log(\frac{1}{x})$ si $x > 0$, $f(0) = 0$.

3. Para $(t, x) \in \overline{\Omega} = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ se considera $f(t, x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Hállense todas las soluciones del problema,

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

4. Para $t \geq 0$ y $x \geq 0$ se considera la función

$$f(t, x) = \begin{cases} x \log \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Estúdiese la existencia y unicidad de soluciones del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

5. Estúdiese el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = -\frac{\pi}{2(1-t^2)}\sqrt{1-x^2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

6. Sea $a = a(t)$ continua en $[0, +\infty)$ de forma que $a(t) \geq 2t$ para $t \geq 0$. Demuéstrese que el problema

$$\begin{cases} x' = a(t)(1+x^2) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

admite una única solución maximal $x(t)$ definida en $[0, \omega)$ donde $\omega < +\infty$.

7. Sea $f = f(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definida como:

$$f(t, x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -\frac{2x}{t} & t^2 \geq x > 0 \\ -2t & x \geq t^2 > 0. \end{cases}$$

Discútase la existencia y unicidad de soluciones para el problema de Cauchy asociado a la ecuación $x' = f(t, x)$.

8. Se considera el problema

$$\begin{cases} x'^2 - 2\sqrt{t^3}x' + tx^2 = 0 \\ x(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- i) ¿Admite soluciones?

- ii) ¿Cuántas soluciones posee?
- iii) ¿Cuál es el dominio de existencia de las soluciones?
9. Consideremos el problema

$$\begin{cases} y' = xy + y^k \\ y(0) = A, \end{cases}$$

$k > 1$, $A > 0$. Demuéstrese que la solución maximal del problema es creciente y positiva, y está definida en un intervalo de la forma $[0, \omega)$, $\omega < +\infty$. Cumple además

$$\lim_{x \rightarrow \omega^-} y(x) = +\infty.$$

10. Estúdiese la finitud del extremo derecho ω del intervalo maximal de existencia (α, ω) de la solución del problema,

$$\begin{cases} x'_1 = x_1^2 + x_2 \\ x'_2 = x_1 + x_2^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1. \end{cases}$$

11. Sea $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua y localmente Lipschitziana mientras $x = x(t)$ es una solución de $x' = f(x)$ que satisface $x(t_0 + T) = x(t_0)$ para algún $T > 0$. Demuéstrese que $x = x(t)$ es periódica de periodo T . ¿Qué se puede decir si $n = 1$?
12. Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y C^1 en $x > 0$. Admítase que el problema

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

no tiene la propiedad de unicidad de soluciones. Pruébese entonces que:

$$\limsup_{x \rightarrow 0^+} |f'(x)| = +\infty.$$

13. Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada, y

$$\mathcal{S} = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \text{ es solución de } x' = f(t, x), x(a) = x_0\}.$$

Demuéstrese que para $a \leq t_1 \leq b$ el conjunto $I(t_1) = \{x(t_1) : x \in \mathcal{S}\}$ es un intervalo cerrado y acotado (teorema de Kneser-Hukuhara).

14. (Unicidad de soluciones sin la condición de Lipschitz). Sea:

$$\begin{array}{ccc} f : & \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (t, x) & \longmapsto f(t, x) \end{array}$$

continua y no creciente en x , es decir, $x_1 \leq x_2$ implica $f(t, x_1) \geq f(t, x_2)$.
Demuéstrese que el problema,

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admite una única solución para $t \geq t_0$.

2.5. Teoremas de Brouwer y de Schauder

Un resultado histórico y el más conocido de los teoremas de punto fijo es:

Teorema 2.47 (Teorema de Brouwer). *Sea $T : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ continua donde $\bar{B}$ es una bola cerrada de $\mathbb{R}^n$. Entonces T admite un punto fijo en $\bar{B}$.*

El teorema del punto fijo de Schauder es una versión infinito dimensional del teorema de Brouwer (omitimos la prueba en el curso, véase por ejemplo el libro de M. de Guzmán). Se dice que una aplicación (operador) $T : X \rightarrow Y$ entre dos espacios métricos X e Y es compacta si transforma X en una parte relativamente compacta de Y , es decir si $T(X)$ es relativamente compacto en Y .

Teorema 2.48 (Teorema de Schauder). *Sea X un espacio de Banach, $B \subset X$ cerrado y convexo, $T : B \rightarrow B$ continua y compacta. Entonces T admite un punto fijo en B .*

Teorema 2.49 (Teorema de Cauchy-Peano (2ª demostración)). *Sea $f : [a, b] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función continua y acotada, es decir, existe $M \geq 0$, tal que para cada $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^N$*

$$|f(t, x)| \leq M.$$

Entonces el problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite la menos una solución definida en todo el intervalo $[a, b]$.

Demostración. En $X = C([a, b], \mathbb{R}^N)$ con la norma $|\cdot|_\infty$ se considera el operador $T : X \rightarrow X$ definido de manera natural como:

$$T(y)(t) = x_0 + \int_a^t f(s, y(s)) \, ds.$$

T es continuo y, en virtud del teorema de Ascoli-Arzelá, $T(X)$ es relativamente compacto. En virtud del teorema de Schauder T admite un punto fijo que constituye una solución del problema. $\square$

2.6. Anexo

Corolario 2.50. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua y Ω un dominio. Si Ω_0 es cualquier subdominio de Ω tal que $\Omega_0 \subset \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ con $\bar{\Omega}_0$ compacto. Entonces existe $h_0 > 0$, que depende de Ω_0 , tal que para todo $(t_0, x_0) \in \Omega_0$ todas las posibles soluciones del problema*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se pueden prolongar hasta el intervalo $[t_0 - h_0, t_0 + h_0]$.

Demostración. Usamos en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ la distancia $d(P, P') = \max\{|t - t'|, |x - x'|\}$, $P = (t, x)$, $P' = (t', x')$ en la que la bola cerrada $\overline{B}(P_0, h)$, $P_0 = (t_0, x_0)$ es

$$\overline{B}(P_0, h) = \overline{Q}(h, h, P_0) = [t_0 - h, t_0 + h] \times \overline{B}_R(x_0) := \overline{Q}(h, P_0).$$

Llamamos $\rho_0 = \text{dis}(\overline{\Omega}_0, \partial\Omega) > 0$. Tomamos $h = \rho_0/2$, la unión de toneles

$$\cup_{P_0 \in \overline{\Omega}_0} \overline{Q}(h, P_0) \subset K,$$

donde $K = \{P : \text{dist}(P, \overline{\Omega}_0) \leq h\}$ es compacto. Tomando

$$M = \sup_K |f|,$$

todos los toneles $\overline{Q}(h, P_0)$ están en las condiciones del Teorema 2.41 usando este valor de M , $R = h$. Por ello toda solución de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

correspondiente a un $P_0 \in \overline{\Omega}_0$ es prolongable o está definida en $I_{h_0}^*$, el intervalo que proporciona dicho teorema. $\square$

Demostración del Teorema 2.42. Existe una sucesión de abiertos $\Omega_n \subset \Omega$ tales que:

$$\Omega_n \subset \overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$$

donde los $\overline{\Omega}_n$ son compactos y

$$\cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega.$$

Tómese por ejemplo $\Omega_n = \{(t, x) \in \Omega : \text{dist}(P, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}\} \cap \overline{B}((0, 0), n)$.

Sea (x, I) la solución de referencia: nos ocupamos de prolongarla por la derecha hasta un intervalo de la forma $[t_0, \omega)$. Podemos suponer que $I_+ = I \cap [t_0, \infty) = [t_0, b)$. Si $b = \infty$ o bien $x(t)$ admite una prolongación a $[t_0, \infty)$ no hay nada que demostrar. Suponemos entonces que $[t_0, b)$ tiene $b < \infty$ y que $x(t)$ no es prolongable hasta $t = \infty$. Asumimos naturalmente que (x, I_+) no es maximal. Por tanto es prolongable mediante $x_1(t)$ hasta $t = b$. Llamamos $P_1 = (b_1, \xi_1) = (b, x_1(b))$.

El conjunto $K = \{(t, x_1(t)) : t \in [t_0, b_1]\}$ es compacto, existe entonces un primer n_1 tal que $K \subset \Omega_{n_1}$. Aplicamos el Corolario 2.50 un número finito de veces para prolongar paulatinamente $x_1(t)$ hasta un punto $(b_2, \xi_2) \notin \Omega_{n_1}$ mediante una solución $x_2(t)$ que está definida en $[t_0, b_2]$ (de hecho $b_2 - b_1 = lh_1$ donde l es un entero y $h_1 = h_1(\Omega_{n_1})$ es el número mencionado en el Corolario 2.50).

Procediendo de esta manera encontramos una sucesión creciente $n_k \rightarrow \infty$ y una prolongación $x_k(t)$ de $x(t)$ hasta el punto $P_k = (b_k, \xi_k)$ de suerte que $P_k \notin \Omega_{k-1}$, mientras b_k es creciente.

Como por hipótesis $x(t)$ no se puede prolongar hasta el infinito entonces b_k está acotada superiormente y admite un límite $\omega < \infty$. La solución $x(t)$ se puede prolongar a $[t_0, \omega)$ por el mecanismo de definir $y(t) = x_k(t)$ si $t_0 \leq t \leq t_k$.

Finalmente $y(t)$ es maximal, de otra manera $\{(t, y(t)) : t_0 \leq t < \omega\}$ estaría incluido en un compacto $K' \subset \Omega$ lo que contradice la construcción de $y(t)$. $\square$

Capítulo 3

Dependencia continua y regular con respecto a datos iniciales y parámetros

3.1. Dependencia continua y aproximación de soluciones

Bajo condiciones adecuadas (ver el capítulo anterior) el problema

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución maximal definida en un intervalo (α, ω) (si $f(t, x)$ está definida en un abierto Ω). Si la solución es única para cada (t_0, x_0) , $x = x(t)$ y su dominio de definición (α, ω) dependen de los datos iniciales (t_0, x_0) . Como ejemplo, analícese una vez más con detalle el ejemplo $x' = x^2, x(t_0) = x_0$. En el presente capítulo se estudia cómo varían dichas soluciones con los datos iniciales y otras perturbaciones de la ecuación. La siguiente definición recoge la hipótesis mínima sobre $f(t, x)$ para la validez de algunos de los resultados del capítulo.

Definición 3.1. *Se dice que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, continua en $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, un conjunto abierto, posee la propiedad de unicidad de soluciones si para cada (t_0, x_0) el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (P)$$

admite una única solución. Si (α, w) es el intervalo de existencia maximal, la dependencia de α y ω con respecto a (t_0, x_0) se representa en la forma $\alpha(t_0, x_0)$ y $w(t_0, x_0)$.

Se designa por

$$x = x(t, t_0, x_0)$$

a la única solución de (P) definida sobre su dominio de existencia maximal (α, ω) . La denominaremos de aquí en adelante la solución general del problema de Cauchy. El conjunto:

$$\Theta = \{(t, t_0, x_0) / (t_0, x_0) \in \Omega, \quad t \in (\alpha(t_0, x_0), \omega(t_0, x_0))\}$$

representará su dominio de definición.

Ejemplo 3.1. Como se sabe, si $f = f(t, x)$ es continua y localmente Lipschitziana en x (por ejemplo f es de clase C^1) entonces f tiene la propiedad de unicidad de soluciones.

El siguiente resultado de tipo cualitativo expresa la continuidad de la solución general de (P).

Teorema 3.2 (Teorema de Peano: dependencia continua con respecto a datos iniciales). *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y localmente Lipschitziana¹ con respecto a x . Entonces se tiene que,*

- a) $\Theta \subset \mathbb{R} \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto,
- b) $x = x(t, t_0, x_0)$ es continua en Θ .

Observación 3.2. Es de gran importancia interpretar las afirmaciones del teorema. Se establece lo siguiente: si $(b, t_0, x_0) \in \Theta$, por ejemplo con $b > t_0$, entonces existe $\eta > 0$ tal que $(\bar{b}, \bar{t}_0, \bar{x}_0) \in \Theta$ siempre que $|\bar{b} - b|$, $|\bar{t}_0 - t_0|$ y $|\bar{x}_0 - x_0|$ sean menores o iguales que η . Esto significa que si la solución $x(t)$ de (P) está definida en $[t_0, b]$ también está definida en $[t_0 - \eta, b + \eta]$ (esto no supone novedad alguna). Más aún, la solución $y(t)$ de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(\bar{t}_0) = \bar{x}_0, \end{cases}$$

está definida en $[\bar{t}_0, b + \eta] \supset [t_0 + \eta, b + \eta]$ y además:

$$y(t) = x(t, \bar{t}_0, \bar{x}_0) \rightarrow x(t)$$

uniformemente en $[t_0, b + \eta]$ cuando $(\bar{t}_0, \bar{x}_0) \rightarrow (t_0, x_0)$. Véanse más detalles en la sección 3.1.1.

La idea clave para probar el Teorema de Peano consiste en demostrar primero la siguiente propiedad.

Propiedad 3.3. *Sea f como en el Teorema de Peano, $P_n = (t_{0n}, x_{0n})$, $P_0 = (t_0, x_0)$ tales que $P_n \rightarrow P_0$. Sean asimismo $x(t) = x(t, P_0)$, $x_n(t) = x(t, P_n)$ las correspondientes soluciones de $x' = f(t, x)$ con datos iniciales en P_0 y P_n .*

¹Basta con que tenga la propiedad de unicidad de soluciones

3.1. DEPENDENCIA CONTINUA Y APROXIMACIÓN DE SOLUCIONES 99

Si $x(t)$ está definida en un intervalo $[a, b]$, $t_0 \in [a, b]$, entonces para $n \geq n_0$ la solución $x_n(t)$ también está definida en dicho intervalo teniéndose que:

$$x_n \rightarrow x,$$

uniformemente en $[a, b]$.

Observación 3.3. La demostración se recoge en la Sección 3.1.1.

Ejemplo 3.4. La solución de

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

está definida en $[0, 1)$. Si $b < 1$ la solución de

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

está definida en $[0, b]$ siempre que $x_0 > 0$ y

$$\omega(t_0, x_0) = \frac{1}{x_0} + t_0 > b.$$

Como $\omega(t_0, x_0) = 1$ en $(t_0, x_0) = (0, 1)$ basta con que $|t_0|, |x_0 - 1|$ sean pequeños para que se tenga la desigualdad.

El siguiente resultado incorpora la dependencia con respecto a parámetros. Es una consecuencia inmediata del Teorema de Peano.

Teorema 3.4 (Teorema de dependencia continua con respecto a parámetros). *Supongamos que $f = f(t, x, \lambda)$, $f : \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \times \Lambda$ abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ es continua y localmente Lipschitz² con respecto a x . Sea $x = x(t, t_0, x_0, \lambda)$ la única solución del problema*

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

y sea $\Theta = \{(t, t_0, x_0, \lambda) / (t_0, x_0) \in \Omega, \lambda \in \Lambda, t \in (\alpha(t_0, x_0, \lambda), \omega(t_0, x_0, \lambda))\}$ su dominio de definición. Entonces se tiene que,

- a) $\Theta \subset \mathbb{R} \times \Omega \times \Lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ es un conjunto abierto,
- b) $x = x(t, t_0, x_0, \lambda)$ es continua.

Observación 3.5. Un resultado mucho más potente que los anteriores puede establecerse con la sola hipótesis sobre f de la propiedad de unicidad de soluciones. Enunciamos dicho resultado en el Anexo 3.2.

²Como antes, basta con que tenga la propiedad de unicidad de soluciones

Conocida la propiedad de continuidad nuestro interés se concentra ahora en obtener información cuantitativa de las soluciones (por ejemplo, aproximaciones numéricas de las mismas), los siguientes resultados brindan las estimaciones adecuadas (pertenecen al ámbito general de la teoría de desigualdades diferenciales).

Lema 3.5 (Gronwall, 1919). *Sean $c(t)$ y $g(t)$ funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ en donde $g \geq 0$. Si $y = y(t)$ es continua y satisface la desigualdad*

$$y(t) \leq c(t) + \int_a^t g(s)y(s) \, ds \quad \text{para } a \leq t \leq b$$

entonces,

$$y(t) \leq c(t) + \int_a^t c(s)g(s) \exp\left(\int_s^t g(\tau) \, d\tau\right) \, ds.$$

Si además, $c(t) \equiv c = \text{constante}$ entonces

$$y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t g(s) \, ds\right).$$

Demostración. En el primer caso se introduce la función auxiliar

$$Y(t) = \int_a^t g(s)y(s) \, ds,$$

para obtener $Y' \leq gY + gc$ con $Y(a) = 0$.

Cuando $c(t)$ es constante la función auxiliar adecuada es

$$Z(t) = c + \int_a^t g(s)y(s) \, ds.$$

□

En el siguiente resultado se supone conocido -a diferencia del teorema de Peano- el dominio $[a, b]$ donde están definidas dos soluciones aproximadas $x_1(t)$, $x_2(t)$ -es decir, no exactas- de una cierta ecuación *Lipschitz* $x' = f(t, x)$ de constante L (luego $x'_i = f(t, x_i) + e_i(t)$, $i = 1, 2$, donde $|e_i(t)| < \varepsilon_i$, siendo ε_i una cota del error en $[a, b]$) cuyos datos iniciales difieren una cierta cantidad. La conclusión establece una estimación de la diferencia entre las dos soluciones (conocida algunas veces como la “desigualdad fundamental”).

Teorema 3.6 (desigualdad fundamental). *Sean $x_1(t)$, $x_2(t)$ funciones diferenciables tales que*

$$|x_1(a) - x_2(a)| < \delta$$

y

$$|x'_i(t) - f_i(t, x_i(t))| < \varepsilon_i \quad (i = 1, 2)$$

para $a \leq t \leq b$. Si la función f satisface la condición de Lipschitz ³

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < L|x_1 - x_2|,$$

entonces

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \delta e^{L(t-a)} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)[e^{L(t-a)} - 1]/L,$$

para $a \leq t \leq b$.

Observación 3.6. En las mismas condiciones, si las $x_i(t)$ están definidas a ambos lados de a , por ejemplo en $|t - a| \leq K$ la correspondiente estimación “bilateral” es:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \delta e^{L|t-a|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)[e^{L|t-a|} - 1]/L.$$

Por otra parte, el resultado anterior puede establecerse usando también instantes iniciales diferentes para las soluciones aproximadas.

Corolario 3.7. Si en las hipótesis del teorema se supone que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de $x' = f(t, x)$ entonces la estimación toma la forma

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \delta e^{L(t-a)}.$$

3.1.1. Demostración del teorema de Peano

Demostración de la Propiedad 3.3. Consideramos el arco:

$$\Gamma = \{(t, x(t)) : t \in [a, b]\}$$

con $x(t) = x(t, P_0)$. Como $\Gamma \subset \Omega$ es compacto $\rho = \text{dist}(\Gamma, \partial\Omega) > 0$ y tomamos $h = \rho/3$. Usamos ahora las ideas del Corolario 2.50. Formamos los compactos:

$$K_h = \{P \in \Omega : \text{dist}(P, \Gamma) \leq h\} \subset K_{2h} = \{P \in \Omega : \text{dist}(P, \Gamma) \leq 2h\} \subset \Omega.$$

Nótese que

$$K_h = \cup_{P \in \Gamma} \overline{B}_h(P) = \cup_{P \in \Gamma} \overline{Q}(h, h, P),$$

en donde se usa la distancia habitual $d(P, P') = \max\{|t' - t|, |x' - x|\}$.

Tomamos:

$$M = \max_{K_{2h}} |f(t, x)|,$$

y definimos $h_0 = \min\{h, \frac{h}{M}\}$. Sabemos que para todo $\overline{P}_0 \in K_h$ la solución está definida en el intervalo de seguridad $I_{h_0}(\overline{t}_0)$. Más aún, la gráfica $\{(t, x(t, \overline{P}_0)) : t \in I_{h_0}(\overline{t}_0)\}$ está contenida en $\overline{B}_h(\overline{P}_0)$ y por tanto en K_{2h} .

Para proceder a la demostración trabajamos con el intervalo $[t_0, b]$ procediéndose en $[a, t_0]$ de manera similar. Tomamos un valor arbitrario $t^* \in [a, b]$

³En realidad sólo es necesario que la condición se dé en un entorno de las gráficas de ambas soluciones para $t \in [a, b]$. Es precisamente en estas condiciones como se aplica en la práctica el teorema 5.

y observamos que todas las soluciones $x(t, \bar{P}_0)$ con $\bar{P}_0 \in K_h$ y $|\bar{t}_0 - t^*| \leq h_1$, $h_1 = h_0/2$, están simultáneamente definidas en $I_{h_1}(t^*)$ y aún más:

$$x(t, \bar{P}_0) \rightarrow x(t)$$

uniformemente en $[a, b]$ cuando $\bar{P}_0 \rightarrow (t^*, x(t^*))$. Aquí, naturalmente, estamos designando como $x(t)$ a la solución bajo estudio. En efecto, está clara la afirmación sobre el dominio de existencia común. En cuanto a la convergencia escribimos:

$$x(t) = x^* + \int_{t^*}^t f(s, x) \, ds \quad x^* = x(t^*),$$

$$x(t, \bar{P}_0) = \bar{x}_0 + \left\{ \int_{\bar{t}_0}^{t^*} + \int_{t^*}^t \right\} f(s, x(s, \bar{P}_0)) \, ds,$$

luego:

$$|x(t, \bar{P}_0) - x(t)| \leq |\Delta x_0| + M|\Delta t_0| + L \int_{t_0}^t |\Delta x_n| \, ds,$$

en $[t_0 - h_1, t_0 + h_1]$ con $\Delta x_0 = \bar{x}_0 - x^*$ y $\Delta t_0 = \bar{t}_0 - t^*$. La desigualdad fundamental establece entonces que:

$$x(t, \bar{P}_0) \rightarrow x(t),$$

uniformemente en $[t_0 - h_1, t_0 + h_1]$ cuando $\bar{P}_0 \rightarrow (t^*, x^*)$. Para uso inmediato conviene llamar

$$\bar{Q}(t^*) = K_h \cap \{(t, x) \in \Omega : t \in I_{h_1}(t^*)\}.$$

Ahora razonamos como sigue. A partir de un n_1 los valores $P_n \in \bar{Q}(t_0)$ estando las $x_n(t) = x(t, P_n)$ definidas en $I_{h_1}(t_0)$ y más aún:

$$x_n(t) \rightarrow x(t)$$

uniformemente en $I_{h_1}(t_0)$.

Nos fijamos ahora en que volvemos a tener la misma situación en $t_1 := t_0 + h_1$ con la familia de datos $P'_n = (t_1, x_n(t_1))$, $P'_0 = (t_1, x(t_1))$. Repitiendo el argumento concluimos que para $n \geq n_2$ las $x_n(t)$ están definidas en el intervalo contiguo $[t_1, t_1 + h_1]$, teniéndose la convergencia uniforme:

$$x_n(t) \rightarrow x(t),$$

en la totalidad del intervalo $[t_0 - h_1, t_1 + h_1] = [t_0 - h_1, t_0 + 2h_1]$. Esto es así porque $P'_n \in \bar{Q}(t_1)$ para n suficientemente grande ($n \geq 2$).

Es evidente que procediendo en un número finito de pasos cubrimos el intervalo $[t_0, b]$, estando definidas las x_n en el mismo para n superior a un n_0 (mayor que los otros n_i) y obteniéndose allí la convergencia uniforme $x_n \rightarrow x$. Esto completa la prueba en la totalidad de sus detalles.

□

Demostración del Teorema 3.2. Si $(b, P_0) \in \Theta$ la solución $x(t, P_0)$ definida en $[t_0 - h, b + h]$ para cierto $h > 0$. De la Propiedad 3.3 existe $\eta > 0$ tal que $x(t, \bar{P}_0)$ está definida en $[t_0 - h, b + h]$ si $\bar{P}_0 \in B_\eta(P_0)$ lo que implica que $(b - h, b + h) \times B_\eta(P_0) \subset \Theta$. Por tanto, Θ es abierto. La continuidad de $x(t, P_0)$ es consecuencia inmediata de dicha propiedad. $\square$

3.2. Anexo: un resultado general debido a Kamke

Teorema 3.8 (Kamke, 1932). Sean $f_n : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas tales que $f_n \rightarrow f$ converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$ (es decir, para cada compacto $K \subset \Omega$, las restricciones de f_n a K convergen uniformemente a la restricción de f a K). Sea $\{(t_{0n}, x_{0n})\} \subset \Omega$ tal que $(t_{0n}, x_{0n}) \rightarrow (t_0, x_0)$. Sea (x_n, I_n) una solución maximal del problema

$$\begin{cases} x' = f_n(t, x) \\ x(t_{0n}) = x_{0n} \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos además que $f = f(t, x)$ tiene la propiedad de unicidad de soluciones y que $x = x(t)$ es la solución de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

que está definida (al menos) en el intervalo $[a, b]$. Entonces, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_1$ la solución $x_n(t)$ está definida en $[a, b]$ (e.d. $[a, b] \subset I_n$) y además $x_n(t) \rightarrow x(t)$ uniformemente sobre $[a, b]$.

Observación 3.7. La demostración de los Teoremas de Peano y de continuidad con respecto a parámetros es una consecuencia relativamente directa del teorema de Kamke.

3.3. Diferenciabilidad con respecto a los datos iniciales

En la presente sección supondremos que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^k con $k \geq 1$ sobre un conjunto abierto Ω . Obsérvese que ello conlleva la propiedad de unicidad de soluciones para $f = f(t, x)$. Vamos a establecer que en estas condiciones la solución general $x = x(t, t_0, x_0)$ del problema de Cauchy es también una función C^k (C^{k+1} con respecto a la primera variable t). Sin embargo, lo notable es que cada una de las derivadas parciales de la solución general $\frac{\partial x}{\partial \zeta}(t, t_0, x_0)$ (donde ζ puede ser cualquiera de las variables t, t_0, x_{0i}) considerada como función de t satisface otra vez un problema de Cauchy explícito.

Teorema 3.9 (dependencia diferenciable). *Supongamos que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 sobre el conjunto abierto Ω . Entonces $x = x(t, t_0, x_0)$ es de clase C^1 sobre Θ (véase la definición de Θ).*

Además,

a) Para cada $1 \leq i \leq n$, $y(t) = \frac{\partial x}{\partial x_{0i}}(t, t_0, x_0)$, $t \in (\alpha, \omega)$ es la solución del problema de Cauchy,

$$\begin{cases} y' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t)) y \\ y(t_0) = e_i, \end{cases}$$

donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $x_0(t) = x(t, t_0, x_0)$.

b) $z(t) = \frac{\partial x}{\partial t_0}(t, t_0, x_0)$, $t \in (\alpha, \omega)$ es la solución del problema de Cauchy,

$$\begin{cases} z' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t)) z \\ z(t_0) = -f(t_0, x_0), \end{cases}$$

donde, como arriba, $x_0(t) = x(t, t_0, x_0)$.

Corolario 3.10. *En el teorema anterior se puede remplazar C^1 por C^k (incluso con $k = \infty$). Además, las derivadas parciales de orden superior de $x(t, t_0, x_0)$, consideradas como funciones de t satisfacen problemas de Cauchy análogos a los del teorema precedente.*

Corolario 3.11 (dependencia con respecto parámetros). *Supongamos que $f : \Omega \times \Lambda \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^k , $k \geq 1$, sobre el conjunto abierto $\Omega \times \Lambda$. Entonces $x = x(t, t_0, x_0, \lambda)$ es de clase C^k sobre Θ (véase la definición de Θ). Además, todas las derivadas parciales de $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ de orden superior, consideradas como funciones de t , satisfacen ciertos problemas de Cauchy que se pueden determinar. Con más precisión, para cada $1 \leq \ell \leq m$, $uU(t) = \frac{\partial x}{\partial \lambda_\ell}(t, t_0, x_0)$, $t \in (\alpha, \omega)$ es la solución del problema de Cauchy,*

$$\begin{cases} u' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), \lambda)U + \frac{\partial f}{\partial \lambda_\ell}(t, x_0(t), \lambda) \\ u(t_0) = 0, \end{cases}$$

donde $x_0(t) = x(t, t_0, x_0)$.

Ejemplo 3.8. Si consideramos el problema de Cauchy escalar ($x \in \mathbb{R}$) con un parámetro real ($\lambda \in \mathbb{R}$) y queremos calcular la derivada de orden dos:

$$x_{x_0\lambda}(t) = \frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial \lambda}(t, t_0, x_0),$$

diferenciando una vez la ecuación obtenemos,

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_{x_0}) = f'_x(t, x_0(t), \lambda)x_{x_0}.$$

3.3. DIFERENCIABILIDAD CON RESPECTO A LOS DATOS INICIALES105

Derivando otra vez con respecto de λ ,

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_{x_0\lambda}) = f'_x(t, x_0(t), \lambda)x_{x_0\lambda} + f''_{xx}(t, x_0(t), \lambda)x_{x_0}x_\lambda + f''_{x\lambda}(t, x_0(t), \lambda)x_{x_0},$$

en donde $x_{x_0\lambda}$ es la función incógnita, $x_{x_0} = \frac{\partial x}{\partial x_0}$ y $x_\lambda = \frac{\partial x}{\partial \lambda}$ ya se han calculado previamente. Nótese que como además $x_{x_0}(t_0, t_0, x_0, \lambda) = 1$ entonces $x_{x_0\lambda}$ satisface la condición inicial,

$$x_{x_0\lambda}(t_0) = x_{x_0\lambda}(t_0, t_0, x_0, \lambda) = 0.$$

3.4. Ejercicios

1. Se considera la familia de problemas:

$$\begin{cases} y' = y^2 - \frac{1}{n^2} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

y el problema límite:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Pruébese que mientras las soluciones de los primeros están definidas en el intervalo $[0, 1]$ independientemente de n , la del problema límite sólo lo está en $[0, 1)$. Este ejemplo prueba que los dominios de existencia de las soluciones aproximadas no dan información sobre el dominio de existencia de la solución del problema límite (comparar con los resultados teóricos expuestos).

2. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua y localmente Lipschitziana con respecto a x . Sea $y(t)$ la solución de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Suponiendo que $f(0, 0) \neq 0$ pruébese que existen δ, ε positivos tales que para $|P_0| < \varepsilon$, $P_0 = (t_0, x_0)$, la solución de la ecuación con datos iniciales P_0 posee un único cero en el intervalo $[-\delta, \delta]$.

3. Se considera el problema:

$$\begin{cases} y' = y + \lambda x^2 \sin y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$. Pruébese que admite una única solución definida en todo $\mathbb{R}$. Hállese una estimación del error cometido cuando la solución se substituye por la del problema:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

en el intervalo $|x| \leq 1$.

4. El problema

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

se toma como aproximación de

$$\begin{cases} y' = y + \lambda \frac{y}{1+y^2} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

en el intervalo $|x| \leq 1$ Hállese una estimación del error.

5. Se consideran los problemas:

$$\begin{cases} y' = xy + y^{10} \\ y(0) = \frac{1}{10} \end{cases} \quad \begin{cases} y' = xy \\ y(0) = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

- a) Pruébese que la solución $y(x)$ del primero está definida en $|x| \leq \frac{1}{2}$ en donde satisface $|y(x)| \leq \frac{1}{5}$.
- b) Demuéstrese que una estimación del error al aproximar el primer problema por el segundo es:

$$|y(x) - \frac{1}{10}e^{x^2/2}| \leq \frac{2}{5^{10}}(e^{|x|/2} - 1).$$

6. Se considera:

$$\begin{cases} y' = t + y + \varepsilon y^2 \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad (P)$$

y el problema aproximado,

$$\begin{cases} y' = t + y \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (P_0)$$

- a) Suponiendo que la solución de (P) está definida en el intervalo $[0, l]$, satisfaciendo $|y(t)| \leq K$, $K > 0$, hállese una estimación del error cometido al substituir la solución de (P) por la de (P_0) .
- b) Si $y(t)$ es la solución de (P) pruébese que $y(t) > 1$, $y'(t) > 0$, $y''(t) > 0$ para $t > 0$. Probar que,

$$y(t) > 1 + (1 + \varepsilon)t \quad t > 0.$$

c) Pruébese que la solución $y(t)$ de (P) satisface:

$$y' \geq \varepsilon y^2 \quad t > 0,$$

por lo que el intervalo maximal de existencia a la derecha $[0, \omega)$ es finito y cumple $\omega \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

d) Pruébese que la solución $y(t)$ de (P) satisface:

$$y' \leq A(\varepsilon)y^2 \quad t > 0,$$

con $A(\varepsilon) = 1 + \varepsilon + \frac{1}{1 + \varepsilon}$. Dedúzcanse de ahí valores para l y K en el apartado a).

7. La desigualdad de Gronwall establece que si:

$$y(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^t b(s)y(s) \, ds \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (1)$$

donde a , b , y son continuas, $b \geq 0$, entonces,

$$y(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(\sigma) \, d\sigma} \, ds \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (2)$$

Pruébese que si a es C^1 y $a' \geq 0$ en $[\alpha, \beta]$ entonces (1) implica la siguiente versión mejorada de (2):

$$y(t) \leq a(t)e^{\int_{\alpha}^t b(s) \, ds}.$$

8. Supongamos que $f = f(x, y, \lambda)$ está definida en $a \leq x \leq b$, $y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, es C^1 y satisface:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \lambda) \right| \leq L \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) \right| \leq K,$$

$x \in [a, b]$, $y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea $y = y(x, \mu)$ la solución de:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \mu) \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

en el intervalo $[a, b]$. Pruébese que:

$$|y(x, \lambda) - y(x, \mu)| \leq \frac{K}{L} |\lambda - \mu| (e^{L|x-a|} - 1).$$

9. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

admite la solución $x = \sin t$. Demuéstrese que para n suficientemente grande la solución del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) + \frac{1}{n} \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

tiene al menos dos ceros en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Indicación. Es relativamente sencillo probar que hay un cero en el intervalo $(0, 2\pi)$. Para encontrar un segundo cero demuéstrese que $x_n(t) > x(t)$ para todo n y todo $t \in (0, 2\pi]$.

10. Se considera la familia de funciones:

$$f_n(x, t) = \frac{\sin t \sin nx}{n^2}.$$

- a) Hállese el límite de la sucesión $f_n(x, t)$ justificando que el límite es uniforme en $\mathbb{R}^2$.
- b) Para $f = \lim f_n$ hállese la solución de,

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

- c) ¿Qué se puede decir de la solución x_n del problema:

$$\begin{cases} x' = f_n(t, x) \\ x(0) = \frac{1}{n^2}? \end{cases}$$

11. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , designando por $x = x(t, t_0, x_0, \lambda)$ la solución del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Admitamos que para $\lambda = \lambda_0$, $x(t, t_0, x_0, \lambda_0)$ presenta k ceros simples en el intervalo (a, b) . Pruébese que $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ también exhibe k ceros simples en dicho intervalo siempre que $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$.

- En los problemas que siguen $x = x(t, t_0, x_0, \lambda)$ representa la solución del problema:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

12. Calcúlense, justificando su existencia, todas las derivadas parciales de primer orden de $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ en $(t, t_0, x_0, \lambda) = (t, t_0, x_0, 0)$, siendo $x(t, t_0, x_0, \lambda)$ la solución general del problema:

$$\begin{cases} x' = x^2 + \lambda x^3 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

13. Los mismos cálculos para:

$$\begin{cases} x' = \frac{(x-1)^2}{2} + \lambda e^t \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en (t, t_0, x_0, λ) , $x_0 = 1$, $\lambda = 0$.

14. La misma cuestión para:

$$\begin{cases} x' = x(1-x)(x-\alpha) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en (t, t_0, x_0) , $x_0 = \alpha$.

15. Calcular las derivadas de primer orden de la solución general $x(t, t_0, x_0, \varepsilon)$ del problema,

$$\begin{cases} x' = x^2 + \varepsilon t^2 \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en $\varepsilon = 0$.

16. La misma cuestión para la solución general del problema:

$$\begin{cases} x' = x(\mu - x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en los puntos $(t, t_0, x_0) = (t, t_0, 0)$, $(t, t_0, x_0) = (t, t_0, \mu)$.

17. Para $f = f(t, x, \lambda)$ de clase C^2 en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hállese algunas de las derivadas parciales de segundo orden de la solución general $x = x(t, t_0, x_0)$ del problema de Cauchy $x' = f(t, x, \lambda)$, $x(t_0) = x_0$.

18. (*) Sea $f \in C^1(\Omega)$, Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$. Demuéstrese que existe la derivada $\partial x / \partial x_0$ de la solución general $x = x(t, t_0, x_0)$ del problema de Cauchy $x' = f(t, x, \lambda)$, $x(t_0) = x_0$, estableciendo asimismo que la función $z(t) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)$ es la solución de la ecuación variacional $z' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0))z$ sometida a la condición inicial $z(t_0) = 1$.

3.5. Soluciones

- **Solucion al Ejercicio 1.** La solución del problema perturbado tiene dominio de existencia $[0, \omega_n)$ con

$$\omega_n = \int_0^\infty \frac{ds}{s^2 - \frac{1}{n^2}},$$

mientras la solución del problema límite está definida en $[0, 1)$. Es inmediato comprobar que $\omega_n > 1$ porque:

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s^2} = 1.$$

- **Solucion al Ejercicio 5.** En el conjunto $\overline{Q} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{5}]$ en punto inicial es $(x_0, y_0) = (0, \frac{1}{10})$ y las dimensiones son $h = \frac{1}{2}$, $R = \frac{1}{10}$. Calculamos el tiempo de seguridad:

$$h^* = \min\{h, \frac{R}{M}\}$$

donde M es una cota de la función en $\overline{Q}$. Tal cota es:

$$M = \frac{1}{2} \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^{10}.$$

Entonces:

$$\frac{R}{M} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5}\right)^9} > \frac{1}{2}.$$

Por tanto $h^* = \frac{1}{2}$ lo que prueba que $0 < y(x) < \frac{1}{5}$ para $|x| < \frac{1}{2}$.

Aplicamos el Teorema 3.6 tomando $f(x, y) = xy$. La constante de Lipschitz en $\overline{Q}$ es $L = \frac{1}{2}$. Asimismo

$$e_1(x) = y(x)^{10}$$

por lo que

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{5^{10}}.$$

Por tanto:

$$|y(x) - \frac{1}{10} e^{\frac{x^2}{2}}| \leq \frac{2}{5^{10}} \left(e^{\frac{|x|}{2}} - 1 \right).$$

- **Solucion al Ejercicio 6.** Para a) si $y_0(t)$ es la solución de (P_0) entonces

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \varepsilon K^2 (e^t - 1).$$

En cuanto a b) si $[0, \omega)$ es el intervalo maximal de existencia ha de ser $y(t) > 1$. Inicialmente esto es cierto y si t_1 es el primer t tal que $y(t_1) = 1$ entonces $y'(c) = 0$ para $0 < c < t_1$. Eso es imposible. Así $y(t) > 1$. De ahí y' y y'' son positivas para todo t . La desigualdad

$$y(t) > 1 + (1 + \varepsilon)t$$

se sigue de la convexidad.

Está claro que $t + y > 0$ luego $y' \geq \varepsilon y^2$, de donde:

$$y(t) \geq \frac{1}{1 - \varepsilon t}.$$

Por tanto $\omega \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Estudiamos ahora d). De $y > 1 + (1 + \varepsilon)t$ se sigue que:

$$y' < \frac{1}{1 + \varepsilon}(y - 1) + y + \varepsilon y^2 < A(\varepsilon)y^2.$$

Se sigue fácilmente de aquí que:

$$y(t) < \frac{1}{1 - A(\varepsilon)t}.$$

luego $\omega \leq \frac{1}{A(\varepsilon)}$.

- **Solucion al Ejercicio 7.** Se sabe que:

$$y(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b} ds \leq a(t) + a(t) \int_{\alpha}^t d\left(-e^{\int_s^t b}\right) ds.$$

De aquí:

$$y(t) \leq a(t)e^{\int_{\alpha}^t b(s) ds}.$$

3.6. Ejercicios suplementarios

Los últimos cuatro ejercicios requieren la teoría de ecuaciones lineales. Se resolverán mejor una vez se haya estudiado el próximo capítulo.

1. Sea $x(t, t_0, x_0, x'_0, \varepsilon)$ la solución del problema:

$$\begin{cases} x'' + \varepsilon x'^2 + x = 0 \\ x(t_0) = x_0 \quad x'(t_0) = x'_0. \end{cases}$$

Hállense todas las derivadas parciales de primer orden de $x(t, t_0, x_0, x'_0, \varepsilon)$ para $\varepsilon = 0$.

2. Se considera el problema:

$$\begin{cases} x'' + \varepsilon x' + \sin x = 0 \\ x(0) = x_0 \quad x'(0) = x'_0, \end{cases} \quad |x_0| < \frac{\pi}{2}.$$

- a) Pruébese que las soluciones están definidas en todo $\mathbb{R}$ y que además satisfacen la desigualdad:

$$\frac{1}{2}x'^2 + 1 - \cos x \leq \frac{1}{2}x_0'^2 + 1 - \cos x_0,$$

para $t \geq 0$.

- b) Utilícese la desigualdad para estimar el error cometido cuando la solución del problema se aproxima por la del problema,

$$\begin{cases} x'' + x = 0 \\ x(0) = x_0 \quad x'(0) = x'_0, \end{cases}$$

que como bien se sabe viene dada explícitamente por $x(t) = x_0 \cos t + x'_0 \sin t$.

3. Sea $A = A(t)$ una función matricial continua definida en $\mathbb{R}$ mientras $x = x(t, y)$ es la solución de:

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(0) = y. \end{cases}$$

Si $X(t) = \frac{\partial x}{\partial y}(t, y)$, pruébese que X satisface:

- i) $X(0) = I$ (la matriz identidad $n \times n$).
 ii) $X'(t) = A(t)X(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

4. Se considera el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 & x_1(0) = y_1 \\ x'_2 = -x_2 + x_1 & x_2(0) = y_2 \\ x'_3 = x_3 + x_1 & x_3(0) = y_3. \end{cases}$$

Hállese la solución $x = x(t, y)$ y pruébese que si $f(x)$ designa el segundo miembro de la ecuación entonces $X_1(t) = \frac{\partial x}{\partial y}(t, y)$ es una función matricial que satisface:

- i) $X'_1(t) = A(t)X_1(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ donde $A(t) = f'(x(t, y))$.
- ii) $X_1(0) = I$ (la matriz identidad $n \times n$).

5. Hállese la solución $x = x(t, y)$ del problema:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 & x_1(0) = y_1 \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 & x_2(0) = y_2 \\ x'_3 = x_1 + 3x_2 - x_3 & x_3(0) = y_3 \\ x'_4 = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & x_4(0) = y_4. \end{cases}$$

evaluando asimismo la derivada parcial $\frac{\partial x}{\partial y_1}(t, y)$.

6. Sea $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$ la solución del problema:

$$\begin{cases} x' = x - x^2 - xy \\ y' = -y + xy \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Hállense las derivadas $x_1(t) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, 1, 0)$, $y_1(t) = \frac{\partial y}{\partial x_0}(t, 1, 0)$.

Capítulo 4

Ecuaciones lineales

4.1. Teoría básica

A lo largo de todo el capítulo se supondrá que $A = A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ es una función matricial continua definida sobre un intervalo $J = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}$ y de coeficientes reales. Asimismo $b = b(t)$, $b : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ se considera una función vectorial continua con valores reales.

En el caso de ecuaciones escalares de orden n supondremos que los coeficientes $a_1(t), \dots, a_n(t)$ y $b(t)$ son funciones reales continuas definidas en el intervalo $J = (\alpha, \beta)$.

Todos los resultados que siguen son igualmente válidos si las funciones $A(t)$ y $b(t)$ toman valores complejos en el caso de la ecuación vectorial, o si los coeficientes $a_1(t), \dots, a_n(t)$ y $b(t)$ son funciones complejas en el caso de la ecuación escalar. Para poner énfasis en este hecho se enuncia así el siguiente resultado.

Teorema 4.1 (Existencia, unicidad y prolongación). *Sean $A = A(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ y $b : J \rightarrow \mathbb{C}^n$ continuas en el intervalo J de $\mathbb{R}$. Entonces, para cada $x_0 \in \mathbb{C}^n$ y cada $t_0 \in J$, el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite una única solución definida en todo el intervalo J .

Similarmemente, si los coeficientes $a_1(t), \dots, a_n(t)$ y el término $b(t)$ son continuos en el intervalo J el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t) \\ x(t_0) = x_{01}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}, \end{cases}$$

admite una única solución $x(t)$ definida en J para $t_0 \in J$ y $x_{01}, \dots, x_{0n} \in \mathbb{C}$ arbitrarios.

Observación 4.1. La ecuación escalar es equivalente a un sistema $x' = A(t)x + b(t)$. En efecto una solución $x(t)$ de

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = b(t)$$

da lugar a la solución (usamos notación de vectores)

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

del sistema

$$\bar{x}' = A(t)\bar{x} + \bar{b}(t)$$

donde

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - \cdots - a_1(t)x_n + b(t) \end{cases}$$

donde $\bar{b}(t) = (0, \dots, b(t))$. Es decir:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Definición 4.2. La ecuación diferencial lineal $x' = A(t)x + b(t)$ se dice homogénea si $b(t) \equiv 0$ (no homogénea si $b \neq 0$). Las mismas definiciones se aplican a la ecuación escalar.

La siguiente propiedad, consecuencia inmediata de la propiedad de unicidad, es sin embargo fundamental en lo que sigue.

Proposición 4.3. Si una solución $x(t)$ de la ecuación homogénea $x' = A(t)x$ se anula en un punto $t_1 \in J$ entonces $x(t) = 0$ para todo $t \in J$.

Si $x(t)$ es una solución de la ecuación escalar homogénea:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0$$

que se anula junto con todas sus derivadas hasta el orden $n - 1$ en un punto t_1 de J entonces $x(t) = 0$ para todo $t \in J$.

Sobre la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.4 (Principio de Superposición). El conjunto $\mathcal{S} = \{x = x(t) \in C^1(J, \mathbb{R}^n) : x' = A(t)x, t \in J\}$ de las soluciones de la ecuación homogénea

$$x' = A(t)x,$$

es un espacio vectorial de dimensión n mientras el conjunto $\mathcal{S}_b = \{x = x(t) \in C^1(J, \mathbb{R}^n) : x' = A(t)x + b(t), t \in J\}$ de soluciones de la ecuación completa es un espacio afín, es decir

$$\mathcal{S}_b = \mathcal{S} + y(t)$$

donde $y(t)$ es cualquier solución prefijada de la ecuación completa.

Asimismo, el conjunto:

$$\mathcal{E} = \{x = x(t) \in C^n(J, \mathbb{R}) : \mathcal{L}(x) = 0, t \in J\},$$

donde

$$\mathcal{L}(x) = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x,$$

es un espacio vectorial de dimensión n mientras el conjunto $\mathcal{E}_b$ de todas las soluciones de la ecuación completa $\mathcal{L}(x) = b$ se obtiene como:

$$\mathcal{E}_b = \mathcal{E} + \xi(t),$$

donde $\xi(t)$ es cualquier solución prefijada de la ecuación completa.

Observaciones 4.2.

- a) En el teorema se dice que si se conoce una solución particular $y(t)$ de la ecuación completa, entonces todas las soluciones $x(t)$ de la ecuación completa se escriben como:

$$x(t) = z(t) + y(t),$$

donde $z(t)$ es solución de la ecuación homogénea.

- b) La misma afirmación para la ecuación escalar.

Demostración del Teorema 4.4. Tomamos una base $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ y $t_0 \in J$. Definimos $\varphi_i(t)$ la solución de

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = v_i. \end{cases}$$

La familia $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ es una base de $\mathcal{S}$. Si $x(t)$ es una solución, tomamos $x_0 = x(t_0)$ y lo representamos:

$$x_0 = \sum_{i=1}^n c_i v_i,$$

entonces:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) = c_1 \varphi_1(t) + \cdots + c_n \varphi_n(t).$$

Luego $\mathcal{B}$ es un sistema generador. También es libre pues si existen coeficientes c_i tales que:

$$\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) = 0$$

para todo $t \in J$, al tomar $t = t_0$ resulta $c_1 = \cdots = c_n = 0$. □

Definición 4.5. Si $S = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ es una base del espacio de soluciones de $x' = A(t)x$ entonces se dice que S constituye un sistema fundamental de soluciones de $x' = A(t)x$. El sistema fundamental se denomina normalizado en t_0 si $\varphi_i(t_0) = e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. En el caso escalar se aplican las mismas definiciones. Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es un sistema normalizado habrán de ser $x_i^{(j)}(t_0) = \delta_{i-1,j}$, $0 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$.

Corolario 4.6. La ecuación $x' = A(t)x$ admite, para cada $t_0 \in J$, un sistema fundamental de soluciones normalizado en t_0 . La misma afirmación es válida para la ecuación $\mathcal{L}(x) = 0$.

Corolario 4.7. Sea $S = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ un sistema fundamental de soluciones de $x' = A(t)x$. Entonces, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existen n números reales únicos (sólo dependen de t_0 y de x_0) $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que, la solución del problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se escribe en la forma

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t). \quad (4.1)$$

Si S está normalizado en t_0 entonces

$$x(t) = x_{01}\varphi_1(t) + \dots + x_{0n}\varphi_n(t),$$

donde $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$.

Si, a su vez, $\{x_1, \dots, x_n\}$ es un sistema fundamental de la ecuación escalar $\mathcal{L}(x) = 0$ la solución del problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x) = 0 \\ x(t_0) = x_{01}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}, \end{cases}$$

se puede escribir como la combinación lineal:

$$x = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \quad (4.2)$$

para constantes únicas c_i . Si el sistema está normalizado $c_i = x_{0i}$.

Observación 4.3. Las expresiones (4.1) y (4.2) se conocen como la solución general de la ecuación vectorial y la ecuación escalar, respectivamente.

La siguientes propiedades están implícitas en la prueba del Teorema 4.4.

Proposición 4.8. Sean $\psi_1, \dots, \psi_n$ soluciones de la ecuación $x' = A(t)x$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- a) $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ linealmente independiente de funciones en $C^1(J, \mathbb{C}^n)$, es decir define un sistema fundamental de soluciones.

b) Para cada $t \in J$, $\{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{C}^n$, es decir,

$$\det \text{col} [\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)] \neq 0$$

para cada $t \in J$.

c) Existe $t_0 \in J$ tal que $\{\psi_1(t_0), \dots, \psi_n(t_0)\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{C}^n$, es decir, existe $t_0 \in J$ tal que

$$\det \text{col} [\psi_1(t_0), \dots, \psi_n(t_0)] \neq 0.$$

Los últimos resultados se pueden reescribir para ecuaciones escalares en la forma siguiente. Si $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ son n soluciones de la ecuación de orden n :

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0,$$

se define el determinante Wronskiano de las n soluciones como:

$$W(x_1, \dots, x_n)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \quad t \in J.$$

Proposición 4.9. Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ una familia de n soluciones de la ecuación

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0.$$

Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.

- a) Existe $t_0 \in J$ tal que $W(x_1, \dots, x_n)(t_0) \neq 0$.
- b) $\{x_1, \dots, x_n\}$ define un sistema fundamental de soluciones.
- c) Para cada $t \in J$ se cumple $W(x_1, \dots, x_n)(t) \neq 0$.

4.2. La ecuación de orden n

4.2.1. Sistemas fundamentales

Se considera la ecuación diferencial de coeficientes constantes $a_i \in \mathbb{C}$:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0. \quad (4.3)$$

Su polinomio característico se define como:

$$q(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p},$$

que tiene p raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicidades $m_1, \dots, m_p$, siendo éstas reales o complejas y $m_1 + \dots + m_p = n$.

Proposición 4.10. La familia de funciones:

$$S_1 = \{e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_p t}, \dots, t^{m_p-1} e^{\lambda_p t}\},$$

$\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ constituye un sistema fundamental de soluciones de (4.3).

Demostración. Se tiene:

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}) = q(\lambda)e^{\lambda t},$$

mientras que derivando k veces con respecto a λ :

$$\mathcal{L}(t^k e^{\lambda t}) = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \lambda^{k-l} q^{(l)}(\lambda) e^{\lambda t}.$$

Es evidente pues que las $t^k e^{\lambda_i t}$, $k \leq m_i - 1$, son soluciones. Son también linealmente independientes. En efecto tenemos en primer lugar el siguiente lema:

Lema 4.11. Sean $q(t)$ y $p(t)$ polinomios complejos en t , $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Si

$$e^{\lambda t} q(t) = p(t)$$

para todo t entonces $p(t)$ y $q(t)$ son idénticamente nulos.

Asumiendo el lema procedemos por inducción sobre el número de raíces, para una exponencial:

$$p(t) + q(t)e^{\lambda_1 t} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

con p y q polinomios, $\lambda_1 \neq 0$, implica que los coeficientes de p y q son cero. Si de

$$q_0(t) + q_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + q_m(t)e^{\lambda_m t} = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ resulta que los polinomios q_i son cero, para $m+1$ términos, de:

$$q_0(t) + q_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + q_{m+1}(t)e^{\lambda_{m+1} t} = 0$$

se sigue

$$q_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + q_{m+1}(t)e^{\lambda_{m+1} t} = -q_0(t).$$

Derivando ambos miembros tantas veces como el orden de q_0 más uno (v.g. l):

$$q_1^*(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + q_{m+1}^*(t)e^{\lambda_{m+1} t} = 0,$$

donde:

$$q_i^*(t) = \lambda_i^l q_i(t) + \cdots + q_i^{(l)}(t) \quad q_i^*(t)e^{\lambda_i t} = (q_i(t)e^{\lambda_i t})^{(l)}.$$

Como los exponentes son distintos dos a dos:

$$q_1^*(t) + q_2^*(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \cdots + q_{m+1}^*(t)e^{(\lambda_{m+1} - \lambda_1)t} = 0.$$

Luego todos los q_i^* son cero por la hipótesis de inducción. De ahí:

$$(q_i(t)e^{\lambda_i t})^{(l)} = 0,$$

así:

$$q_i(t)e^{\lambda_i t} = p(t)$$

para cierto polinomio p . Por el lema $q_i \equiv 0$.

□

Demostración del lema. Razonamos por inducción sobre el grado de p . Si es cero

$$e^{\lambda t} q(t) = c$$

con c constante. Como $q(t) = ce^{-\lambda t}$ y $\lambda \neq 0$ se deduce derivando que $c = 0$ luego $q \equiv 0$. Si la propiedad es cierta para grado m y partimos de la igualdad con p de grado $m + 1$, al derivar obtenemos

$$e^{\lambda t}(q'(t) + \lambda q(t)) = p'(t).$$

Por la hipótesis de inducción p es constante, volvemos a $e^{\lambda t} q(t) = c$ y $q \equiv 0$. $\square$

Si los coeficientes a_i de la ecuación (4.3) son todos reales y $\lambda = \alpha + i\beta$ es una raíz compleja de $q(\lambda)$ con multiplicidad m se sabe que el valor conjugado $\bar{\lambda}$ es también una raíz compleja de la misma multiplicidad. El sistema S_1 incluye en este caso funciones complejas. Sin embargo éstas van acompañadas de las correspondientes funciones conjugadas.

Para obtener un sistema fundamental real S'_1 a partir de S_1 se substituye en éste cada grupo complejo $\{e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda}t}, \dots, t^{m-1}e^{\bar{\lambda}t}\}$ por el siguiente grupo real:

$$\{e^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{m-1}e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{m-1}e^{\alpha t} \sin \beta t\}.$$

Calculando la matriz que expresa las coordenadas de los vectores de S'_1 en términos de las de los vectores de S_1 se comprueba que aquélla es invertible. Por tanto S'_1 es realmente un sistema fundamental.

Para un visión alternativa véase también el Ejercicio 4.

4.2.2. Ejercicios

1. Para $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ se consideran las funciones:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \dots, \varphi_n(t) = e^{\lambda_n t}.$$

Calcúlese el el Wronskiano $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Búsquese una ecuación lineal $\mathcal{L}(x) = 0$ de la que constituyan un sistema fundamental de soluciones.

2. Calcúlese un sistema fundamental de soluciones para las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} x'' + x' - 6x = 0 & x^{iv} + 5x'' - 36x = 0 \\ x''' + 2x'' - 5x' - 6x = 0 & x'' - 2x' + 5x = 0 \\ x^{(iv)} - x''' - 9x'' - 11x' - 4x = 0 & x''' + 4x = 0 \\ x^{(vi)} + 9x^{(iv)} + 24x'' + 16x = 0 & (D^2 - 2D + 5)^2 x = 0. \end{array}$$

3. Las ecuaciones de la forma:

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{(n-1)} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = 0,$$

se llaman ecuaciones de Euler. Se reducen a coeficientes constantes mediante el cambio de variable:

$$t = e^\tau.$$

De acuerdo con esta estrategia hállese en los siguientes casos un sistema fundamental de soluciones de las ecuaciones correspondientes.

$$\begin{array}{ll} t^2 x'' - 3tx' + 4x = 0 & (t+1)^2 x'' + (t+1)x' - x = 0 \\ t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0 & (2t+1)^2 x'' - 2(2t+1)x' - 12x = 0 \\ t^3 x''' + tx' - x = 0. & \end{array}$$

4. Sea $V \subset \mathbb{C}^N$ un subespacio complejo de dimensión $2n$ con una base de la forma

$$\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}.$$

- a) Escribiendo $u_k = v_k + iw_k$ con los $v_k, w_k \in \mathbb{R}^N$, pruébese que

$$\{v_1, w_1, \dots, v_n, w_n\}$$

también es una base de V .

- b) Se representa $x \in V$ en la forma:

$$x = \sum_{i=1}^n c_i u_i + \sum_{i=1}^n d_i \bar{u}_i.$$

Pruébese que $x \in V \cap \mathbb{R}^N$ si y sólo si

$$d_k = \bar{c}_k$$

para $k = 1, \dots, n$. En ese caso:

$$x = \sum_{i=1}^n \Re(c_i u_i) = \sum_{i=1}^n x_i v_i + \sum_{i=1}^n y_i w_i,$$

donde $x_k, y_k \in \mathbb{R}$.

- c) Usando las ideas de a), b) pruébse que si un subespacio complejo $V \subset \mathbb{C}^N$ tiene una base $\mathcal{B} = \{e_j\}$ invariante por conjugación, es decir:

$$e_j \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \bar{e}_j \in \mathcal{B},$$

entonces V admite una base $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_j\}$ formada por vectores reales ($\tilde{e}_j \in \mathbb{R}^N$).

5. [Sistemas de coeficientes constantes.] Sea A matriz compleja $n \times n$ que posee n autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

- a) Dar una condición necesaria y suficiente para que:

$$x(t) = e^{\lambda t} w \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad w \in \mathbb{C}^n$$

sea solución de la ecuación (sistema):

$$x' = Ax.$$

- b) Hallar un sistema fundamental de soluciones $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de la ecuación:

$$x' = Ax$$

- c) Hallar la solución general de la ecuación $x' = Ax$ y resolver el problema de valor inicial $x(0) = (3, 0)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- d) Hallar la solución general de la ecuación $x' = Ax$ y resolver el problema de valor inicial $x(0) = (0, -b, -b)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- e) Hallar la solución general de la ecuación $x' = Ax$ y resolver el problema de valor inicial $x(0) = (1, 1)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.3. Algunas soluciones

Soluciones del Ejercicio 2. Proporcionamos solamente las raíces del polinomio característico.

1. $x'' + x' - 6x = 0$, $q(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$.
2. $x^{iv} + 5x'' - 36x = 0$, $q(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda^2 + 9)$.
3. $x''' + 2x'' - 5x' - 6x = 0$, $q(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 3)$.
4. $x'' - 2x' + 5x = 0$, $\lambda = 1 \pm 2i$.
5. $x^{(iv)} - x''' - 9x'' - 11x' - 4x = 0$, $q(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda + 1)^3$.
6. $x''' + 4x = 0$, $\lambda = \sqrt[3]{4}e^{\frac{\pi}{3}i}e^{\frac{2k\pi}{3}i}$, $k = 0, 1, 2$, $e^{\frac{\pi}{6}i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
7. $x^{(vi)} + 9x^{(iv)} + 24x'' + 16x = 0$, $q(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4)^2$.

8. $(D^2 - 2D + 5)^2 x = 0$, $\lambda = 1 \pm 2i$ dobles (ver más arriba).

Soluciones del Ejercicio 3. Representando $\dot{} = \frac{d}{d\tau}$ se tiene:

$$tx' = \dot{x}, \quad t^2 x'' = \ddot{x} - \dot{x}, \quad t^3 x''' = \frac{d^3 x}{d\tau^3} - 3\ddot{x} + 2\dot{x}.$$

Efectuando los cambios correspondientes se tienen los siguientes resultados.

1. $t^2 x'' - 3tx' + 4x = 0$, $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$, $q(\lambda) = (\lambda - 2)^2$.
2. $t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0$, $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$, $q(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$.
3. $t^3 x''' + tx' - x = 0$, $\frac{d^3 x}{d\tau^3} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = 0$, $q(\lambda) = (\lambda - 1)^3$.
4. $(t+1)^2 x'' + (t+1)x' - x = 0$. Hacemos $\xi = t+1 = e^\tau$. Se obtiene $\ddot{x} - x = 0$.
5. $(2t+1)^2 x'' - 2(2t+1)x' - 12x = 0$. Hacemos $\xi = 2t+1 = e^\tau$. Se obtiene $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$.

Por ejemplo, en el caso 1) la solución final es:

$$x = c_1 e^{2\tau} + c_2 \tau e^{2\tau} = c_1 t^2 + c_2 t^2 \log t.$$

4.2.4. Fórmula de variación de las constantes

Sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0.$$

Se considera la función $x(t)$ definida por

$$x_p(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n(t)\varphi_n(t),$$

donde las $c_i(t)$ satisfacen el sistema:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Para $f \in C((a, b), \mathbb{C})$ la función $x_p(t)$ define una solución de la ecuación no homogénea:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t). \quad (4.4)$$

Las funciones $c_i(t)$ se pueden elegir de forma que $c_i(t_0) = 0$ con lo que $x^{(i)}(t_0) = 0$ para $i = 0, \dots, n-1$. Con mayor precisión:

$$c_i(t) = \int_{t_0}^t \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) ds,$$

donde $W_i(s)$ es el menor complementario del elemento $n-i$ en el Wronskiano W .

Teorema 4.12 (Fórmula de variación de las constante). *Bajo las condiciones precedentes la solución general de la ecuación (4.4) es*

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) + x_p(t),$$

con

$$x_p(t) = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \frac{W_i(s)}{W(s)} f(s) \varphi_i(t) ds.$$

Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ es un sistema fundamental normalizado en $t = t_0$ la solución de (4.4) junto con las condiciones iniciales.

$$x(t_0) = x_{01}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n},$$

es:

$$x(t) = x_{01}\varphi_1(t) + \cdots + x_{0n}\varphi_n(t) + x_p(t),$$

4.2.5. Ejercicios

1. Usar el método de variación de las constantes para calcular una solución de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} x''' + 3x'' - 4x = te^{-2t} & x'' + (a+b)x' + abx = f(t) \\ x'' + 4x = 2 \cos t \cos 3t & y''' - y' = x \\ y''' - 8y = e^{ix} & y^{(iv)} + 16y = \cos x \\ y^{(iv)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^x & y^{(iv)} - y = \cos x \\ y'' - 2iy' - y = e^{ix} - 2e^{-ix}. & \end{array}$$

4.2.6. Método de coeficientes indeterminados

Se consideran los operadores diferenciales lineales de coeficientes constantes:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^n a_k D^k \quad \mathcal{L}_1 = \sum_{l=0}^m b_l D^l.$$

El objetivo de la sección es hallar una solución particular de la ecuación:

$$\mathcal{L}x = f(t), \tag{4.5}$$

cuando se admite que la función f cumple:

$$\mathcal{L}_1(f) = 0.$$

En la práctica, para una f dada será necesario encontrar un tal operador $\mathcal{L}_1$ (determinando sus coeficientes). Por otro lado los candidatos a f se limitan necesariamente a productos de polinomios por exponenciales e^{at} y funciones $\sin(bt)$, $\cos(bt)$.

En primer lugar se tiene que si x satisface (4.5) y $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}$ entonces:

$$\mathcal{L}_2x = 0.$$

Asimismo, es fácil comprobar que el polinomio característico de $\mathcal{L}_2$ es el producto de los correspondientes polinomios de $\mathcal{L}(q)$ y $\mathcal{L}_1(q_1)$. El método de coeficientes indeterminados consiste en hallar una solución de (4.5) buscando entre las soluciones de $\mathcal{L}_2 x = 0$.

Un primer caso:

$$\mathcal{L}(x) = t^m e^{\alpha t} \quad q(\alpha) \neq 0.$$

Se toma $q_1(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{m+1}$ y la solución particular se busca en la forma:

$$x_p(t) = r(t)e^{\alpha t} \quad r(t) = c_0 + \cdots + c_m t^m.$$

Análogamente, si $q(\alpha \pm i\beta) \neq 0$ para

$$\mathcal{L}(x) = t^m e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{ó} \quad \mathcal{L}(x) = t^m e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

se busca la solución particular en la forma:

$$x_p(t) = r_1(t)e^{\alpha t} \cos \beta t + r_2(t)e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

con $r_1(t)$ y $r_2(t)$ polinomios de la forma $r(t) = c_0 + \cdots + c_m t^m$.

La situación se complica cuando

$$\mathcal{L}(x) = t^m e^{\alpha t}$$

y $\lambda = \alpha$ es raíz de orden k de $q(\lambda)$. Al tomar $q_1(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{m+1}$ resulta que $\lambda = \alpha$ es raíz de orden $m + k + 1$ de $q_2(\lambda)$. En este caso la solución particular debe buscarse en la forma:

$$x_p(t) = t^k r(t)e^{\alpha t}, \quad r(t) = c_0 + \cdots + c_m t^m,$$

mientras que si buscamos una solución particular de:

$$\mathcal{L}(x) = t^m e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{ó} \quad \mathcal{L}(x) = t^m e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

y $\lambda = \alpha \pm i\beta$ es raíz de orden k de $q(\lambda)$ las correspondientes soluciones particulares se buscan en la forma:

$$x_p(t) = t^k r_1(t)e^{\alpha t} \cos \beta t + t^k r_2(t)e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

con $r_1(t)$ y $r_2(t)$ polinomios de la forma $r(t) = c_0 + \cdots + c_m t^m$.

4.2.7. Ejercicios

1. Hallar una solución particular de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} y'' + 4y = \cos x & y'' - y' - 2y = x^2 + \cos x \\ y'' + 4y = \sin 2x & y'' + 9y = x^2 e^{3x} \\ y'' - 4y = 3e^{2x} + 4e^{-x} & y'' + y = x e^x \cos 2x \\ y'' + iy' + 2y = 2 \cosh 2x + e^{-2x} & y''' = x^2 + e^{-x} \sin x. \\ y''' + 3y'' + 3y' + y = x^2 e^{-x} & \end{array}$$

2. Se considera el operador:

$$\mathcal{L}y = y'' + a_1y' + a_2y \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Sea ω tal que $p(\pm i\omega) \neq 0$ con p el polinomio característico de $\mathcal{L}$.

a) Demuéstrese que para $A \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(y) = Ae^{i\omega t}$ admite una solución de la forma:

$$\phi(x) = \frac{a}{|p(i\omega)|} e^{i(\omega t - \alpha)},$$

donde $p(i\omega) = |p(i\omega)| \exp(i\alpha)$.

b) Sea $\phi = \phi(t)$ una solución de $\mathcal{L}(y) = Ae^{i\omega t}$ mientras $\phi_1 = \Re\phi$, $\phi_2 = \Im\phi$. Pruébese que $\mathcal{L}(\phi_1) = A \cos \omega t$, $\mathcal{L}(\phi_2) = A \sin \omega t$.

c) Sean L, R, C, E, ω constantes positivas. Se considera el operador

$$\mathcal{L}(y) = Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y$$

en el que se supone $p(\pm\omega i) \neq 0$. Pruébese que la ecuación

$$\mathcal{L}(y) = E \cos \omega t,$$

admite una solución de la forma $\phi(t) = B \cos(\omega t - \alpha)$.

d) Supóngase que $R^2C < 2L$. Hállese el valor de ω para el que B es máximo en c). En estas condiciones, ¿Cuál es el comportamiento de todas las soluciones de la ecuación cuando $t \rightarrow \infty$?

3. (Resonancia). Se considera la ecuación

$$y'' + \omega^2 y = A \cos \omega t \quad A > 0, \omega > 0.$$

a) Calcúlense sus soluciones en $t \geq 0$.

b) Estúdiese el comportamiento de las soluciones cuando $t \rightarrow +\infty$.

c) Dibújese la gráfica de la solución $\phi(x)$ correspondiente a $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$.

4.2.8. Algunas soluciones

Soluciones del Ejercicio 1.

1. $y'' + 4y = \cos x$, $y = \frac{1}{3} \cos x$.

2. $y'' + 4y = \sin 2x$, $y = -\frac{x}{4} \cos 2x$.

3. $y'' - 4y = 3e^{2x} + 4e^{-x}$, $y = \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{-x}$.

4. $y'' + iy' + 2y = 2 \cosh 2x + e^{-2x}$, $q(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + 2i)$, $y = \frac{1}{20}(3 - i)e^{2x} + \frac{1}{10}(3 + i)e^{-2x}$.
5. $y''' + 3y'' + 3y' + y = x^2 e^{-x}$, $q(\lambda) = (\lambda + 1)^3$, $y = \frac{1}{60}x^5 e^{-x}$.
6. $y'' - y' - 2y = x^2 + \cos x$, $q(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$, $y = \frac{3}{4} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{\sin x}{10} - 3\frac{\cos x}{10}$.
7. $y'' + 9y = x^2 e^{3x}$, $y = \{\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{1}{162}\}e^{3x}$.
8. $y'' + y = x e^x \cos 2x$, $y = -\frac{1}{25}e^x \sin 2x + \frac{1}{5}x e^x \sin 2x + \frac{11}{50}e^x \cos 2x + \frac{1}{10}x e^x \cos 2x$.
9. $y''' = x^2 + e^{-x} \sin x$, $y = \frac{x^5}{60} + \frac{e^{-x}}{4}(\sin x - \cos x)$.

En el caso 5) se tiene:

$$\mathcal{L}(t^5 e^{\lambda t}) = \binom{5}{0} q^{(5)}(\lambda) e^{\lambda t} + \binom{5}{1} q^{(4)}(\lambda) t e^{\lambda t} + \binom{5}{2} q^{(3)}(\lambda) t^2 e^{\lambda t} + \dots$$

Haciendo $\lambda = -1$:

$$\mathcal{L}(t^5 e^{-t}) = 60t^2 e^{-t}.$$

En el caso 9) para resolver:

$$y''' = e^{-x} \sin x,$$

llamamos $\lambda = -1 + i$ y observamos que:

$$\left(\Im \left(\frac{e^{\lambda x}}{\lambda^3} \right) \right)''' = \Im(e^{\lambda x}).$$

Se tiene

$$\lambda^3 = 2(1 + i),$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^3} &= \frac{1}{2} \frac{e^{\lambda x}}{1 + i} = \frac{e^{-x}}{4} (1 - i)(\cos x + i \sin x) \\ &= \frac{e^{-x}}{4} (\cos x \sin x + i(\sin x - \cos x)). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\Im \left(\frac{e^{\lambda x}}{\lambda^3} \right) = \frac{e^{-x}}{4} (\sin x - \cos x).$$

Una solución de $y''' = x^2$ es $y = \frac{x^5}{60}$.

4.3. Sistemas

4.3.1. Representación matricial de soluciones

Definición 4.13. Dado un sistema de n vectores de $\mathbb{R}$, $\{v_1, \dots, v_n\}$, denotaremos por

$$\text{col } [v_1, \dots, v_n]$$

a la matriz $n \times n$ cuya columna i -ésima es la matriz columna de coordenadas de v_i , $1 \leq i \leq n$.

Observación 4.4. Una propiedad que resulta útil. Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ entonces:

$$A \text{ col } [v_1, \dots, v_n] = \text{col } [Av_1, \dots, Av_n]$$

A lo largo de la sección se mantienen las hipótesis de existencia y unicidad. A saber, $t \mapsto A(t)$, $t \mapsto b(t)$ son funciones continuas con valores en $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ y $\mathbb{C}^n$, respectivamente, donde $t \in J = (\alpha, \beta)$.

Definición 4.14. Sea $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ un sistema fundamental de soluciones de $x' = A(t)x$. La matriz:

$$\Phi(t) = \text{col } [\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)],$$

se denomina una matriz fundamental de la ecuación. Para $t_0 \in (\alpha, \beta)$ se dice que la matriz fundamental $\Phi(t)$ está normalizada en t_0 si $\Phi(t_0) = I$ (la identidad).

Propiedad 4.15. Sea $\Phi : (\alpha, \beta) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})$ una función matricial de clase C^1 . Entonces son equivalentes:

- i) $\Phi(t)$ es una matriz fundamental.
- ii) $\Phi(t)$ satisface la ecuación matricial:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t).$$

y $\Phi(t)$ es invertible para cada t .

- iii) $\Phi(t)$ satisface la ecuación matricial:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t).$$

y existe $t_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que $\Phi(t_0)$ es invertible.

Demostración. Se comprueba inmediatamente que el que las columnas de la matriz $\Phi(t)$ sean soluciones equivale a que $\Phi(t)$ sea solución de la ecuación matricial. La propiedad es consecuencia de este hecho. $\square$

Observación 4.5. Si $x(t)$ es una solución de la ecuación

$$x' = A(t)x$$

y $\Phi(t)$ es una matriz fundamental entonces existe $c \in \mathbb{C}^n$:

$$x(t) = \Phi(t)c$$

con $c = (c_1, \dots, c_n)^t$, es decir la matriz columna:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Propiedad 4.16. Sean $\Phi, \Psi : (\alpha, \beta) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})$ funciones matriciales de clase C^1 .

- i) Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental y $C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ es una matriz invertible entonces $\Psi(t) = \Phi(t)C$ es también una matriz fundamental.
- ii) Si $\Psi(t)$ y $\Phi(t)$ son matrices fundamentales entonces existe $C \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, matriz invertible, tal que $\Psi(t) = \Phi(t)C$ para todo t .

Demostración. Para i) es claro que $\Psi(t)$ es invertible mientras que:

$$\Psi'(t) = \Phi'(t)C = A(t)\Phi(t)C = A(t)\Psi(t).$$

En el caso de ii) denotamos $\psi_i(t)$ la i -ésima columna de $\Psi(t)$ y como $\Phi(t)$ es una matriz fundamental, existe un vector columna c^i (ver la Observación previa) tal que:

$$\psi_i(t) = \Phi(t)c^i.$$

Formando la matriz $C = \text{col } [c^1, \dots, c^n]$ resulta inmediato que:

$$\Psi(t) = \Phi(t)C,$$

para todo t . □

Observaciones 4.6.

- a) De la propiedad se deduce que toda ecuación lineal admite infinitas matrices fundamentales. Por otra parte que esto cierto ya es consecuencia de que la ecuación admite infinitos sistemas fundamentales de soluciones.
- b) De la propiedad se deduce que si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental entonces $\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}$ es una matriz fundamental normalizada en t_0 .

Teorema 4.17. Sean $A = A(t)$ una función matricial continua definida en un intervalo $J = (\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}$, $b : J \rightarrow \mathbb{C}^n$ una función continua y $\Phi(t)$ una matriz fundamental de la ecuación $x' = A(t)x$. Entonces, la solución general $x(t, t_0, x_0)$ del problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se puede escribir en la forma

$$x(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0, \quad t \in J.$$

Análogamente, la solución del problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite la representación (fórmula de variación de las constantes):

$$x(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}b(s) \, ds \quad t \in J.$$

Teorema 4.18 (Identidad de Jacobi). *Sea $\Phi(t)$ cualquier función matricial que cumpla la ecuación:*

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t).$$

Entonces su determinante:

$$z(t) = \det \Phi(t)$$

satisface la ecuación diferencial

$$z' = (\text{traza } A(t))z.$$

En otras palabras,

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{traza } A(s) \, ds \right).$$

Demostración. Como:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t),$$

si

$$\varphi_i(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1i}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{ni}(t) \end{pmatrix}$$

denota la i -ésima columna de $\Phi(t)$ entonces:

$$\varphi'_{ij} = a_{ik}\varphi_{kj},$$

donde se suma en el índice repetido.

Así:

$$\begin{aligned} (\det \Phi(t))' &= \begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \varphi'_{12} & \cdots & \varphi'_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{n1} & \varphi'_{n2} & \cdots & \varphi'_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{1k}\varphi_{k1} & a_{1k}\varphi_{k2} & \cdots & a_{1k}\varphi_{kn} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk}\varphi_{k1} & a_{nk}\varphi_{k2} & \cdots & a_{nk}\varphi_{kn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{nn} \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \text{traza } A(t) \det \Phi(t).
\end{aligned}$$

□

Observación 4.7. Es consecuencia de la propiedad que si $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ es una familia de n soluciones de la ecuación:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0$$

entonces el Wronskiano $W(t) = W(x_1, \dots, x_n)(t)$ satisface la ecuación lineal,

$$W'(t) = -a_1(t)W(t).$$

Esta propiedad se sigue del teorema anterior cuando interpretamos la ecuación de orden n como un sistema.

Observación 4.8. En ecuaciones como $x'' + x = 0$, $x'' - x = 0$, $x'' - t^2x = 0$ o más generalmente

$$x'' + a(t)x = 0,$$

se sigue que el Wronskiano $W(t)$ de dos soluciones es siempre constante.

4.3.2. Eliminación

Antes de abordar el estudio del caso general presentamos algunas ideas sencillas sobre eliminación que permiten integrar sistemas de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes.

La idea consiste en reducir el sistema a una ecuación escalar. En el caso de dos ecuaciones, por ejemplo, se despeja una función incógnita en una de las ecuaciones y se substituye en la otra.

Ejemplo 4.9. El sistema:

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 4x - 7y. \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} 4y = -x' + 3x \\ y' = 4x - 7y. \end{cases}$$

La última ecuación es:

$$4y' + 28y = 16x \quad \Leftrightarrow \quad (-x' + 3x)' + 7(-x' + 3x) = 16x.$$

La solución de ésta es $x = c_1 e^t + c_2 e^{-5t}$ de donde $y = \frac{c_1}{2} e^t + 2c_2 e^{-5t}$.

Ejemplo 4.10. Más generalmente, el sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t) \\ y' = cx + dy + g(t) \end{cases}$$

se expresa, supuesto que $b \neq 0$, en la forma

$$\begin{cases} y = b^{-1}(\mathcal{L}_1(x) - f(t)) \\ -cx + \mathcal{L}_4(y) = g(t), \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} y = b^{-1}(\mathcal{L}_1(x) + f(t)) \\ b^{-1}\mathcal{L}_4(\mathcal{L}_1(x)) - cx = g(t) + b^{-1}\mathcal{L}_4(f). \end{cases}$$

donde $\mathcal{L}_1(x) = x' - ax$, $\mathcal{L}_4(y) = y' - dy$.

La misma estrategia se usa en sistemas de tres ecuaciones:

Ejemplo 4.11.

$$\begin{cases} x' = 4x + y + z \\ y' = 2x + 3y + z \\ z' = 2x - y + 5z. \end{cases}$$

En la segunda despejamos z :

$$z = \mathcal{L}(y) - 2x, \quad \mathcal{L}(y) = y' - 3y.$$

Yendo a la primera:

$$x' - 4x - y - (\mathcal{L}(y) - 2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' - 2x - (y' - 2y) = 0.$$

Usando la tercera ecuación:

$$(\mathcal{L}(y) - 2x)' - 5(\mathcal{L}(y) - 2x) - 2x + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(x' - 4x) + y'' - 8y' + 16y = 0.$$

El sistema resultado de la eliminación tiene entonces la forma:

$$\begin{cases} x' - 2x - (y' - 2y) = 0 \\ -2(x' - 4x) + y'' - 8y' + 16y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(y) = 0 \\ \mathcal{L}_3(x) + \mathcal{L}_4(y) = 0, \end{cases}$$

donde: $\mathcal{L}_1(x) = x' - 2x$, $\mathcal{L}_2(y) = -(y' - 2y)$, $\mathcal{L}_3(x) = -2(x' - 4x)$, $\mathcal{L}_4(y) = y'' - 8y' + 16y$. Más abajo indicamos como eliminar x .

Esta filosofía permite dar tratamiento directo a un buen número de problemas.

Ejercicios

1. Usar el método de eliminación para hallar la solución general de los siguientes sistemas:

$$1) \quad \begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 4x - 7y, \end{cases} \quad 2) \quad \begin{cases} x' = ay \\ y' = (4a + 1)x - y, \end{cases} \quad a > 0,$$

$$3) \quad \begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x, \end{cases} \quad 3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y + 5t \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y + 17t. \end{cases}$$

2. Resolver usando eliminación los sistemas:

$$1) \quad \begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = 3x + 3y - z, \end{cases} \quad 2) \quad \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y. \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} x' = x + z + e^t \\ y' = 2y \\ z' = x + z, \end{cases} \quad 4) \quad \begin{cases} x' = 3x - z + e^t \\ y' = 4y + z \\ z' = -2y + 2z, \end{cases}$$

$$5) \quad \begin{cases} x' = x - 2y - 2z + 2e^t \\ y' = -2x + y + 2z + 4e^t \\ z' = 2x + 2y + z - 2e^t. \end{cases}$$

Algunas soluciones

Solución 2

Para 1) se despeja z en la primera ecuación y se sustituye en las otras dos para llegar a:

$$\begin{cases} x' - 2x - y' + y = 0 \\ (x' - 2x)' - y' + 2y = 0. \end{cases}$$

De aquí:

$$(y' - y)' = y' - 2y \quad \Leftrightarrow \quad y'' - 2y' + 2y = 0,$$

luego

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1,$$

con lo que

$$y' - y = c_1(\lambda_1 - 1)e^{\lambda_1 t} + c_2(\lambda_2 - 1)e^{\lambda_2 t}.$$

Para calcular x se resuelve:

$$x' - 2x = c_1(\lambda_1 - 1)e^{\lambda_1 t} + c_2(\lambda_2 - 1)e^{\lambda_2 t},$$

para dar:

$$x = c_1 \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - 2} e^{\lambda_1 t} + c_2 \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - 2} e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{2t}.$$

Finalmente, z sale de la relación:

$$z = y - (x' - 3x).$$

Para 2) se sugiere buscar ecuaciones en $x - z$ e $y - z$. Así:

$$\begin{cases} (x - y)' = -(x - y) \\ (x - z)' = -(x - z), \end{cases}$$

de donde:

$$x - y = c_1 e^{-t} \quad x - z = c_2 e^{-t},$$

que combinado con el sistema original nos lleva a resolver:

$$x' = 2x - (c_1 + c_2)e^{-t}$$

cuya solución es:

$$x = \frac{1}{3}(c_1 + c_2)e^{-t} + c_3 e^{2t}.$$

Caso general

El modelo general es:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(y) = f(t) \\ \mathcal{L}_3(x) + \mathcal{L}_4(y) = g(t), \end{cases} \quad (4.6)$$

donde los $\mathcal{L}_i$ son operadores diferenciales con coeficientes constantes. En los ejemplos 4.9 y 4.10 los $\mathcal{L}$ son de primer orden como mucho. Concretamente en 4.10, $\mathcal{L}_1(x) = x' - ax$, $\mathcal{L}_2(y) = -by$, $\mathcal{L}_3(x) = -cx$ y $\mathcal{L}_4(y) = y' - dy$. En el Ejemplo 4.11, los operadores son de primer y segundo orden.

En el sistema (4.6) procedemos a eliminar x como sigue:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(y) = f(t) \\ \mathcal{L}_3(x) + \mathcal{L}_4(y) = g(t), \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(y) = f \\ \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_4(y) - \mathcal{L}_3 \circ \mathcal{L}_2(y) = \mathcal{L}_1(g) - \mathcal{L}_3(f). \end{cases}$$

De forma esquemática

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(y) = f \\ \mathcal{L}_1 \circ (II) - \mathcal{L}_3 \circ (I) = 0 \end{cases}$$

donde (I) y (II) representan las ecuaciones del sistema original (4.6) con los términos f, g en el primer miembro.

En el sistema integramos la segunda ecuación para obtener $y(t) = y(t, C) + \psi(t)$ y el resultado se lleva a la primera resolviendo en x : $x(t) = x(t, C, C') + \varphi(t)$. En la expresión de $y(t)$, C representa las r constantes de la solución homogénea, r dado por el grado del operador $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_4 - \mathcal{L}_3 \circ \mathcal{L}_2$. El término C' representa las m_1 constantes de la solución homogénea correspondiente a $\mathcal{L}_1$.

Sin embargo $x(t)$ e $y(t)$ no proporcionan en principio la solución del sistema original sino que:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(y) = f \\ \mathcal{L}_1 \circ (\mathcal{L}_3(x) + \mathcal{L}_4(y) - g) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Para garantizar que $x(t)$ e $y(t)$ resuelven el sistema original se sustituyen las expresiones de $x(t)$ e $y(t)$ calculadas en la segunda ecuación de (4.7) y se imponen las relaciones:

$$(\mathcal{L}_3(x) + \mathcal{L}_4(y) - g)_{t=0}^{(j)} = 0 \quad 0 \leq j \leq m_1 - 1,$$

donde m_1 es el orden de $\mathcal{L}_1$. Esto permite por un lado suprimir $\mathcal{L}_1$ en el primer miembro de la segunda ecuación de (4.7). Por otra parte las relaciones anteriores conforman un sistema de m_1 ecuaciones con $m_1 + s$ incógnitas, las C y C' . Estas relaciones permiten, en general, la eliminación de las constantes superfluas que se introdujeron al aplicar los operadores $\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_1$ a las ecuaciones de (4.6).

Debe sin embargo advertirse que el formato del sistema (4.6) no concuerda con el de la teoría general de existencia y unicidad del Capítulo II pues no están despejadas las derivadas de orden máximo de x e y . En particular, el sistema puede ser incompatible si el operador $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_4 - \mathcal{L}_3 \circ \mathcal{L}_2$ es idénticamente cero.

Ejemplo 4.12. El sistema:

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + t \\ y' = 4x - 7y + e^{-t} \end{cases} \sim \begin{cases} x' - 3x + 4y = t \\ -4x + y' + 7y = e^{-t}. \end{cases}$$

Ahora $\mathcal{L}_1 = D - 3$, $\mathcal{L}_2 = 4$ y tras eliminar x obtenemos:

$$\begin{cases} x' - 3x + 4y = t \\ (D - 3)(D + 7)y + 16y = 4t - 4e^{-t}. \end{cases}$$

La segunda ecuación es:

$$y'' + 4y' - 5y = 4t - 4e^{-t}$$

y su solución general es:

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-5t} - \frac{16}{25} - \frac{4t}{5} + \frac{1}{2} e^{-t} = c_1 e^t + c_2 e^{-5t} + g(t).$$

Yendo a la primera ecuación sustituyendo $y(t)$ e integrando obtenemos:

$$x = 2c_1 e^t + \frac{c_2}{2} e^{-5t} + c_3 e^{3t} + f(t),$$

con

$$f(t) = -\frac{64}{75} + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{7}{5} \left(t + \frac{1}{3} \right).$$

Sustituyendo x e y en la segunda ecuación del sistema:

$$-4x + y' + 7y = e^{-t}$$

y haciendo $t = 0$ obtenemos el valor de c_3 :

$$c_3 = -\frac{4f(0) + 1 - (g'(0) - 7g(0))}{4}.$$

Ejemplo 4.13. El sistema resultante del Ejemplo 4.11 es:

$$\begin{cases} x' - 2x - (y' - 2y) = 0 \\ -2(x' - 4x) + y'' - 8y' + 16y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(y) = 0 \\ \mathcal{L}_3(x) + \mathcal{L}_4(y) = 0. \end{cases}$$

La eliminación da:

$$(\mathcal{L}_1\mathcal{L}_4 - \mathcal{L}_2\mathcal{L}_3)(y) = (D - 2)(D^2 - 10D + 24)(y).$$

La solución de:

$$(D - 2)(D^2 - 10D + 24)(y) = 0$$

es:

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} + C_3e^{6t}.$$

De ahí:

$$\mathcal{L}_1(x) = 2C_2e^{4t} + 4C_3e^{6t},$$

de donde:

$$x = C_2e^{4t} + C_3e^{6t} + C_4e^{2t}.$$

Hay que eliminar una de las constantes. Por tanto, como $\mathcal{L}_1$ tiene orden uno, sustituimos los valores de x e y en la segunda ecuación y hacemos $t = 0$, obteniendo:

$$-(C_3 - C_4) + C_1 + C_3 = 0,$$

luego $C_4 = -C_3$. Finalmente:

$$z = C_1e^{2t} - C_2e^{4t} + C_3e^{6t}.$$

Ejercicios

1. Usar el método de eliminación para hallar la solución general de los siguientes sistemas:

$$1) \quad \begin{cases} x'' + y' - x + y = 1 \\ x' + y' - x = t^2, \end{cases} \quad 2) \quad \begin{cases} x' + y' - x = 5 \\ x' + y' + y = 1, \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} (D + 1)[x] - (D + 1)[y] = e^t \\ (D - 1)[x] + (2D + 1)[y] = 5, \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} x' + y' + 2x = 0 \\ x' + y' - x - y = \sin t, \end{cases} \quad 5) \quad \begin{cases} D^2[x] + D[y] = 2 \\ 4x + D[y] = 6, \end{cases}$$

$$6) \quad \begin{cases} x' + y' = t^2 \\ -x + y' = 1, \end{cases} \quad 7) \quad \begin{cases} y'' + x' + x = \sin t \\ y' - y + x = 0, \end{cases}$$

4.3.3. Exponencial de un operador lineal

Si $(X, |\cdot|)$ un espacio de Banach, $\mathcal{L}(X)$ designa el espacio de las aplicaciones lineales y continuas $T : X \rightarrow X$. Se sabe (Capítulo II) que $\mathcal{L}(X)$ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|T(x)|}{|x|}.$$

Es consecuencia de la definición de $\|\cdot\|$ (Capítulo II) que:

$$|T(x)| \leq \|T\| |x|$$

para todo $x \in X$. Por otro lado si $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X)$ entonces:

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|.$$

El paralelismo entre matrices y aplicaciones lineales en $\mathbb{C}^n$ habilita un camino natural para dotar al espacio de las matrices $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ de una norma asociada a cualquier norma $|\cdot|$ de $\mathbb{C}^n$. A saber:

$$\|A\| = \inf\{K > 0 : |Ax| \leq K|x| \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (4.8)$$

Dicha norma satisface por tanto las propiedades:

1) Para $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ se tiene

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

2) $|Ax| \leq \|A\| |x|$.

Sin embargo $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ es también isomorfo al espacio $\mathbb{C}^{n^2}$. Por tanto se puede dotar a las matrices de una multitud de normas (todas ellas equivalentes entre sí). Sin embargo estas normas no son adecuadas para nuestros propósitos. La siguiente definición resulta entonces pertinente. Dada una norma $|\cdot|_*$ en $\mathbb{C}^n$ y una norma $\|\cdot\|_*$ en $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ se dice que son *compatibles* si se cumplen las propiedades 1) y 2) cuando $|\cdot|_*$ y $\|\cdot\|_*$ reemplazan a $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$. Nótese que la norma $\|\cdot\|$ definida en (4.8) es siempre compatible con la norma $|\cdot|$.

En lo que sigue se supone siempre que las matrices están dotadas de una norma $\|\cdot\|$ compatible con una dada $|\cdot|$ de $\mathbb{C}^n$.

Ejemplo 4.14. Las normas $\|A\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$ y $|x|_\infty = \max |x_i|$ son compatibles.

Definición 4.19. Sea $(X, |\cdot|)$ un espacio de Banach. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge a x si

$$x = \lim S_N,$$

donde $S_N = \sum_{n=1}^N x_n$.

Proposición 4.20. Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente en X :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge y además:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Proposición 4.21. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie convergente en X con suma x :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

y $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n).$$

Observación 4.15. Una aplicación bilineal

$$\begin{aligned} B : \quad X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto B(x, y) \end{aligned}$$

es aquella que es lineal separadamente en cada una de las variables. Toda aplicación bilineal que es continua satisface:

$$|B(x, y)| \leq K|x||y|$$

para cierta constante $K > 0$ y $x, y \in X$ arbitrarios. De hecho se define la norma $\|B\|$ de B como el ínfimo de las constantes M que satisfacen la relación anterior.

El siguiente resultado es una generalización a espacios de Banach del célebre resultado sobre la convergencia del producto de Cauchy de dos series absolutamente convergentes.

Teorema 4.22. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ series absolutamente convergentes en un espacio de Banach X con sumas x e y respectivamente, y sea $B : X \times X \rightarrow X$ una aplicación bilineal y continua.

Se define la serie producto $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ mediante la relación:

$$z_n = \sum_{k=1}^n B(x_k, y_{n-k}).$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente y

$$B(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Teorema 4.23. Sea $(X, |\cdot|)$ un espacio de Banach, y sea $T : X \rightarrow X$ un operador lineal y continuo. Entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}$$

converge absolutamente en $\mathcal{L}(X)$. Además

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \right\| < \exp(\|T\|).$$

Definición 4.24. Dado $T \in \mathcal{L}(X)$, se define la exponencial e^T del operador T a la suma (en $\mathcal{L}(X)$) de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}.$$

Por el mismo principio si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ se define

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Teorema 4.25 (Propiedades de la exponencial). Sean $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ entonces,

a) $e^0 = I$ (la matriz identidad $n \times n$).

b) Si $AB = BA$ entonces

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

c) e^A es invertible y $\{e^A\}^{-1} = e^{-A}$.

d) Si $AB = BA$ entonces

$$B^k e^A = e^A B^k \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

e) La función

$$\begin{array}{ccc} \Phi : & \mathbb{R} & \longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C}) \\ & t & \longmapsto e^{tA} \end{array}$$

es C^∞ . Además,

$$\frac{d^k}{dt^k}(e^{tA}) = A^k e^{tA} = e^{tA} A^k.$$

Teorema 4.26. Dada la matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, la función e^{tA} es una matriz fundamental de la ecuación,

$$x' = Ax.$$

En particular, la única solución del problema

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se escribe

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0.$$

Análogamente, para $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ continua, la única solución del problema

$$\begin{cases} x' = Ax + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se representa en la forma:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s) ds.$$

4.4. La forma canónica de Jordan. Cálculo de la exponencial de una matriz

Propiedad 4.27. Sean $J, P \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, P invertible. Entonces,

$$(P^{-1}JP)^n = P^{-1}J^nP,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular,

$$e^{P^{-1}JP} = P^{-1}e^JP.$$

La propiedad sugiere la estrategia para simplificar el cálculo de e^A . La idea consiste en hallar, para una matriz A dada, una matriz invertible P tal que

$$A = P^{-1}JP,$$

y de forma que J sea lo más sencilla posible en el sentido de que J tenga el mayor número de ceros posible.

He aquí la exponencial de algunas matrices sencillas.

Proposición 4.28. Se satisfacen las siguientes propiedades.

1. Exponencial de una matriz diagonal:

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}).$$

En particular:

$$\exp t \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

2. Sea L_n la matriz $n \times n$ dada por,

$$L_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$e^{tL_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \cdots & t & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Si A es una matriz diagonal por bloques:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_p \end{pmatrix}$$

(siendo los bloques matrices cuadradas) entonces,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tA_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tA_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{tA_p} \end{pmatrix}.$$

Observación 4.16. El problema de representar $A = P^{-1}JP$, J con el máximo número de ceros posible, así como el de encontrar la matriz P nos lleva al de la representación matricial de T y a los conceptos de autovalor y autovector.

Se considera un operador lineal $T \in L(\mathbb{C}^n)$, o lo que es lo mismo una matriz compleja $n \times n$, A . Se dice que $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ es un autovector de T asociado a un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ si

$$v \in N(T - \lambda I) \quad \Leftrightarrow \quad Tv = \lambda v.$$

El espacio $N(T - \lambda I)$ se suele representar como V_λ y se denomina multiplicidad geométrica de λ al número

$$\gamma = \dim N(T - \lambda I).$$

Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ es la matriz asociada a T en una base $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq n$, los autovalores λ son las raíces del polinomio característico:

$$q(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de $T \in L(\mathbb{C}^n)$ se define el índice (o ascendente) ν de λ como el mínimo de los números naturales k tales que

$$N(T - \lambda I)^k = N(T - \lambda I)^{k+1}.$$

En este caso, el subespacio

$$N(T - \lambda I)^\nu,$$

que contiene al autoespacio $N(T - \lambda I)$, se denomina el autoespacio generalizado asociado a λ . Se denomina multiplicidad algebraica del autovalor λ al número

$$\dim N(T - \lambda I)^k,$$

que coincide con la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico asociado a T (es decir A).

Se dice que una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ es nilpotente de índice k si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$ con $A^{k-1} \neq 0$. El índice de A es en este caso el primer entero para el que se da la igualdad. La misma definición se aplica a un operador lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

Se denomina bloque nilpotente de índice k a la matriz $k \times k$ (que es nilpotente y de índice k) dada por

$$L_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que $L_1 = (0)$, $L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, etc.

Observación 4.17. Se demuestra que toda matriz nilpotente A de índice k se representa en la forma:

$$A = P^{-1}NP, \quad N = \begin{pmatrix} L_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & L_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L_1 \end{pmatrix}.$$

La siguiente propiedad caracteriza las aplicaciones (matrices) diagonalizables.

Teorema 4.29. Sea T un operador lineal de $L(\mathbb{C}^n)$ (o una matriz compleja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$), con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicidades geométricas $\gamma_1, \dots, \gamma_p$. Entonces existe una base $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ (una matriz invertible P) sobre la cual la matriz asociada a T (la matriz $J = PAP^{-1}$) es diagonal si y sólo si

$$\gamma_1 + \cdots + \gamma_p = n.$$

Observación 4.18. El teorema caracteriza cuándo existe una base de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores.

El siguiente resultado muestra cómo representar de manera óptima una aplicación lineal T cuando no es diagonalizable.

Teorema 4.30 (Forma Canónica de Jordan). *Sea T un operador lineal de $L(\mathbb{C}^n)$ (o una matriz compleja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$), con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, multiplicidades geométricas $\gamma_1, \dots, \gamma_p$, multiplicidades algebraicas $n_1, \dots, n_p$ e índices $\nu_1, \dots, \nu_p$. Entonces existe una base $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ (una matriz invertible P) sobre la cual la matriz asociada a T (la matriz $J = PAP^{-1}$) tiene la forma:*

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_p \end{pmatrix},$$

donde, para cada $1 \leq i \leq p$, J_i es una matriz cuadrada $n_i \times n_i$ de la forma:

$$J_i = \lambda_i I_i + N_i$$

siendo I_i la matriz identidad de dimensiones $n_i \times n_i$, y siendo N_i la forma canónica de un operador nilpotente de índice ν_i , es decir, una matriz $n_i \times n_i$ de la forma

$$\begin{pmatrix} L_{\nu_i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_{\nu_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

en la cual aparecen, en forma diagonal, una serie de r_1 bloques nilpotentes de índice ν_i , a continuación una serie de r_2 bloques nilpotentes de índice $\nu_i - 1$, y así en órdenes decrecientes hasta que se cierra la serie con r_{ν_i} bloques de índice 1 (es decir, con r_{ν_i} "ceros"). Los números r_j satisfacen además las ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_1 &= \dim N(T - \lambda_i I)^{\nu_i} - \dim N(T - \lambda_i I)^{\nu_i - 1}, \\ r_1 + r_2 &= \dim N(T - \lambda_i I)^{\nu_i - 1} - \dim N(T - \lambda_i I)^{\nu_i - 2}, \\ &\dots \\ r_1 + \dots + r_{\nu_i - 1} &= \dim N(T - \lambda_i I)^2 - \dim N(T - \lambda_i I) \\ r_1 + \dots + r_{\nu_i - 1} + r_{\nu_i} &= \dim N(T - \lambda_i I), \end{aligned}$$

en donde $n_i = \dim N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$.

Observaciones 4.19.

- a) La última línea muestra que la multiplicidad geométrica $\gamma_i = \dim N(T - \lambda_i I)$ coincide con el número total de bloques L_k que aparecen en la parte nilpotente N_i de la submatriz J_i .

- b) En la representación (4.9), la forma canónica de un operador nilpotente de índice ν_i , ha de aparecer al menos un bloque L_{ν_i} , pero no necesariamente otros bloques L_k con $k \leq \nu_i - 1$.

El problema en la práctica consiste en hallar la base $\{e'_i\}$ sobre la que T se representa bajo la forma canónica. Construyendo la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores e'_i en la base canónica, obtenemos la matriz P^{-1} que permite escribir:

$$A = P^{-1}JP.$$

Para dar con $\{e'_i\}$ se busca primero una base adecuada $\mathcal{B}_i$ del autoespacio generalizado $N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$ sobre la cual, la aplicación

$$T_i = T|_{N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}}, \quad T_i : N(T - \lambda_i I)^{\nu_i} \rightarrow N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$$

tiene como representación matricial a la matriz J_i . La base¹ $\mathcal{B}_J = \{e'_i\}$, cuya existencia se anuncia en el teorema, se forma entonces agrupando ordenadamente las bases así construidas:

$$\mathcal{B}_J = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p.$$

La construcción de las bases $\mathcal{B}_i$ y la propia prueba del teorema se apoyan en una serie de resultados que establecemos a continuación.

Teorema 4.31. *Sea T un operador lineal de $L(\mathbb{C}^n)$ (una matriz compleja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$), con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, multiplicidades geométricas $\gamma_1, \dots, \gamma_p$, multiplicidades algebraicas $n_1, \dots, n_p$ e índices $\nu_1, \dots, \nu_p$. Entonces,*

- a) *Cada autoespacio generalizado es invariante frente a T , es decir*

$$T(N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}) \subseteq N(T - \lambda_i I)^{\nu_i} \quad 1 \leq i \leq p.$$

- b) *$\mathbb{C}^n$ se factoriza como la suma de autoespacios generalizados:*

$$\mathbb{C}^n = N(T - \lambda I)^{\nu_1} \oplus \dots \oplus N(T - \lambda I)^{\nu_p}.$$

- c) *$n_i = \dim N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$ coincide con la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio característico de T .*

El siguiente lema también es un peldaño importante para la demostración del teorema.

Lema 4.32. *Sea $T \in L(\mathbb{C}^n)$, y sean U y W subespacios de $\mathbb{C}^n$ tales que*

- a)

$$\mathbb{C}^n = U \oplus W;$$

¹Más propiamente, hay una infinidad de bases que cumplen este propósito.

b) U y V son invariantes frente a T , es decir,

$$T(U) \subseteq U \quad \& \quad T(V) \subseteq V.$$

Sean $\{e_1, \dots, e_p\}$ y $\{e'_1, \dots, e'_q\}$ bases de U y V respectivamente ($p + q = n$). Sean A_1 y A_2 las matrices $p \times p$ y $q \times q$ de T , como aplicación de U en U , y de T como aplicación de V en V , respectivamente. Entonces, la matriz de T en la base $\{e_1, \dots, e_p, e'_1, \dots, e'_q\}$ es

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Como se apuntaba más arriba, la demostración del teorema de la forma canónica de Jordan procede como sigue. En función del Teorema 4.31 y del Lema 4.32 basta con encontrar una base adecuada $\mathcal{B}_i$ del autoespacio generalizado $N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$ sobre la cual, la aplicación

$$T_i = T|_{N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}}, \quad T_i : N(T - \lambda_i I)^{\nu_i} \rightarrow N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$$

tiene como representación matricial a la matriz J_i . La base, $\mathcal{B}_J$ cuya existencia se anuncia en dicho teorema, se forma mediante la reunión ordenada

$$\mathcal{B}_J = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$$

de las bases $\mathcal{B}_i$.

Para hallar la base $\mathcal{B}_i$ del autoespacio generalizado $N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$, se observa que la aplicación

$$T_i = \lambda_i I|_{N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}} + (T - \lambda_i I)|_{N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}}$$

posee en cualquier base de $N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$ la representación matricial,

$$J_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$$

para cierta matriz $n_i \times n_i$, N_i .

Como $(T - \lambda_i I)|_{N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}}$ es nilpotente de índice ν_i (luego N_i es también nilpotente del mismo índice), sólo se necesita hallar una base $\mathcal{B}_i$ sobre la que $(T - \lambda_i I)|_{N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}}$ tenga la representación matricial que se anuncia en el Teorema 4.30.

Para ello se demuestra el siguiente teorema. En el mismo, T juega el papel de $(T - \lambda_i I)|_{N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}}$, $\mathbb{C}^n$ juega el papel de $N(T - \lambda_i I)^{\nu_i}$ y el índice ν representa a ν_i .

Teorema 4.33. *Sea $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ lineal y nilpotente de índice ν . Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ tal que la matriz de T en $\mathcal{B}$ tiene la forma*

$$N = \begin{pmatrix} L_\nu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_\nu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_1 \end{pmatrix},$$

donde L_ν aparece r_1 veces, $L_{\nu-1}$ aparece r_2 veces, y así sucesivamente hasta L_1 , que aparecerá r_ν veces. Además,

$$\begin{aligned} r_1 &= \dim N(T^\nu) - \dim N(T^{\nu-1}), \\ r_1 + r_2 &= \dim N(T^{\nu-1}) - \dim N(T^{\nu-2}), \\ &\dots \\ r_1 + \dots + r_{\nu-1} &= \dim N(T^2) - \dim N(T) \\ r + \dots + r_{\nu-1} + r_\nu &= \dim N(T), \end{aligned}$$

y en donde $n = \dim N(T^\nu)$.

Observación 4.20. $r_1 \geq 1$ pero alguno o la totalidad de los restantes r_i podrían ser cero.

Demostración. Como $N(T^{\nu-1}) \subset N(T^\nu) = \mathbb{C}^n$ existe H_1 tal que $N(T^\nu) = H_1 \oplus N(T^{\nu-1})$. Sea $\mathcal{B}_1 = \{v_1^1, \dots, v_{r_1}^1\}$ una base arbitraria de H_1 , entonces la familia $\{T(v_1^1), \dots, T(v_{r_1}^1)\}$ es linealmente independiente y está contenida en $N(T^{\nu-1}) \setminus N(T^{\nu-2})$, por eso es posible encontrar r_2 vectores $\{v_1^2, \dots, v_{r_2}^2\}$ (r_2 podría ser cero en algún caso) tales que,

$$\mathcal{B} = \{T(v_1^1), \dots, T(v_{r_1}^1), v_1^2, \dots, v_{r_2}^2\}$$

genera H_2 cumpliendo $N(T^{\nu-1}) = H_2 \oplus N(T^{\nu-2})$. Repitiendo el proceso " ν " veces llegamos a una base de $N(T)$ que tiene la forma siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\nu &= \{T^{\nu-1}(v_1^1), \dots, T^{\nu-1}(v_{r_1}^1), T^{\nu-2}(v_1^2), \dots, T^{\nu-2}(v_{r_2}^2), \dots, \\ &T(v_1^{\nu-1}), \dots, T(v_{r_{\nu-1}}^{\nu-1}), v_1^\nu, \dots, v_{r_\nu}^\nu\}. \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_\nu$ es una base de $\mathbb{C}^n$. Sin embargo, la base buscada $\mathcal{B}$ se deduce de $\mathcal{B}'$ efectuando la reordenación siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{v_1^1, \dots, T^{\nu-1}(v_1^1), (v_1^1, v_{r_1}^1, \dots, T^{\nu-1}(v_{r_1}^1), \dots, \\ &v_1^{\nu-1}, T(v_1^{\nu-1})(v), (v_{r_{\nu-1}}^{\nu-1}, v_{r_{\nu-1}}^{\nu-1}, T(v_{r_{\nu-1}}^{\nu-1}), v_1^\nu, \dots, v_{r_\nu}^\nu\}. \end{aligned}$$

□

4.4.1. La forma canónica real

Si el operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ o la matriz A son reales, el conjunto de sus autovalores lo conforman los autovalores reales $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ y los autovalores complejos $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s$, en donde las parejas $\lambda_k, \bar{\lambda}_k$ comparten multiplicidades e índices. Sean, $J_1, \dots, \tilde{J}_r$ los bloques de los autovalores reales y $J_1, \bar{J}_1, \dots, J_s, \bar{J}_s$

los bloques de los autovalores complejos en la forma canónica de Jordan J :

$$J = \begin{pmatrix} \tilde{J}_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{J}_r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{J}_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & J_s & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{J}_s \end{pmatrix}$$

Sea λ un autovalor complejo y supongamos que el grupo de vectores asociados a λ en la base de Jordan $\mathcal{B}_J$ es $\{v_1, \dots, v_{n_\lambda}\}$, siendo por tanto $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n_\lambda}\}$ el grupo “contiguo” en $\mathcal{B}_J$ asociado al autovalor $\bar{\lambda}$.

Si

$$\{v_1, \dots, v_{n_\lambda}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n_\lambda}\}$$

se substituye por

$$\{\Re v_1, \Im v_1, \dots, \Re v_{n_\lambda}, \Im v_{n_\lambda}\},$$

en $\mathcal{B}_J$ y esta operación se efectúa con todos los autovalores complejos, la forma canónica de Jordan cambia su expresión. Cada pareja $J_{\lambda_j}, \bar{J}_{\lambda_j}$ de bloques conjugados pasa a ser reemplazado por un solo bloque real R_{λ_j} que tiene dimensiones $2n_{\lambda_j} \times 2n_{\lambda_j}$ y cuya forma es:

$$R_{\lambda_j} = D_{\lambda_j} + N_{\lambda_j},$$

donde si $\lambda_j = \alpha + i\beta$

$$D_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \Lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Lambda \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

mientras

$$N_{\lambda_j} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_\nu & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{L}_\nu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{L}_{\nu-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \tilde{L}_1 \end{pmatrix}.$$

En ésta última matriz, los bloques nilpotentes $\tilde{L}_k$ tienen dimensiones $2k \times 2k$ y

son de la forma:

$$\tilde{L}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y los $\tilde{L}_\nu, \tilde{L}_{\nu-1}, \dots, \tilde{L}_1$ aparecen con la misma distribución y número que los bloques nilpotentes usuales $L_\nu, L_{\nu-1}, \dots, L_1$, en los bloques de Jordan correspondientes a λ_j y $\bar{\lambda}_j$. La matriz J_R de T en esta nueva base es la forma canónica real:

$$J_R = \begin{pmatrix} \tilde{J}_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{J}_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & R_{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & R_{\lambda_s} \end{pmatrix}.$$

Para calcular la exponencial e^{tJ_R} sólo necesitamos hallar $e^{t\Lambda}$. De hecho, se tiene que:

$$\exp(t\Lambda) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sen \beta t \\ -\sen \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

En efecto si $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$, $\bar{x}(t) = e^{t\Lambda} \bar{x}_0$ es la solución de $\bar{x}' = \Lambda \bar{x}$ con $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$. Si ponemos $z = x + iy$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $z_0 = x_0 + iy_0$, la versión compleja de este problema es:

$$z' = \bar{\lambda} z \quad z(0) = z_0.$$

Su solución es $z = z_0 e^{\lambda t}$ cuya versión real es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sen \beta t \\ -\sen \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

4.4.2. Operaciones Elementales

Cuando una aplicación lineal $T \in L(\mathbb{C}^n)$ tiene asociada una matriz $n \times n$, A , y se desean hallar simultáneamente la dimensión de $N(T)$, la dimensión de $T(\mathbb{C}^n)$, una base de $N(T)$ y una base de $T(\mathbb{C}^n)$ se aconseja proceder como sigue. Fórmese la matriz $2n \times n$

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Mediante el método de Gauss y haciendo operaciones elementales columna - es decir intercambiar entre sí columnas y añadir a una columna dada una combinación lineal de otras - podemos pasar de dicha matriz a otra de la forma

$$\left(\frac{B}{D}\right) = \left(\begin{array}{cccccc} b_{11} & \dots & b_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & \dots & b_{2r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} & 0 & \dots & 0 \\ \hline d_{11} & \dots & d_{1r} & d_{1(r+1)} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & \dots & d_{2r} & d_{2(r+1)} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nr} & d_{n(r+1)} & \dots & d_{nn} \end{array}\right)$$

en la cual, B tiene rango r (y la estructura de la matriz de las primeras r columnas es triangular). En la matriz B las r primeras columnas dan una base del espacio imagen $T(\mathbb{C}^n)$, las últimas $n-r$ columnas de la matriz D constituyen una base del núcleo. Recuérdese que cada columna de la matriz B es la imagen por T de la correspondiente columna de D .

4.4.3. Cálculo de la forma de Jordan

A efectos prácticos se describen las formas canónicas de Jordan hasta orden 4 y las bases que permiten en cada caso representar matricialmente a un operador en forma canónica. Se consideran exclusivamente de los casos *no diagonalizables*.

Se empieza con $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $n = 2$. El caso no diagonalizable es $\sigma(A) = \{\lambda\}$ ($\sigma(A)$ representa el conjunto de autovalores de A , es decir, el espectro de A). Además ha de ser

$$\gamma = 1, \quad \nu = 2.$$

La forma canónica es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

y la base de Jordan:

$$\mathcal{B} = \{v, (A - \lambda)v\}.$$

Se sigue con $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $n = 3$. Hay tres casos no diagonalizables, el primero $\sigma(A) = \{\lambda, \mu\}$ con $\gamma_\lambda = \gamma_\mu = 1$, $n_\lambda = 2$, $n_\mu = 1$. La forma canónica de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

la base de Jordan es:

$$\mathcal{B} = \{v_1, (A - \lambda)v_1, v_2\}.$$

donde $(A - \lambda)^2 v_1 = 0$ y $Av_2 = \mu v_2$. El segundo caso es $\sigma(A) = \{\lambda\}$ (λ triple) con $\gamma_\lambda = 2$, forma canónica:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

y base de Jordan es:

$$\mathcal{B} = \{v_1, (A - \lambda)v_1, v_2\}.$$

Ahora $(A - \lambda)^2 v_1 = 0$ y v_2 es un autovector $Av_2 = \lambda v_2$ que se escoge linealmente independiente de $(A - \lambda)v_1$. El tercer caso es $\sigma(A) = \{\lambda\}$ (λ triple) con $\gamma_\lambda = 1$, forma canónica:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

y base de Jordan:

$$\mathcal{B} = \{v_1, (A - \lambda)v_1, (A - \lambda)^2 v_1\}.$$

Para finalizar se estudia ahora el caso $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ y $n = 4$. Se empieza con tres autovalores $\sigma(A) = \{\lambda, \mu, \zeta\}$. Se supone λ doble. Ha de ser entonces $\gamma_\lambda = \gamma_\mu = \gamma_\zeta = 1$ y forma canónica:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix}.$$

La base de Jordan es:

$$\mathcal{B} = \{v_1, (A - \lambda)v_1, v_2, v_3\},$$

donde $(A - \lambda)^2 v_1 = 0$, $Av_2 = \mu v_2$, $Av_3 = \zeta v_3$.

Ahora se supone que A posee dos autovalores $\sigma(A) = \{\lambda, \mu\}$ y hay cuatro casos. El primero $\gamma_\lambda = \gamma_\mu = 1$. La forma canónica es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

y la base de Jordan es:

$$\mathcal{B} = \{v_1, (A - \lambda)v_1, v_2, (A - \mu)v_2\},$$

donde $(A - \lambda)^2 v_1 = (A - \mu)^2 v_2 = 0$. El segundo es $\gamma_\lambda = 1$, $\gamma_\mu = 2$, la forma canónica es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

y la base de Jordan es:

$$\mathcal{B} = \{v_1, (A - \lambda)v_1, v_2, v_3\},$$

donde $(A - \lambda)^2 v_1 = 0$ y $\{v_2, v_3\}$ es una base del autoespacio asociado a μ . En el tercero λ es triple, por tanto μ es simple, con $\gamma_\lambda = 1$. Le corresponde la forma canónica:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

La base de Jordan es:

$$\mathcal{B} = \{v_1, (A - \lambda)v_1, (A - \lambda)^2 v_1, v_2\},$$

donde $A(v_2) = \mu v_2$. En el cuarto caso λ es triple pero $\gamma_\lambda = 2$. La forma canónica es:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

La base de Jordan es:

$$\mathcal{B} = \{v_1, (A - \lambda)v_1, v_2, v_3\},$$

donde $A(v_2) = \lambda v_2$ se escoge linealmente independiente de $(A - \lambda)v_1$ y v_3 es un autovector asociado a μ .

A continuación se trata el caso de un único autovalor $\sigma(A) = \{\lambda\}$. El primer caso es $\gamma_\lambda = 1$, la forma canónica es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

la base de Jordan,

$$\mathcal{B} = \{v_1, (A - \lambda)v_1, (A - \lambda)^2 v_1, (A - \lambda)^3 v_1\},$$

que, sobra decirlo, requiere que $(A - \lambda)^3 v_1 \neq 0$.

El siguiente caso es $\gamma_\lambda = 3$, con forma canónica

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

La base de Jordan,

$$\mathcal{B} = \{v_1, (A - \lambda)v_1, v_2, v_3\}.$$

La base se construye de forma que $\{v_2, v_3\}$ constituye junto con $(A - \lambda)v_1$ un sistema linealmente independiente.

Se concluye con $\gamma_\lambda = 2$ que tiene dos subcasos. El primero con $\nu_\lambda = 3$ que tiene forma canónica de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

La base de Jordan es:

$$\mathcal{B} = \{v_1, (A - \lambda)v_1, (A - \lambda)^2 v_1, v_2\},$$

donde v_2 es un autovector que se elige linealmente independiente con $(A - \lambda)^2 v_1$. El segundo corresponde a $\nu_\lambda = 2$, forma canónica de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

y base de Jordan:

$$\mathcal{B} = \{v_1, (A - \lambda)v_1, v_2, (A - \lambda)v_2\}.$$

Los vectores v_1, v_2 se eligen linealmente independientes en $N(A - \lambda I)^2 \setminus N(A - \lambda I)$.

4.4.4. Casos complejos

Si A es 2×2 y $\lambda = \alpha \pm i\beta$ son sus autovalores, la forma canónica real es:

$$J_R = \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Si A es 3×3 , el caso complejo corresponde a $\lambda = \alpha \pm i\beta$ para los autovalores complejos y μ como autovalor real. La forma canónica real es:

$$J_R = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Cuando A es 4×4 y los autovalores complejos son $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\mu = \gamma \pm i\delta$ (simples), la forma canónica real es:

$$J_R = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Finalmente, si $\lambda = \alpha \pm i\beta$ es doble, puede ser $\nu = 1$ o $\nu = 2$ en cuyo caso, las formas canónicas reales son, respectivamente,

$$J_R = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}, \quad J_R = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ I_2 & \Lambda \end{pmatrix}.$$

El cálculo de la base de Jordan ya se ha explicado con detalle unas cuantas secciones antes.

4.4.5. La ecuación lineal de coeficientes constantes

Como se ha establecido más arriba, para $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}^n)$, la solución de

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

se puede escribir en la forma $x(t) = e^{tA}x_0$. Si J es la forma canónica de Jordan de A y P la matriz de “paso”, el cambio de variable $x = Py$ transforma el problema en

$$\begin{cases} y' = Jy \\ y(0) = P^{-1}x_0 (= y_0) \end{cases}$$

cuya solución es

$$y(t) = e^{tJ}y_0,$$

siendo

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{tJ_p} \end{pmatrix}$$

donde

$$e^{tJ_i} = \begin{pmatrix} e^{tL_{\nu_i}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tL_{\nu_i}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{tL_1} \end{pmatrix}$$

y donde

$$e^{tL_{\nu_i}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{t^{\nu_i-1}}{(\nu_i-1)!} & \frac{t^{\nu_i-2}}{(\nu_i-2)!} & \dots & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta estas observaciones es claro el siguiente teorema.

Teorema 4.34. *Sea $x = x(t)$ una solución de la ecuación*

$$x' = Ax,$$

siendo A una matriz compleja $n \times n$ en las condiciones del teorema 19, en particular, con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, de índices $\nu_1, \dots, \nu_p$. Entonces, cada componente $x_j = x_j(t)$ de dicha solución se puede escribir en la forma,

$$x_j(t) = e^{\lambda_1 t} q_{1j} + \dots + e^{\lambda_p t} q_{pj}$$

donde $q_{ij}(t)$ es un polinomio de grado $\nu_i - 1$, $1 \leq i \leq p$. Equivalentemente,

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} Q_1(t) + \dots + e^{\lambda_p t} Q_p(t)$$

donde $Q_i(t)$ es una función cuyas componentes son polinomios de grado $\nu_i - 1$, $1 \leq i \leq p$.

4.4.6. Ejercicios

1. Sea
- A
- la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Evaluar $\sin A$, $\cos A$, $\exp A$.

2. Se considera la serie $s(\lambda) = \lambda + \lambda^2 + \dots$. ¿Bajo qué condiciones se puede definir $s(A)$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$?
3. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Empleando la forma canónica de Jordan demuéstrese que:

$$\det e^{At} = e^{(\text{traza } A)t} \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Para las siguientes matrices A (2×2) calcúlese un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $x' = Ax$. Calcular también la forma canónica de Jordan, la matriz de paso y la exponencial e^{tA} , $t \in \mathbb{R}$.

a)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} a-b & b \\ -2b & a+b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 2a+1 & -1 \\ 1 & 2a-1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

¿Para qué valores de a es nilpotente la matriz?

5. Usar el método de variación de las constantes para determinar la solución general de los problemas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 4 + 2t^{-1} \end{pmatrix},$$

6. Para cada una de las siguientes matrices 3×3 , A , calcúlese un sistema fundamental de soluciones de la ecuación:

$$x' = Ax.$$

Calcúlese asimismo la forma canónica de Jordan J de A , una matriz de paso P y la exponencial e^{tA} .

a)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 6)$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)^2$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^3$$

e)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)((\lambda - 3)^2 + 1)$$

f)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^3$$

g)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}.$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^3$$

7. Se sabe que $x_p(t) = (-\frac{t}{2}, 0, 0)$ es una solución particular de

$$\begin{cases} x' = 4x + y + z + 2t - \frac{1}{2} \\ y' = 2x + 3y + z + t \\ z' = 2x - y + 5z + t. \end{cases}$$

Hallar la solución del problema con datos

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Solución: $(x, y, z) = e^{2t}v + \frac{e^{6t}}{2}w$, con $v = (1, -1, 1)$, $w = (1, 1, 1)$.

8. Resuélvanse los problemas de Cauchy siguientes (cotejar los resultados del Ejercicio 6):

a)

$$\begin{cases} x' = 3x + z + e^t \\ y' = 3y + t \\ z' = y + 3z \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = -1. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x' = 3x - z \\ y' = 4y + z \\ z' = -2y + 2z \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = \alpha \\ y(0) = \beta \\ z(0) = \gamma, \end{cases}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. ¿Pueden ser complejos α, β, γ ?

9. Usar el método de variación de las constantes para determinar la solución general de los problemas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^t \\ -e^t \\ -e^t \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

10. Para cada una de las siguientes matrices 4×4 , A , calcúlese un sistema fundamental de soluciones de la ecuación:

$$x' = Ax.$$

Calcúlese asimismo la forma canónica de Jordan J de A , una matriz de paso P y la exponencial e^{tA} .

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

f)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

g)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

h)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

j)

$$\begin{pmatrix} a-b & b & 0 & 0 \\ -2b & a+b & 0 & 0 \\ 1-2b & b & a-b & b \\ -2b & 2b+1 & -2b & a+b \end{pmatrix}$$

k)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 & 3 \\ -4 & 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

l)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

m)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

4.5. Sistemas fundamentales para sistemas de coeficientes constantes

Esta sección es independiente de las anteriores. Se propone aquí el cálculo directo de un sistema fundamental de soluciones para un sistema de coeficientes constantes. En la materia expuesta hay repetición parcial de contenidos anteriores.

Si v es un autovector asociado a un autovalor λ de una matriz A :

$$Av = \lambda v,$$

entonces

$$x = e^{\lambda t} v,$$

es solución de $x' = Ax$.

Proposición 4.35. *Si la matriz A admite n autovectores $\{v_1, \dots, v_n\}$, asociados a autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (que muy bien pudieran repetirse), de forma que $\{v_1, \dots, v_n\}$ constituye una base de $\mathbb{C}^n$, entonces:*

$$\{e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n\}$$

define un sistema fundamental de soluciones. En particular, esta situación se da si A posee n autovalores distintos.

Observaciones 4.21.

- a) Se sabe que las matrices A que cumplen las hipótesis de la proposición son precisamente aquellas que son diagonalizables. Por tanto existen casos donde ésta no se puede aplicar. Las matrices diagonalizables A se caracterizan en los siguientes términos. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ son los autovalores (en general complejos) de A los autoespacios se definen,

$$V_{\lambda_i} = N(A - \lambda_i I),$$

sus dimensiones $\dim V_{\lambda_i} = \gamma_i$. El valor γ_i se conoce como la multiplicidad geométrica de λ_i . Se sabe que los autoespacios son independientes y es conocido que una condición necesaria y suficiente para que A sea diagonalizable es que:

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_p = n.$$

Esta relación es otra forma de decir que el espacio ($\mathbb{C}^n$ en general) admite una base formada por autovectores. Resulta útil saber, y no es trivial demostrar, que $\gamma_i \leq n_i$ donde n_i es la multiplicidad algebraica del autovalor λ_i .

- b) Los λ de la proposición pueden ser reales o complejos. Ahora, si A es real y $\lambda = \mu + i\nu$ es un autovalor complejo su conjugado $\bar{\lambda}$ también es autovalor, con autovectores asociados v y $\bar{v}$ donde:

$$v = \xi + i\eta \quad \bar{v} = \xi - i\eta,$$

$\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, si A es real y queremos obtener un sistema fundamental de soluciones real en el caso de la proposición, en:

$$\{e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_t t} v, e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}, \dots, e^{\lambda_n t} v_n\}$$

basta remplazar cada grupo correspondiente a un autovalor complejo λ :

$$\{e^{\lambda t} v, e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}\}$$

por

$$\{\Re[e^{\lambda t} v], \Im[e^{\lambda t} v]\}.$$

Nótese que:

$$\Re[e^{\lambda t} v] = e^{\mu t}[(\cos \nu t)\xi - (\sin \nu t)\eta] = e^{\mu t}[\xi \cos \nu t - \eta \sin \nu t],$$

$$\Im[e^{\lambda t} v] = e^{\mu t}[(\sin \nu t)\xi + (\cos \nu t)\eta] = e^{\mu t}[\xi \sin \nu t + \eta \cos \nu t].$$

4.5.1. Casos no diagonalizables 2×2 .

Para que una matriz A , 2×2 , no sea diagonalizable hace falta que sólo tenga un autovalor λ y que su autespacio V_λ tenga dimensión $\gamma = 1$. Se demuestra en ese caso (ver Sección 4.4 ²) la existencia de un vector v_1 cumpliendo:

$$(A - \lambda I)v_1 \neq 0 \quad (A - \lambda I)^2 v_1 = 0.$$

En ese caso es inmediato que $v_2 = (A - \lambda I)v_1$ es un autovector, $Av_2 = \lambda v_2$, que $\{v_1, v_2\}$ es una base y que:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}(v_1 + tv_2), \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}v_2$$

es un sistema fundamental de soluciones del sistema:

$$x' = Ax.$$

4.5.2. Casos no diagonalizables 3×3 .

En dimensión 3 caben dos opciones de A no diagonalizable: dos autovalores λ, μ y un sólo autovalor λ .

En el supuesto λ, μ autovalores la única opción posible es $\gamma_\lambda = 1$, $n_\lambda = 2$ (es decir λ doble), $\gamma_\mu = 1$. Para λ se sigue la existencia de v_1, v_2 con las propiedades precedentes y un sistema fundamental para $x' = Ax$ es:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}(v_1 + tv_2), \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}v_2, \quad \varphi_3(t) = e^{\mu t}v_3,$$

donde v_3 es un autovector asociado a μ .

En el otro caso λ es el único autovalor, por tanto triple, dándose dos casos. En el primero $\gamma = 1$, existe un vector v_1 con:

$$(A - \lambda I)^2 v_1 \neq 0 \quad (A - \lambda I)^3 v_1 = 0.$$

Poniendo:

$$v_2 = (A - \lambda I)v_1, \quad v_3 = (A - \lambda I)^2 v_1,$$

la familia $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base, v_3 es un autovector y

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}(v_1 + tv_2 + \frac{t^2}{2}v_3), \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}(v_2 + tv_3), \quad \varphi_3(t) = e^{\lambda t}v_3$$

es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $x' = Ax$.

En el segundo caso λ triple, $\gamma = 2$ y hay dos autovectores linealmente independientes. Se puede probar la existencia de vectores v_1, v_3 tales que:

$$(A - \lambda I)v_1 \neq 0 \quad (A - \lambda I)^2 v_1 = 0,$$

de suerte que $Av_3 = \lambda v_3$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente con $v_2 = (A - \lambda I)v_1$. Un sistema fundamental es:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}(v_1 + tv_2), \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}v_2, \quad \varphi_3(t) = e^{\lambda t}v_3.$$

²Véase también "Ecuaciones diferenciales ordinarias" de M. de Guzmán, ed. Alhambra, Madrid, 1975.

4.5.3. Casos no diagonalizables 4×4 .

Se presentan ahora combinaciones de casos considerados.

Para tres autovalores λ, μ_1, μ_2 sólo hay un caso $n_\lambda = 2, \gamma_\lambda = 1$, por tanto $\gamma_{\mu_1} = \gamma_{\mu_2} = 1$. Existe como arriba un vector v_1 tal que

$$(A - \lambda I)v_1 \neq 0 \quad (A - \lambda I)^2 v_1 = 0.$$

Si $v_2 = (A - \lambda I)v_1$ y v_3, v_4 son autovectores asociados a μ_1, μ_2 , un sistema fundamental es:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}(v_1 + tv_2), \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}v_2, \quad \varphi_3(t) = e^{\mu_1 t}v_3, \quad \varphi_4(t) = e^{\mu_2 t}v_4.$$

Para dos autovalores λ, μ hay cuatro opciones. La primera λ, μ dobles con $\gamma = 1$ en ambos casos. Existen entonces vectores v_1, v_3 cumpliendo:

$$(A - \lambda I)v_1 \neq 0 \quad (A - \lambda I)^2 v_1 = 0, \quad (A - \mu I)v_3 \neq 0 \quad (A - \mu I)^2 v_3 = 0,$$

con $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ independientes siendo $v_2 = (A - \lambda I)v_1, v_4 = (A - \mu I)v_3$. Un sistema fundamental es:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}(v_1 + tv_2), \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}v_2, \quad \varphi_3(t) = e^{\mu t}(v_3 + tv_4), \quad \varphi_4(t) = e^{\mu t}v_4.$$

En la segunda opción λ, μ son dobles pero $\gamma_\lambda = 1, \gamma_\mu = 2$ y μ tiene dos autovectores independientes $\{v_3, v_4\}$. Usando los vectores $\{v_1, v_2\}$ definidos en el caso precedente resulta el sistema fundamental:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}(v_1 + tv_2), \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}v_2, \quad \varphi_3(t) = e^{\mu t}v_3, \quad \varphi_4(t) = e^{\mu t}v_4.$$

La tercera es λ triple con $\gamma = 1$ en cuyo caso un sistema fundamental es:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\lambda t}\left(v_1 + tv_2 + \frac{t^2}{2}v_3\right), & \varphi_2(t) &= e^{\lambda t}(v_2 + tv_3), \\ \varphi_3(t) &= e^{\lambda t}v_3, & \varphi_4(t) &= e^{\mu t}v_4, \end{aligned}$$

donde v_1, v_2, v_3 son como en el correspondiente caso λ triple en 3×3 y v_4 es un autovector asociado a μ .

La cuarta es λ triple con $\gamma = 2$. Usando los vectores del caso correspondiente 3×3 tenemos el sistema fundamental:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}(v_1 + tv_2), \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}v_2, \quad \varphi_3(t) = e^{\lambda t}v_3, \quad \varphi_4(t) = e^{\mu t}v_4,$$

en donde v_4 es un autovector asociado a μ .

Para terminar tratamos la opción λ de multiplicidad 4 en donde los diferentes casos son $\gamma = 1, 2, 3$. Los más directos son $\gamma = 1$ y $\gamma = 3$.

Para $\gamma = 1$ el sistema fundamental es

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}\left(v_1 + tv_2 + \frac{t^2}{2}v_3 + \frac{t^3}{3!}v_4\right), \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}\left(v_2 + tv_3 + \frac{t^2}{2}v_4\right),$$

$$\varphi_3(t) = e^{\lambda t}(v_3 + tv_4), \quad \varphi_4(t) = e^{\lambda t}v_4,$$

en donde v_1 se elige con:

$$(A - \lambda I)^3 v_1 \neq 0, \quad (A - \lambda I)^4 v_1 = 0,$$

y $v_i = (A - \lambda I)^i v_1 \neq 0$, $i = 2, 3, 4$.

En el caso $\gamma = 3$ se pueden encontrar vectores v_1, v_3, v_4 tales que:

$$(A - \lambda I)v_1 \neq 0, \quad (A - \lambda I)^2 v_1 = 0,$$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son linealmente independientes y $Av_i = \lambda v_i$, $i = 3, 4$. El sistema fundamental es:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}(v_1 + tv_2), \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}v_2, \quad \varphi_3(t) = e^{\lambda t}v_3, \quad \varphi_4(t) = e^{\lambda t}v_4.$$

El caso $\gamma = 2$ es más delicado porque hace falta introducir el índice de nilpotencia ν . Tal ν es el mínimo entero k para el que:

$$(A - \lambda I)^k = 0,$$

es decir, la matriz nula. Si $\gamma = 2$ y en este caso λ cuádruple, se demuestra (ver más adelante la forma canónica de Jordan) que sólo caben dos opciones: $k = 2$ y $k = 3$.

Si $k = 2$ existen vectores v_1, v_3 con:

$$(A - \lambda I)v_1 \neq 0, \quad (A - \lambda I)^2 v_1 = 0, \quad (A - \lambda I)v_3 \neq 0, \quad (A - \lambda I)^2 v_3 = 0,$$

tales que poniendo $v_2 = (A - \lambda I)v_1$, $v_4 = (A - \lambda I)v_3$, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son linealmente independientes y el sistema fundamental es:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}(v_1 + tv_2), \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}v_2, \quad \varphi_3(t) = e^{\lambda t}(v_3 + tv_4), \quad \varphi_4(t) = e^{\lambda t}v_4.$$

Si finalmente $k = 3$, existen vectores v_1, v_4 tales que:

$$(A - \lambda I)^2 v_1 \neq 0, \quad (A - \lambda I)^3 v_1 = 0,$$

$Av_4 = \lambda v_4$, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son linealmente independientes con $v_i = (A - \lambda I)^i v_1$, $i = 2, 3$. El sistema fundamental es:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\lambda t}\left(v_1 + tv_2 + \frac{t^2}{2}v_3\right), & \varphi_2(t) &= e^{\lambda t}(v_2 + tv_3), \\ \varphi_3(t) &= e^{\lambda t}v_3, & \varphi_4(t) &= e^{\lambda t}v_4. \end{aligned}$$

Observación 4.22. El caso general de matrices $n \times n$ e incluso el propio caso de matrices 4×4 ya se trató de manera unificada en la Sección 4.4 con la matriz exponencial y la de la forma canónica de Jordan.

4.5.4. Ejercicios

1. Resolver los problemas de valor inicial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Úsese el método de coeficientes indeterminados para hallar la solución general de los sistemas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 4e^t \\ -2e^t \end{pmatrix}.$$

4.5.5. Ecuaciones de segundo orden

Las ecuaciones de segundo orden gozan de un estatus especial dentro de las ecuaciones lineales.

En la física matemática, algunos casos importantes de ecuaciones de segundo orden con coeficientes variables, definen clases de funciones (llamadas “funciones especiales”) que son del máximo interés para la disciplina.

En efecto una ecuación de coeficientes variables:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (4.10)$$

no puede en general integrarse por métodos elementales. Esto es así porque una ecuación de orden dos se puede reducir a la ecuación de Ricatti que no puede integrarse por cuadraturas. Esta equivalencia se propone como ejercicio (Ejercicio 2 en esta sección).

Por tanto una estrategia que se ha empleado desde comienzos del siglo XIX para estudiar estas ecuaciones consiste en emplear series de potencias:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n.$$

Esta técnica se puede aplicar cuando los coeficientes son analíticos o son la restricción a $\mathbb{R}$ de funciones complejas que son analíticas. Es el teorema de Cauchy-Kowalevsky el quien fundamenta este enfoque ([4], [12]). En algunos casos importantes los coeficientes presentan singularidades aisladas y se hace necesario introducir una variante del método para construir un sistema fundamental de soluciones (teorema de Frobenius, [12]).

Por otra parte, las ecuaciones de segundo orden poseen una rica teoría cualitativa (teoría de Sturm-Liouville) que comprende resultados de oscilación y localización de ceros, así como teoremas de comparación. Los ejercicios que siguen muestran algunos de estas facetas.

4.6. Ejercicios

1. Se considera la ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (4.11)$$

donde los coeficientes son funciones continuas definidas un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Búsqese una función ϕ de forma que al introducir la nueva función incógnita y_1 ligada a y bajo la relación $y = \phi y_1$, la ecuación resultante en y_1 no presente el término en la derivada primera y_1' , es decir para que (4.11) se transforme en:

$$y_1'' + \alpha(x)y_1 = 0.$$

2. Pruébese que la ecuación:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

admite una solución u de la forma:

$$u = \exp \int_{x_0}^x p(s) \, ds$$

si y sólo si $p(x)$ satisface la ecuación de Riccati:

$$p' = -p^2 - a_1(x)p - a_2(x).$$

Este resultado viene a decir que las ecuaciones lineales de segundo de orden no son en general integrables elementalmente.

3. Sean $\{\phi_1, \phi_2\}$, $\{\psi_1, \psi_2\}$ sistemas fundamentales de soluciones de la ecuación:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

mientras $W(\phi_1, \phi_2)$, $W(\psi_1, \psi_2)$ son los correspondientes wronskianos. Mediante cómputo directo demuéstrese que:

$$W(\phi_1, \phi_2) = kW(\psi_1, \psi_2),$$

para cierta constante k . ¿Por qué ya resulta conocida esta conclusión?

4. Se considera la ecuación de Hill,

$$y'' + \alpha(t)y = 0,$$

donde $\alpha = \alpha(t)$ es periódica de período T . Sea $\{\phi_1, \phi_2\}$ un sistema fundamental de soluciones normalizado en $t = 0$, mientras $W = W(\phi_1, \phi_2)$ designa su wronskiano.

- a) Probar que $W(t) = 1$.
- b) Probar que la ecuación admite una solución periódica (no trivial) de período T si y sólo si $\phi_1(T) + \phi_2'(T) = 2$. Similarmente, pruébese que la ecuación admite una solución y que cumple $y(t+T) = -y(t)$ para cada t si y sólo si $\phi_1(T) + \phi_2'(T) = -2$.
5. Demostrar que todos los ceros de soluciones de una ecuación de segundo orden son simple, por tanto aislados.
6. (Teorema de Sturm). Se consideran las ecuaciones de segundo orden:

$$y'' + a(x)y = 0, \tag{A}$$

$$y'' + b(x)y = 0, \tag{B}$$

cuyos coeficientes son funciones continuas en un intervalo (α, β) donde b mayor estrictamente a a , es decir $a(x) < b(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$. Sea $y_a(x)$ una solución arbitraria de (A) que admite dos ceros consecutivos $x_1 < x_2$ en el intervalo (α, β) . Demuéstrese que *toda* solución y_b de (B) posee un cero en el intervalo (x_1, x_2) . Para ello pruébese que

$$(y_b y_a' - y_b' y_a)' = (b - a)y_a y_b.$$

Lo que lleva, cualquiera que sea $y_b(x)$ a la relación:

$$y_b(x_2)y_a'(x_2) - y_b(x_1)y_a'(x_1) > 0.$$

Coclúyase que $y_b(x)$ debe anularse en (x_1, x_2) . Como aplicación probar que todas las soluciones de la ecuación $y'' + xy = 0$ presentan infinitos ceros en el intervalo $(0, +\infty)$.

7. Con las ideas del problema anterior demostrar si y_1, y_2 son dos soluciones independientes de la ecuación:

$$y'' + a(x)y = 0,$$

entonces, entre dos ceros consecutivos de y_1 existe un único cero de y_2 .

8. Hallar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación:

$$y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0,$$

en $x > 0$ sabiendo que $y_1 = x^{1/2}$ es una solución. Para ello obsérvese que si se conoce una solución particular ϕ de una ecuación:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

el cambio $y = \phi y_1$ permite reducir en una unidad el orden de la ecuación.

9. Considérese la ecuación.

$$y'' + a(x)y = 0,$$

donde a es continua en $x > 0$. Pruébese que si $a(x) > \varepsilon > 0$ todas sus soluciones oscilan infinitas veces en $x > 0$. Pruébese sin embargo que para que se dé este comportamiento no basta con la condición más débil $a(x) > 0$.

4.6.1. Ejercicios

1. Supongamos que las dos raíces del polinomio característico del operador lineal $\mathcal{L}y = y'' + a_1y' + a_2y$ están en el semiplano $\Re z < 0$ mientras $b = b(t) \in C[0, +\infty)$ satisface $\sup_{t \geq 0} |b(t)| < +\infty$.
 - a) Pruébese que toda solución de $\mathcal{L}y = b$ está acotada en $t \geq 0$.
 - b) Demuéstrese que si $\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = 0$ entonces toda solución de $\mathcal{L}y = b$ también satisface la condición $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.
2. Se considera la función:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0) \\ 1 & x \in [0, \pi] \\ 0 & |x| > \pi \end{cases},$$

y el operador diferencial $\mathcal{L}y = y'' + y$. Hallar una solución de $\mathcal{L}y = f$ en los puntos de continuidad de f .

3. Hallar mediante la fórmula de variación de las constantes la solución general del problema de Cauchy,

$$\begin{cases} x' = Ax + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

para:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$t_0 = 0$, $x_0 = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, y las opciones $b(t) = (t, t^2)$, $b(t) = (\cos t, 0)$, $b(t) = (\sinh t, \cosh t)$.

4. Sean,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Calcular e^A y como aplicación e^{A_1} .

5. Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = -bx + ay \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Hállese la solución general del problema de Cauchy procediendo de la forma siguiente:

- a) Redúzcase el sistema a una ecuación de segundo orden.
- b) Hállese un sistema fundamental de soluciones de la ecuación resultante para producir una matriz fundamental normalizada en $t = 0$.

6. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones por el método de coeficientes indeterminados:

a)

$$\begin{cases} x' = ax + 1 - at \\ y' = (a - b)x + by + bt^2 + (b - a - 2)t. \end{cases}$$

[Solución: $(x, y) = (t, -t^2)$.]

b)

$$\begin{cases} x' = (a - b)x + by - \sin t - (a - b) \cos t \\ y' = -2bx + (a + b)y + 2b \cos t \end{cases}$$

[Solución: $(x, y) = (\cos t, 0)$.]

c)

$$\begin{cases} x' = (2a + 1)x - y + \cosh t \\ y' = x + (2a - 1)y + \sinh t - (2a - 1) \cosh t \end{cases}$$

[Solución: $(x, y) = (0, \cosh t)$.]

7. Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x'_2 = 2x_2 + x_4 \\ x'_3 = 2x_3 + x_4 \\ x'_4 = 2x_4. \end{cases}$$

- a) Calcúlese un sistema fundamental de soluciones.
 b) Calcúlese una matriz fundamental, hallando la solución general del problema de Cauchy con datos en $t_0 = 0$ y término de perturbación

$$b(t) = (1, t, 0, \sin t).$$

- c) Hállese la solución del problema homogéneo ($b = 0$) sin recurrir a la matriz fundamental.

8. Hállese la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \\ x'_2 = x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 \\ x'_3 = x_3 - 2x_4 \\ x'_4 = x_3 + 3x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = a \\ x_2(0) = b \\ x_3(0) = c \\ x_4(0) = d, \end{cases}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

9. Se considera el sistema lineal,

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 \\ x'_2 = 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 5x_4 \\ x'_3 = 3x_3 - 3x_4 \\ x'_4 = 6x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

Analícese sus soluciones periódicas ¿Cuántos tipos de soluciones periódicas admite?

4.7. Anexo I: Método de Putzer

El siguiente es otro resultado fundamental de Álgebra Lineal.

Teorema 4.36 (Cayley-Hamilton). *Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ una matriz con autovalores λ_i de índices ν_i , $1 \leq i \leq p \leq n$, mientras $p_0(z)$ es el polinomio:*

$$p_0(z) = (z - \lambda_1)^{\nu_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{\nu_p}.$$

Si $p(z)$ es un polinomio arbitrario entonces $p(A) = 0$ si y sólo si p_0 divide a p . En particular $p_c(A) = 0$ si p es el polinomio característico de A .

Se conoce a p_0 como el polinomio mínimo de la matriz A . La consecuencia principal es que las potencias A^m de toda matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ son combinaciones lineales de $I, A, \dots, A^{n-1}$. En particular,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t) A^k.$$

Esta es la idea básica que permite calcular e^{At} sin pasar por la forma canónica de Jordan, una vez conocido el espectro de la matriz.

Teorema 4.37 (Putzer). *Sea A una matriz $n \times n$ con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (contados con su orden de multiplicidad). Entonces,*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k(A),$$

donde $P_0(A) = I$, $P_k(A) = (A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_k I)$ mientras $r'_1 = \lambda_1 r_1$, $r_1(0) = 1$, $r'_k = \lambda_k r_k + r_{k-1}$, $r_k(0) = 0$, $k \geq 2$.

4.8. Anexo II: coeficientes periódicos, teoría de Floquet

Cuando una ecuación autónoma $\xi' = f(\xi)$ admite una solución periódica $\xi_0(t)$ de período ω el “problema de la estabilidad” lleva a estudiar las perturbaciones $x(t) = \xi(t) - \xi_0(t)$ de dicha solución que en primera aproximación satisfacen una ecuación lineal del tipo:

$$x' = A(t)x, \tag{4.12}$$

donde $A = A(t)$ es una matriz compleja, continua y ω -periódica. En el caso del ejemplo $A(t) = Df(\xi_0(t))$. La principal conclusión a la que llegamos aquí es que (4.12) es la perturbación ω -periódica de una ecuación lineal de coeficientes constantes. La primera propiedad viene a decir que toda la información de la ecuación está esencialmente recogida en el intervalo $[0, \omega]$.

Lema 4.38. *Si $X(t)$ es una matriz fundamental arbitraria de (4.12) entonces existe una matriz C no singular tal que:*

$$X(t + \omega) = X(t)C \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $X_1(t)$ es cualquier otra matriz fundamental de (4.12) y $X_1(t + \omega) = X(t)C_1$ entonces C y C_1 son semejantes, es decir $C_1 = DCD^{-1}$ para alguna matriz no singular D .

Se llama a C la matriz de transición: señala cómo es el comportamiento de la ecuación cuando se cruzan los múltiplos $k\omega$ del período. Si X está normalizada en $t = 0$ entonces $C = X(\omega)$. Obsérvese que los autovalores de $X(\omega)$ son una propiedad intrínseca de la ecuación. Se llaman por ello sus *multiplicadores de Floquet*. Si en efecto λ es un multiplicador y v un autovector asociado, la solución de (4.12) con dato $x(0) = v$ cumple: $x(t + k\omega) = \lambda^k x(t)$. Es asimismo costumbre designar a los μ que cumplen $\lambda = e^{\omega\mu}$, λ un multiplicador, los exponentes *característicos* o de Lyapunov (que módulo $2\pi i/\omega$ están determinados por la ecuación).

Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.39. *La condición necesaria y suficiente para que (4.12) admita una solución ω -periódica es que $\lambda = 1$ sea un multiplicador de (4.12). Análogamente, (4.12) admite soluciones de período minimal $k\omega$ si $\lambda^k = 1$, $\lambda^j \neq 1$, $0 \leq j \leq k-1$.*

Hemos visto que $X(t + \omega) = X(t)C$ para cierta matriz no singular C y $X(t)$ una matriz fundamental arbitraria. Se sabe (ver [12]) que existe una matriz B tal que:

$$C = e^{\omega B}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} X(t + \omega) &= X(t)e^{\omega B} \\ X(t + \omega)e^{-\omega B} &= X(t) \\ X(t + \omega)e^{-(t+\omega)B} &= X(t)e^{-tB}, \end{aligned}$$

lo que en otras palabras significa que el grupo:

$$Q(t) = X(t)e^{-tB},$$

es ω -periódico en t . Hemos probado así el,

Teorema 4.40. *Existe, para cualquier matriz fundamental X de (4.12), una matriz constante B de suerte que,*

$$X(t) = Q(t)e^{tB},$$

donde Q es ω -periódica. Si X está normalizada entonces $X(\omega) = e^{\omega B}$.

Una consecuencia de la representación precedente de la matriz fundamental X es el siguiente teorema debido directamente a Lyapunov.

Teorema 4.41. *Sea X una matriz fundamental de (4.12) con matriz de transición $X(\omega) = e^{\omega B}$. Entonces la ecuación:*

$$x' = A(t)x + b(t),$$

es equivalente, mediante el cambio $x(t) = Q(t)z(t)$ a la ecuación de coeficientes constantes:

$$z' = Bz + Q^{-1}(t)b(t).$$

Además, para cada exponente característico μ de multiplicidad algebraica k existe un sistema linealmente independiente de k soluciones de (4.12) de la forma:

$$x_m(t) = Q(t)p_m(t)e^{\mu t} \quad 0 \leq m \leq k-1,$$

donde p_m es un polinomio de grado m , o bien,

$$x_m(t) = (c_0(t) + c_1(t)t + \cdots + c_m(t)t^m)e^{\mu t}, \quad (4.13)$$

donde los coeficientes son funciones ω -periódicas.

Observación 4.23. De (4.13) se deduce que el que las soluciones decaigan a cero o crezcan en módulo depende de la posición relativa de los multiplicadores (respectivamente, exponentes) con respecto a la circunferencia unidad $|z| = 1$ (la recta $\Re z = 0$).

Una de las primeras ecuaciones lineales de coeficientes periódicos estudiadas en la literatura fue:

$$u''(t) + b(t)u(t) = 0,$$

propuesta y analizada por el matemático y astrónomo norteamericano G. W. Hill. Una variante simplificada de la misma es la llamada ecuación de Mathieu,

$$u''(t) + (\delta + \mu \cos t)u(t) = 0.$$

En un curso de teoría de la estabilidad se analizan con detalle estas ecuaciones (véase [12]).

4.9. Ejercicios suplementarios

1. Sea $X : (a, b) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})$ una función matricial diferenciable en el intervalo (a, b) . Demuéstrese que si X es invertible en (a, b) , X^{-1} es diferenciable con:

$$\frac{d}{dt}(X^{-1}) = -X^{-1}X'X^{-1}.$$

2. Sea $Y : \mathbb{R} \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})(\mathbb{C})$ una función matricial continua que cumple la propiedad de semigrupo, es decir:

$$Y(t+s) = Y(t)Y(s) \quad t, s \in \mathbb{R},$$

junto con $Y(0) = I$. Demuéstrese que Y es diferenciable en $\mathbb{R}$ con

$$Y' = AY,$$

donde A es cierta matriz, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

3. El siguiente resultado tiene interés en *teoría de control*. Decimos que una función f es continua a trozos en el intervalo $[a, b]$ si existen puntos $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ con f continua en cada (t_{i-1}, t_i) y de forma que f admite límites laterales en cada uno de los t_i (en a sólo se requiere la existencia de $f(a+)$, en b , la de $f(b-)$). Sean $A = A(t) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $b = b(t) \in \mathbb{C}^n$ aplicaciones continuas a trozos en $[a, b]$. Fijado $t_0 \in [a, b]$, $x_0 \in \mathbb{C}^n$, pruébese la existencia de una solución continua y C^1 a trozos del problema:

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

que está definida en todo el intervalo $[a, b]$. Pruébese asimismo que la solución se representa en la forma $x = \Phi(t)x_0$ donde $\Phi \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ es una matriz fundamental continua y C^1 a trozos.

Capítulo 5

Introducción a la teoría cualitativa

5.1. Ecuaciones autónomas

Una ecuación de la forma,

$$x' = f(x), \quad (5.1)$$

donde el “tiempo” t no aparece en el segundo miembro se llama autónoma. A lo largo del capítulo se supone que la aplicación:

$$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

donde G es un abierto de $\mathbb{R}^n$, es de clase C^1 . Según se sabe, esto implica que para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in G$ el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (5.2)$$

admite una única solución maximal (x, I) , definida en un intervalo abierto $I = (\alpha, \omega)$. Siempre se designará así al intervalo maximal de una solución $x(t)$. Cuando sea necesario hacer referencia a las condiciones iniciales, la solución de (5.2) se representará como

$$x = x(t, t_0, x_0).$$

Se sabe –ver Capítulo III– que el dominio de definición Θ de dicha solución es un abierto de $\mathbb{R}^{n+2}$, siendo $x(t, t_0, x_0)$ una función C^1 en todas sus variables.

Teorema 5.1 (1^a Propiedad de traslación de fase). *$x = x(t)$ es una solución maximal de (5.1) en (α, ω) si y sólo si, cualquiera que sea $\tau \in \mathbb{R}$, $y(t) = x(t + \tau)$ es una solución maximal de (5.1) definida en $(\alpha - \tau, \omega - \tau)$.*

Observación 5.1. En el caso particular en el que el tiempo inicial es $t_0 = 0$ la solución de (5.2) se escribe abreviadamente:

$$x = x(t, x_0).$$

Es decir, por definición $x(t, x_0) = x(t, 0, x_0)$. Usando esta notación y el teorema precedente, la solución de (5.2) se representa como:

$$x(t, t_0, x_0) = x(t - t_0, x_0).$$

Definición 5.2. Se llama *flujo asociado* a (5.1) a la función $\varphi(t, x_0) = x(t, x_0)$.

Observación 5.2. Una aplicación $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, G un abierto de $\mathbb{R}^n$, también se denomina un campo vectorial en G . La aplicación φ se denomina en este caso el flujo del campo f .

Teorema 5.3 (2ª Propiedad de traslación de fase). *Sea φ el flujo asociado a la ecuación $x' = f(x)$. Entonces:*

$$\varphi(t, \varphi(s, x_0)) = \varphi(t + s, x_0).$$

En el siguiente resultado se supone por simplicidad que todas las soluciones de $x' = f(x)$ están definidas en $\mathbb{R}$.

Teorema 5.4. *Supongamos que todas las soluciones de (5.1) están definidas en $\mathbb{R}$. Entonces la aplicación flujo*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R} \times G &\longrightarrow G \\ (t, x_0) &\longmapsto \varphi(t, x_0) = x(t, x_0) \end{aligned}$$

satisface las siguientes propiedades:

- a) $\varphi(t, x_0)$ es C^1 y verifica $\varphi(0, z) = z$, para $z \in G$.
- b) $\varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0)) = \varphi(t_1 + t_2, x_0)$, para $x_0 \in G$ y $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarios.
- c) Para cada t , $\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$ es una aplicación C^1 y biyectiva de G en G con inversa C^1 :

$$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}.$$

Demostración. Las propiedades son consecuencia de la definición. $\varphi_t : G \rightarrow G$ es inyectiva y sobreyectiva pues dado y en G :

$$y = \varphi_t(x), \quad x = \varphi_{-t}(y).$$

□

Observación 5.3. Las aplicaciones biyectivas en $C^1(G, \mathbb{R}^n)$ con imagen G e inversa C^1 se llaman los difeomorfismos de G , escrito $\text{Dif}(G)$.

Según el teorema precedente, el flujo $\varphi(t, \cdot)$ induce un grupo uniparamétrico $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \text{Dif}(G)$ para la composición “o”:

$$\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1 + t_2}.$$

En el caso de la ecuación lineal

$$x' = Ax$$

este hecho es consecuencia inmediata de la representación explícita: $\varphi_t = e^{tA}$.

Definición 5.5. Una órbita γ de la ecuación (5.1) es el conjunto $\gamma = \{x(t) : t \in (\alpha, \omega), x(t) \text{ solución de (5.1)}\}$, es decir, la curva parametrizada por una solución. El conjunto de las órbitas de (5.1) se denomina el espacio de fases de la ecuación. Si $x_0 \in G$ una semiórbita a la derecha (a la izquierda) de x_0 es un conjunto de la forma,

$$\gamma^+(\gamma^-) = \{x(t, t_0, x_0) : t \in (\alpha, \omega), t \geq t_0 (t \leq t_0)\}.$$

Observación 5.4. Una parametrización C^1 (un “camino”) es una aplicación $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 que cumple $\phi'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Una curva γ de clase C^1 es el conjunto imagen $\gamma = \phi(I)$ de una parametrización C^1 . Las órbitas son las curvas parametrizadas por las soluciones.

Observación 5.5. El objetivo de la teoría cualitativa es el estudio y descripción del espacio de fases de (5.1), con especial énfasis en el comportamiento asintótico de sus soluciones (cuando $t \rightarrow \pm\infty$).

Teorema 5.6. Por cada punto $x_0 \in G$ sólo pasa una órbita γ (respectivamente, una semiórbita $\gamma^\pm$) de (5.1). Se designarán por $\gamma(x_0)$ (r. $\gamma^\pm(x_0)$). Además, si dos soluciones $x(t)$ e $y(t)$ generan la misma órbita entonces existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $y(t) = x(t + \tau)$.

Observación 5.6. El teorema precedente invita a reemplazar “las soluciones que toman en algún momento el valor x_0 ” por la órbita γ que pasa por x_0 . Por otro lado, el estudio (geométrico) de las órbitas de (5.1) puede resolver algunos problemas de tratamiento analítico muy complicado. Por ejemplo el estudio de la existencia y estabilidad de soluciones periódicas de (5.1).

Ejemplos 5.7. Analícense todas las órbitas de las ecuaciones siguientes.

1. $x' = x$
2. $x' = x(1 - x)$
3. $x' = x(1 - x)(2 - x)$
4. Las órbitas de la ecuación C^1 , $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ son meramente intervalos abiertos de la recta real, salvo las soluciones estacionarias cuyas órbitas son puntos.
5. $x' = x(1 - x)$, $y' = -y$. Las órbitas que no son puntos críticos o tramos de segmentos rectilíneos en los ejes son

$$y = y_0 \frac{x_0}{x_0 - 1} \frac{x - 1}{x}.$$

En efecto, la solución de $y' = -y$, $y(0) = y_0$ es $y(t) = y_0 e^{-t}$ mientras que la de $x' = x(1 - x)$ con $x(0) = x_0$ cumple:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{1-x_0}{x_0} e^{-t}.$$

6. $x' = y$, $y' = -x$. Las órbitas son $x^2 + y^2 = r^2$.

5.2. Clasificación de órbitas. Órbitas de una ecuación en el plano

Ya hemos hablado de parametrizaciones C^1 . Cuando una parametrización C^1 , $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, es inyectiva en I se dice que ϕ es de Jordan. Una parametrización ϕ es cerrada si $I = [a, b]$, $\phi(a) = \phi(b)$ y en ese caso la curva $\gamma = \phi(I)$ se dice cerrada. Una parametrización cerrada se dice de Jordan si es inyectiva en $[a, b]$, en ese caso se dice que γ es una curva (cerrada) de Jordan. Como en este caso $I = [a, b]$, los valores de las derivadas de ϕ en $t = a$ y $t = b$ no tienen por qué coincidir. Así pues, se dice que una parametrización cerrada es C^1 (o regular) si además de $\phi(b) = \phi(a)$ se tiene que $\phi'(b) = \phi'(a)$.

Cuando ϕ es una parametrización cerrada de Jordan regular, ϕ admite una extensión C^1 a $\mathbb{R}$ de periodo mínimo $T = b - a$.

Se enuncia un resultado preliminar.

Lema 5.7. Sea $x(t)$ una solución de la ecuación $x' = f(x)$, donde $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- i) $x(t)$ es periódica de periodo T .
- ii) $x(0) = x(T)$.
- iii) Existen valores $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x(t_1) = x(t_2)$

Demostración. Si $x(t)$ es solución de (5.1) con dominio (α, ω) y $x(t_1) = x(t_2)$ entonces $x(t_1) = x(t_1 + T)$ donde $T = t_2 - t_1$. Como $x(t)$ e $y(t) = x(t + T)$ son soluciones de $x' = f(x)$ con el mismo dato inicial en $t = t_1$ entonces son iguales. Esto significa que sus dominios (α, ω) y $(\alpha - T, \omega - T)$ coinciden y por tanto han de ser $\mathbb{R}$. Además $x(t) = x(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ lo que prueba iii) $\Rightarrow$ i). Las demás implicaciones son triviales. $\square$

Teorema 5.8. Sea $x = x(t)$ una solución de (5.1). Entonces se da una y sólo una de las siguientes opciones,

- a) O bien, $x(t_1) \neq x(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$ (en este caso la órbita generada γ por $x(t)$ se dice abierta),
- b) O bien existe $T > 0$ tal que $x(t + T) = x(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y además $x(t_1) \neq x(t_2)$ para $0 \leq t_1 < t_2 < T$ (en este caso se dice que $x(t)$ genera una solución periódica de periodo minimal T , llamándose “órbita cerrada” a la correspondiente órbita γ),

¹ En realidad basta con que $\phi'(b) = \lambda \phi'(a)$ para algún $\lambda > 0$.

c) O bien $x(t) = x_0$ para todo t (en este caso se dice que x_0 –la órbita– es un punto crítico).

Observaciones 5.8.

- a) x_0 es un punto crítico de (5.1) si y sólo si $f(x_0) = 0$.
- b) En la demostración del punto b) se emplea Lema 5.9 que sigue. Se observa entonces que si $x(t)$ es una solución periódica no constante su órbita γ es una *curva de Jordan* regular. El recíproco de esta afirmación es cierto (Teorema 5.12).
- c) Algunas órbitas abiertas empiezan ($t = -\infty$) o terminan ($t = \infty$) en puntos críticos (Teorema 5.10).

Lema 5.9. *Sea $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y periódica. Se cumple entonces una de las siguientes opciones: o bien $x(t)$ es constante, o bien $x(t)$ posee un periodo mínimo $T^* > 0$. En éste último caso, todos los periodos de $x(t)$ son de la forma kT^* donde $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Si $\mathcal{T}$ es el conjunto de periodos de $x(t)$ entonces $\mathcal{T}$ es un grupo cerrado para la suma $+$. Si $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T} \cap (0, \infty)$ y $T^* := \inf \mathcal{T}^+$, o bien $T^* > 0$ o bien $T^* = 0$. En éste último caso existe $T_n > 0$ una sucesión de periodos tal que $T_n \rightarrow 0$. Dado $t \in \mathbb{R}$ para todo n existe $k = k(n)$ tal que:

$$kT_n \leq t < (k+1)T_n \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t - kT_n) \rightarrow x(0)$$

cuando $n \rightarrow \infty$ pues $0 \leq t - kT_n < T_n$ para todo n . Luego $x(t) = x(0)$ para todo t y $x(t)$ es constante.

Si $T^* > 0$ entonces T^* es el periodo mínimo. Probamos que $\mathcal{T} = \{kT^* : k \in \mathbb{Z}\}$. En efecto, si T es otro periodo y no es múltiplo de T^* ,

$$kT^* < T < (k+1)T^*,$$

para algún entero k . De aquí se deduce que $T - kT^*$ es un periodo positivo estrictamente menor que T^* lo cual es imposible. Esto prueba la afirmación. $\square$

Demostración del Teorema 5.8. Si la opción a) no se cumple entonces existen $t_1 < t_2$ tales que $x(t_1) = x(t_2)$ luego $x(t) = x(t + (t_2 - t_1))$ para todo t . Es decir, $T := t_2 - t_1$ es un periodo. Si $x(t)$ no es constante entonces (Lema 5.9) admite un periodo mínimo $T^* > 0$. En ese caso $x(t)$ es inyectiva en $[0, T^*)$ porque si $x(t'_1) = x(t'_2)$, $t'_1, t'_2 \in [0, T^*)$, $t'_1 < t'_2$, resultaría que $T' = t'_2 - t'_1$ es un periodo menor que T^* lo cual no es posible. Esto prueba b).

Finalmente si no se cumplen ni a) ni b) resulta que $T^* = 0$ y la solución es constante. $\square$

En su momento se demostró la siguiente propiedad.

Teorema 5.10. *Sea $x(t)$ una solución maximal de (5.1) definida en (α, ω) tal que $\omega = \infty$ (respectivamente, $\alpha = -\infty$) y $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ ($\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x^*$). Entonces $f(x^*) = 0$ es decir, x^* es un punto crítico de la ecuación.*

Se introduce ahora un resultado que permite probar la existencia de soluciones periódicas a través de sus órbitas. La prueba –que ofrecemos al lector curioso– la derivamos al Anexo I de este capítulo (ver [12]).

Teorema 5.11. *Si Γ es una curva de Jordan sin puntos críticos de (5.1) y γ es una órbita de la ecuación contenida en Γ ($\gamma \subset \Gamma$) entonces $\gamma = \Gamma$ y por tanto γ es la órbita de una solución periódica.*

En términos de la clasificación de órbitas, las que son “abiertas” (de acuerdo a la terminología del teorema, no pueden ser compactas. Se prueba también en el anexo el siguiente resultado.

Teorema 5.12. *Si γ es una órbita compacta de (5.1) y no es un punto crítico, entonces es la órbita de una solución periódica.*

En particular, si la órbita γ de una solución $x(t)$ de (5.1) es una curva de Jordan entonces tal órbita está parametrizada por una solución periódica. Nótese que esta observación tiene en la práctica menos interés que el Teorema 5.11, el cual se aplica fácilmente a ecuaciones con una “integral primera”.

5.3. Órbitas de las ecuaciones lineales

Consideramos ahora la ecuación lineal plana

$$x' = Ax \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (5.3)$$

(A es una matriz *real*) bajo la hipótesis $\det A \neq 0$. Se dice entonces que la ecuación lineal es “no degenerada”. Designamos por λ_1 y λ_2 los autovalores de A , por V_1 y V_2 los correspondientes autoespacios. Recuérdese que dichos autovalores son las raíces de:

$$\lambda^2 - (\text{traza } A)\lambda - \det A = 0,$$

donde $\text{traza } A = a_{11} + a_{22}$.

Se presenta a continuación una descripción detallada de las órbitas de la ecuación. Por ejemplo, en el teorema que sigue, las órbitas cerradas son elipses. Sin embargo se da la información en la terminología del caso no lineal (donde no se precisa la forma exacta de las órbitas).

Teorema 5.13. *Sean λ_1 y λ_2 complejos conjugados, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\beta > 0$. Si $\alpha > 0$ (< 0) todas las órbitas de (5.3) tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$ ($+\infty$) y a $+\infty$ en módulo cuando $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$), rotando infinitas veces alrededor del origen $(0, 0)$ (Figura 5.1). Si $\alpha > 0$ se dice que $(0, 0)$ es un foco inestable, denominándose estable si $\alpha < 0$. Cuando $\alpha = 0$, todas las órbitas son cerradas y rotan infinitas veces alrededor de $(0, 0)$ con período $2\pi/\beta$ (en este caso se dice que $(0, 0)$ es un centro lineal, Figura 5.2).*



Figura 5.1: Foco inestable (izquierda) y foco estable (derecha) de la ecuación lineal $x' = Ax$.

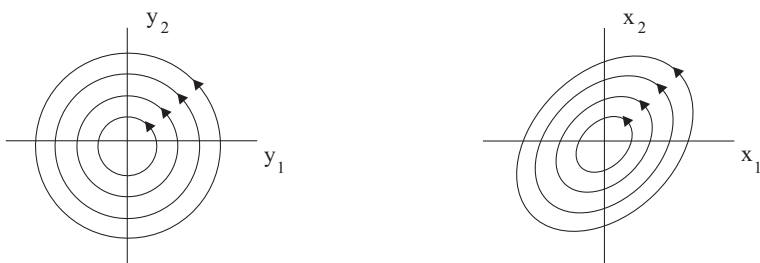


Figura 5.2: El origen $(0, 0)$ es un centro de $x' = Ax$. A la izquierda se representan las órbitas de la ecuación transformada $y' = Jy$, J la forma canónica real de A , que son además circunferencias.

Observación 5.9. La condición necesaria y suficiente para que $(0, 0)$ sea un foco es:

$$(\text{traza } A)^2 - 4\det A < 0 \quad \& \quad \text{traza } A \neq 0. \quad (5.4)$$

Si traza $A > 0$ el foco es inestable, si traza $A < 0$ el foco es estable. Nótese que la condición $\det A > 0$ está implícita en (5.4).

El punto $(0, 0)$ es un centro si y sólo si:

$$\det A > 0 \quad \& \quad \text{traza } A = 0.$$

Ejemplos 5.10.

a) Foco estable.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -10 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Centro.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observación 5.11. En el caso de autovalores complejos $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$, se observa que las órbitas de $y' = J_R y$ rotan en sentido negativo con velocidad angular β . Al aplicar la transformación $x = P^{-1}y$ para regresar a la ecuación original, el sentido de rotación se mantiene si $\det P > 0$ y se invierte si $\det P < 0$. Obsérvese la situación de los sistemas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En ambos casos los autovalores son $\lambda = 1 \pm i$. En el primero la rotación es a favor de las agujas del reloj, en el segundo al contrario.

Teorema 5.14. Sean λ_1 y λ_2 son reales y distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Se tienen los siguientes casos:

- a) Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$), las únicas semiórbitas positivas acotadas cuando $t \rightarrow +\infty$, que además tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$ son $(0, 0)$ y las dos semirrectas de $V_1 \setminus \{(0, 0)\}$. Análogamente las únicas semiórbitas negativas acotadas cuando $t \rightarrow -\infty$, que tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$ son $(0, 0)$ y las dos semirrectas de $V_2 \setminus \{(0, 0)\}$ (se dice que $(0, 0)$ es un punto de silla, Figura 5.3).
- b) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ todas las órbitas convergen a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Exceptuando las órbitas en V_2 todas las restantes órbitas se acercan a $(0, 0)$ de forma tangente a V_1 . En este caso se dice que $(0, 0)$ es un nodo estable. Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ la situación es análoga cambiando t por $-t$ ($(0, 0)$ se llama entonces nodo inestable, Figura 5.3).

Observaciones 5.12.

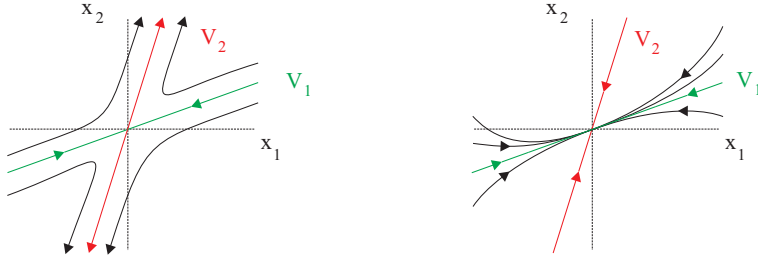


Figura 5.3: A la izquierda, $(0,0)$ es un punto de silla. A la derecha, $(0,0)$ es un nodo estable.

- a) Una condición necesaria y suficiente para que $(0,0)$ sea un punto de silla es que:

$$\det A < 0.$$

- b) Una condición necesaria y suficiente para que $(0,0)$ sea un nodo es que:

$$\det A > 0 \quad \& \quad (\text{traza } A)^2 - 4\det A > 0.$$

Si traza $A > 0$ el nodo es inestable, si traza $A < 0$ el nodo es estable.

Ejemplo 5.13.

- a) Punto de silla.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- b) Nodo estable.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Teorema 5.15. *Supongamos que λ_1 es un autovalor doble y negativo.*

- a) *Si $\dim V_1 = 2$ entonces todas las órbitas son semirectas que convergen a $(0,0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$ (Figura 5.4).*

- b) *Si $\dim V_1 = 1$ entonces todas las órbitas de (5.3) convergen a $(0,0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$ acercándose a dicho punto de manera tangente a V_1 (Figura 5.4).*

En ambos casos se dice que $(0,0)$ es un nodo estable impropio. Si λ_1 es positivo, la situación es la misma una vez se ha cambiado t por $-t$.

Observación 5.14. Una condición necesaria y suficiente para que $(0,0)$ sea un nodo impropio es:

$$(\text{traza } A)^2 - 4\det A = 0.$$

Las dos configuraciones de nodo se diferencian en la multiplicidad geométrica: la configuración en estrella corresponde a $\gamma = 2$. Nótese que en ese caso la matriz A tiene necesariamente la forma $\lambda_1 I$.

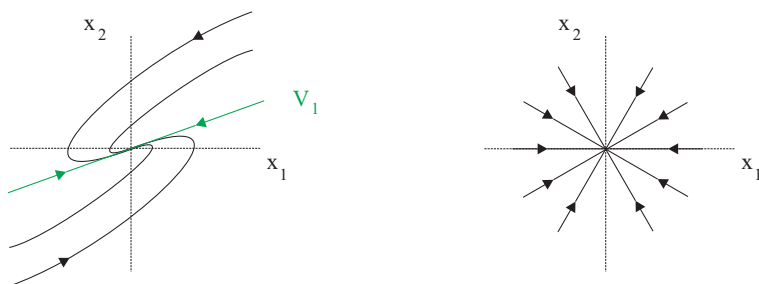


Figura 5.4: Las dos configuraciones de nodo impropio.

Ejemplo 5.15.

a) Nodo impropio estable.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5.3.1. Ejercicios

- Hállense todas las órbitas –junto con la orientación respectiva de las mismas– de las siguientes ecuaciones:

$$a) \ x' = x, \quad b) \ x' = x - x^2, \quad c) \ x' = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

¿Cómo es la forma general de las órbitas $\gamma \subset \mathbb{R}$ de una ecuación escalar $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$? Si γ es una de tales órbitas, trácese la gráfica de todas las soluciones de la ecuación que la tienen por órbita.

- Estudiar las órbitas de las siguientes ecuaciones lineales dando una descripción de su comportamiento con especial énfasis en las proximidades del punto singular $(x, y) = (0, 0)$:

a)

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 6y \\ y' &= -2x + 5y. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x' &= -9x + 13y \\ y' &= -5x + 7y. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x' &= -18x + 30y \\ y' &= -10x + 17y. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}x' &= -8x + 13y \\y' &= -5x + 8y.\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}x' &= -6y \\y' &= 2x - 7y.\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}x' &= -5x - 4y \\y' &= -x - y.\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}x' &= 4y \\y' &= -x + 4y.\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}x' &= -7x + 13y \\y' &= -5x + 9y.\end{aligned}$$

5.4. El comportamiento de una ecuación plana en el entorno de puntos críticos regulares.

Consideraremos la ecuación C^1 en un abierto G del plano,

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (5.5)$$

que ahora estudiamos en las proximidades de un punto crítico (x_c, y_c) . Recuerdese a tales efectos el comportamiento de los sistemas lineales planos con respecto al punto crítico (aislado) $(x_c, y_c) = (0, 0)$. Nuestra primera definición es,

Definición 5.16. *Un punto crítico $p_c = (x_c, y_c)$ de (5.5) se dice no degenerado si $f'(p_c)$, la matriz jacobiana de $f = (f_1, f_2)$ en p_c , es invertible (tiene determinante no nulo).*

Teorema 5.17. *Un punto crítico $p_c = (x_c, y_c)$ no degenerado de (5.5) es un punto crítico aislado para dicha ecuación. Es decir, existe un entorno U de p_c donde no hay otros puntos críticos para dicha ecuación.*

Observación 5.16. Para evitar confusiones señalamos que x representará en algunos casos el vector (x_1, x_2) (lo mismo con y, z respecto de (y_1, y_2) ó (z_1, z_2)), en otros la primera componente del vector (x, y) .

Cuando se estudia la ecuación (5.1)

$$x' = f(x) \quad (5.6)$$

cerca de un punto crítico $p_c \in \mathbb{R}^n$, resulta conveniente hacer el cambio $y = x - p_c$, tras el que la ecuación se transforma en (teorema de Taylor)

$$y' = Ay + g(y), \quad (5.7)$$

donde $A = f'(p_c)$, $g(y) = o(|y|)$ y donde $o(|y|)$ es una función C^1 que tiene la propiedad:

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{o(|y|)}{|y|} = 0.$$

Estudiar las órbitas de (5.6) cerca de p_c equivale a estudiar las órbitas de (5.7) cerca de $y = 0$ (¡que es un punto crítico de la ecuación (5.7)!). Por otra parte, el estudio de (5.7) cerca de $y = 0$ se corresponde con el de

$$z' = Jz + h(z), \quad (5.8)$$

con $h(z) = o(|z|)$, ecuación que se obtiene de (5.7) tras el cambio lineal $y = P^{-1}z$, P una matriz $n \times n$ invertible; en la que $J = PAP^{-1}$. Esto permite simplificar la matriz A original con el objeto de tener el mayor número de ceros posible (por ejemplo si J es la forma canónica de Jordan de A).

En algunos casos es conveniente estudiar las ecuaciones planas en otros sistemas de coordenadas. Por ejemplo en coordenadas polares. La ecuación (5.5):

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

se puede expresar, haciendo $\rho^2 = x^2 + y^2$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, en la forma:

$$\begin{cases} \rho' = R(\rho, \theta) \\ \theta' = \Theta(\rho, \theta). \end{cases} \quad (5.9)$$

El fundamento de esta afirmación reposa en el siguiente lema.

Lema 5.18. Sea $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ una aplicación de clase C^k que no se anula para ningún valor de t . Sean $t_0 \in (a, b)$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$ arbitrarios y tales que:

$$(x_0, y_0) = \rho_0(\cos \theta_0, \sin \theta_0) \quad \rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Existe entonces una única función $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k tal que $\theta(t_0) = \theta_0$ y:

$$\varphi(t) = \rho(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \quad t \in (a, b),$$

donde $\rho(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$.

A los efectos del presente estudio conviene establecer la relación entre ambas ecuaciones. En efecto, escribiendo

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho(t) \cos \theta(t) \\ y(t) &= \rho(t) \sin \theta(t) \end{aligned}$$

y derivando con respecto a t obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho' \\ \rho\theta' \end{pmatrix}.$$

De (5.5) se obtiene la siguiente expresión de (5.9):

$$\begin{cases} \rho' = \cos \theta f + \sin \theta g \\ \theta' = \rho^{-1}(-\sin \theta f + \cos \theta g), \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \rho' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta / \rho & \cos \theta / \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, de (5.9) se obtienen las ecuaciones (5.5) en la forma siguiente:

$$\begin{cases} x' = \rho^{-1}Rx - \Theta y \\ y' = \rho^{-1}Ry + \Theta x, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\rho & -y \\ y/\rho & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix}.$$

El lenguaje de las coordenadas polares es muy conveniente cuando se trata con órbitas cerradas o fenómenos de vorticidad en ecuaciones diferenciales ordinarias.



Figura 5.5: Foco inestable (izquierda) y foco estable (derecha) de la ecuación $x' = f(x)$.

Teorema 5.19. Sea p_c un punto crítico no degenerado de la ecuación (5.5) tal que la matriz $f'(p_c)$ admite dos autovalores λ_1 y λ_2 complejos conjugados, es decir $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ ($\beta > 0$). Si $\alpha < 0$ (> 0) entonces existe un entorno U de p_c tal que $\forall p_0 \in U$, la semiórbita positiva $\gamma^+(p_0)$ (negativa $\gamma^-(p_0)$) de (5.5) tiende a p_c cuando $t \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) rotando infinitas veces alrededor del punto p_c . Si $\alpha > 0$ se dice que p_c es un foco (no lineal) inestable, o foco estable si $\alpha < 0$ (Figura 5.5).

Demostración. Suponemos $\alpha < 0$. Haciendo el cambio $z = x - p_c$, $z = P^{-1}y$ la ecuación se reescribe:

$$y' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} y + g(y)$$

donde $|g(y)| = o(|y|)$ cuando $|y| \rightarrow 0$. Se observa que $x \rightarrow p_c$ si y sólo si $y \rightarrow 0$. Cambiado y a polares se obtiene:

$$\begin{cases} \rho' = \alpha\rho + g_1 \cos \theta + g_2 \sin \theta \\ \theta' = -\beta - g_1 \sin \theta + g_2 \cos \theta \end{cases}$$

Tomamos $0 < \varepsilon < \min\{-\alpha, \beta\}$ y existe δ tal que $|g(y)| < \varepsilon|y|$ para $|y| < \delta$. Tomando un dato inicial $\rho_0 < \delta$ se tiene inicialmente:

$$\rho(t) < \delta \Rightarrow \rho' < (\alpha + \varepsilon)\rho \Rightarrow \rho(t) < \rho_0 e^{(\alpha + \varepsilon)t}.$$

La negatividad de $\alpha + \varepsilon$ implica que siempre se ha de tener $\rho(t) < \delta$, luego la solución está definida en $[0, \infty)$. Además $\rho(t) \rightarrow 0$ exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$. Yendo a la segunda ecuación resulta que:

$$\theta_0 - (\beta + \varepsilon)t \leq \theta(t) \leq \theta_0 + (-\beta + \varepsilon)t$$

para todo $t \geq 0$. Así $\theta(t) \rightarrow -\infty$ y la semiórbita $\gamma^+(p_0)$ gira infinitas veces alrededor del origen cuando $t \rightarrow \infty$. $\square$

Observación 5.17. Si $\alpha = 0$ en el teorema, no se puede predecir en principio el comportamiento de las órbitas cerca de p_c . La situación genérica es que salvo

por un número finito, se pierden la totalidad de las órbitas periódicas de período $2\pi/\beta$ del caso lineal. En el ejemplo,

$$\begin{cases} \rho' = -\rho^3 \\ \theta' = -1 \end{cases}$$

que en coordenadas cartesianas se expresa

$$\begin{cases} x' = y - x(x^2 + y^2) \\ y' = -x - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

desaparecen todas las soluciones periódicas del problema lineal asociado

$$\begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$$

Lo mismo sucede con

$$\begin{cases} \rho' = \rho^3 \\ \theta' = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y + x(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

En los siguientes teoremas es necesario suponer que $f = f(x)$ es de clase C^2 en (5.5).

Teorema 5.20. *Supongamos que los autovalores λ_1 y λ_2 de $f'(p_c)$ son reales y distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Entonces,*

- a) [Propiedad del punto de silla] *Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$) existe un entorno U de p_c , dos semiórbitas positivas γ_1, γ_2 , y dos semiórbitas negativas Γ_1, Γ_2 contenidas todas ellas en U con las propiedades siguientes. Todas las semiórbitas positivas γ^+ que estén contenidas en U satisfacen $\gamma^+ \subset \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{p_c\}$ y convergen además a p_c cuando $t \rightarrow +\infty$, aproximándose a p_c de forma tangente a la recta $p_c + V_1$ (V_1 el autoespacio asociado al autovalor λ_1). Análogamente, toda semiórbita negativa γ^- en U debe estar contenida en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{p_c\}$ y deberá aproximarse a p_c cuando $t \rightarrow -\infty$ de forma tangente a la recta $p_c + V_2$ (V_2 el autoespacio asociado a λ_2). Además, γ_1 y γ_2 , así como Γ_1 y Γ_2 se aproximan a p_c siguiendo sentidos opuestos (Figura 5.6).*
- b) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. *Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ existe un entorno U de p_c en el que todas las semiórbitas positivas (omitimos a continuación la palabra positiva) convergen a p_c cuando $t \rightarrow +\infty$. Exceptuando dos semiórbitas en U , Γ_1, Γ_2 , llamadas separatrices, que convergen a p_c de forma tangente a $p_c + V_2$ (en sentidos opuestos) cuando $t \rightarrow +\infty$, todas las restantes semiórbitas en U se acercan a p_c de forma tangente a $p_c + V_1$. Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ la situación es análoga cambiando t por $-t$ (Figura 5.6).*

El siguiente teorema generaliza los fenómenos correspondientes observados en el caso lineal.

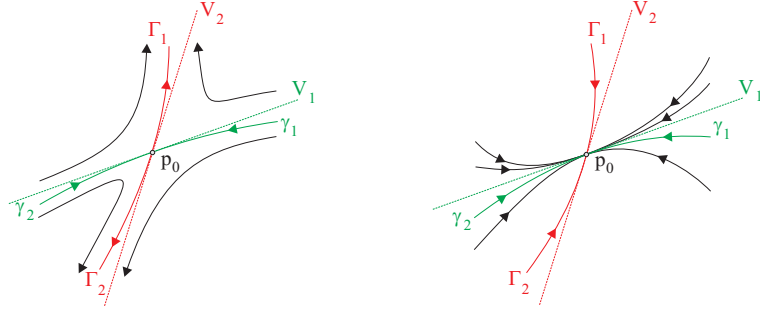


Figura 5.6: Un punto de silla (izquierda) y un nodo estable (derecha) en el caso no lineal $x' = f(x)$. Las órbitas se representan en un entorno adecuado U del punto p_c .

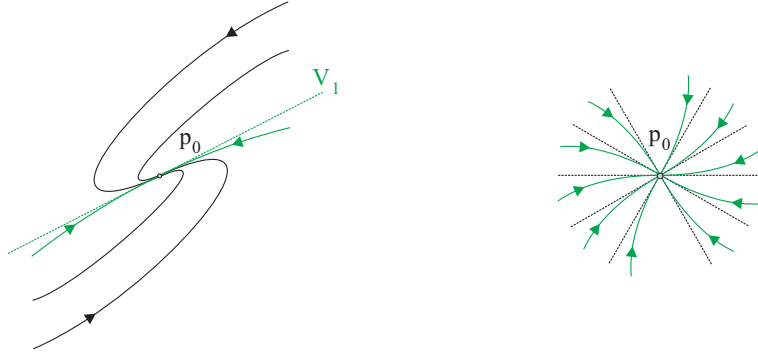


Figura 5.7: Las dos configuraciones de la versión no lineal del nodo impropio estable. Las órbitas se representan en un entorno U del punto p_c .

Teorema 5.21. *Supongamos que λ_1 es un autovalor doble y negativo de $f'(p_c)$ representando por V_1 el correspondiente autoespacio.*

- Si $\dim V_1 = 2$ entonces existe un entorno U de p_c donde todas las semiórbitas convergen a p_c cuando $t \rightarrow +\infty$. Además, por cada semirrecta que empieza en p_c existe una semiórbita γ^+ que se aproxima a p_c de forma tangente a dicha semirrecta, cuando $t \rightarrow +\infty$.*
- Si $\dim V_1 = 1$ entonces existe un entorno U de p_c donde todas las semiórbitas γ^+ convergen a p_c cuando $t \rightarrow +\infty$ acercándose a dicho punto de manera tangente a la recta $p_c + V_1$ (Figura 5.7).*

Las siguientes definiciones fueron introducidas por M. Lyapunov a principios del siglo XX.

Definición 5.22. *Un punto crítico p_c de (5.5) se dice estable si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ (que depende de ε y en principio de t_0) tal que si $\bar{x}_0$ cumple $|\bar{x}_0 - p_c| < \delta$ entonces $|x(t, t_0, \bar{x}_0) - p_c| < \varepsilon$ para todo $t > t_0$.*

Un punto crítico p_c de (5.5) se dice *asintóticamente estable* si a) es estable, b) existe $r > 0$ (que en principio depende de t_0) tal si $|\bar{x}_0 - p_c| < r$ entonces:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, \bar{x}_0) = p_c.$$

Ejemplos 5.18.

a) El punto crítico $(0, 0)$ es estable para la ecuación:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x, \end{cases}$$

pero no es asintóticamente estable.

b) $(x, y) = (0, 0)$ es un punto crítico asintóticamente estable para la ecuación

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - cy, \end{cases}$$

donde $c > 0$.

En los resultados precedentes están implícitos los siguientes teoremas también debidos a Lyapunov.

Teorema 5.23 (Lyapunov). *Sea p_c un punto crítico de la ecuación (5.5) tal que $f'(p_c)$ tiene sus autovalores con la parte real negativa. Entonces p_c es asintóticamente estable.*

Corolario 5.24. *Sea p_c un punto crítico no degenerado de la ecuación (5.5) tal que alguno de los autovalores de $f'(p_c)$ tiene la parte real positiva. Entonces p_c es inestable.*

Observación 5.19. Se demuestra en un curso de teoría de estabilidad (ver [6]) que tanto el Teorema 5.23 como el Corolario 5.24 son ciertos en el caso n -dimensional. Más aún, en el caso del Corolario 5.24 la condición de no degeneración de p_c resulta superflua.

5.4.1. Péndulo con fricción

Un péndulo de longitud l , masa m moviéndose por efecto de la gravedad en un medio donde la fricción aerodinámica es $c > 0$ se describe mediante la ecuación:

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + h \sin \theta = 0, \quad k = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{g}{l}.$$

Los equilibrios, módulo simetrías son $(\theta, v) = (\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ y $(\theta, v) = (\theta, \dot{\theta}) = (\frac{\pi}{2}, 0)$.

El segundo siempre es inestable y da lugar a un punto de silla.

El primero es un foco estable si $k^2 < 4h$, un nodo impropio si $k^2 = 4h$ y un nodo estable si $k^2 > 4h$.

Observación 5.20. El péndulo sin fricción $c = 0$ es ligeramente más difícil de analizar. Eso se hará más adelante.

5.4.2. Especies en competición

Dos especies x e y que compiten en un medio por los *mismos* recursos pueden describirse mediante el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} - \frac{y}{B}\right) \\ y' = r_2 y \left(1 - \frac{x}{A} - \frac{y}{K_2}\right). \end{cases}$$

en donde $x(t)$ e $y(t)$ representan el número de individuos (todos los coeficientes son positivos). Efectuado las normalizaciones:

$$u = \frac{x}{K_1}, \quad v = \frac{y}{K_2}, \quad \alpha = \frac{A}{K_1}, \quad \beta = \frac{B}{K_2}, \quad \tau = r_1 t, \quad \lambda = \frac{r_2}{r_1},$$

obtenemos el sistema simplificado:

$$\begin{cases} u' = u \left(1 - u - \frac{v}{\beta}\right) \\ v' = \lambda v \left(1 - \frac{u}{\alpha} - v\right). \end{cases}$$

Siempre tiene tres equilibrios que representan la extinción de las especies o de alguna de ellas:

$$(u, v) = (0, 0), \quad (u, v) = (1, 0), \quad (u, v) = (0, 1).$$

Como estamos interesados únicamente en soluciones positivas, existe un equilibrio positivo (de componentes positivas) si y sólo si

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) > 0.$$

Éste es:

$$u_c = \frac{\alpha(\beta - 1)}{\alpha\beta - 1}, \quad v_c = \frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha\beta - 1}.$$

El punto (u_c, v_c) es estable cuando $\alpha\beta > 1$. En ese caso $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son sillas. El punto (u_c, v_c) es un punto de silla cuando $\alpha\beta < 1$. En ese caso $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son nodos estables.

El punto $(0, 0)$ es en todos los casos inestable (nunca se da la extinción simultánea de las dos especies). Más precisamente, es un nodo inestable.

5.4.3. Presa y depredador

En una variante de la situación anterior x es una presa sometida a crecimiento logístico mientras y es su depredador. Un posible modelo que describe esta situación es:

$$\begin{cases} x' = rx \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{y}{B}\right) \\ y' = Cxy - Dy, \end{cases}$$

en donde todas las constantes implicadas son positivas. Si efectuamos las normalizaciones:

$$u = \frac{x}{\bar{x}}, \quad \bar{x} = \frac{D}{C}, \quad v = \frac{y}{B}, \quad \alpha = \frac{K}{\bar{x}}, \quad \beta = \frac{B}{K_2}, \quad \tau = rt, \quad \lambda = \frac{D}{r},$$

la ecuación se escribe en la forma:

$$\begin{cases} u' = u(1 - \frac{u}{\alpha} - v) \\ v' = \lambda v(u - 1). \end{cases}$$

El punto $(0, 0)$ es siempre un punto de silla. El punto $(\alpha, 0)$ es un nodo estable para $0 < \alpha < 1$ y un silla para $\alpha > 1$. Para $\alpha > 1$ existe otro punto de equilibrio de componentes positivas (en el modelo sólo tienen sentido las soluciones positivas) dado por:

$$u_c = 1 \quad v_c = \lambda \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

Dicho punto es un nodo estable para

$$0 < \lambda \leq \frac{1}{4\alpha(\alpha - 1)}$$

y un foco estable para

$$\lambda > \frac{1}{4\alpha(\alpha - 1)}.$$

5.4.4. Ejercicios

1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua en un entorno U del origen $(0, 0)$ y $A \in M_{2 \times 2}$ una matriz invertible. Supóngase además que

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = 0.$$

Demuéstrese la existencia de un entorno V de $(0, 0)$ en el que $(0, 0)$ es la única solución de:

$$Ax + f(x) = 0.$$

2. Estudiar los equilibrios de las ecuaciones:

$$\begin{cases} \rho' = \mp \rho^3 \\ \theta' = -1 \end{cases}.$$

3. Estudiar los equilibrios de la ecuación:

$$\begin{cases} \rho' = \rho(1 - \rho) \\ \theta' = -1 \end{cases}.$$

Describir el resto de las órbitas.

4. Analizar los equilibrios de la ecuación:

$$\begin{cases} u' = u(1 - u - \frac{v}{\beta}) \\ v' = \lambda v(1 - \frac{u}{\alpha} - v), \end{cases} \quad \lambda > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Demostrar que todas las solución con datos iniciales positivos son siempre positivas.

5. Analizar los equilibrios de la ecuación:

$$\begin{cases} u' = u(1 - \frac{u}{\alpha} - v) \\ v' = \lambda v(u - 1) \end{cases} \quad \alpha > 0, \lambda > 0.$$

Demostrar que todas las solución con datos iniciales positivos son siempre positivas.

6. Estudiar el comportamiento de las órbitas de la ecuación:

$$x_1' = -x_1 - \frac{x_2}{\log(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}, \quad x_2' = -x_2 + \frac{x_1}{\log(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}$$

cerca del punto crítico $(0, 0)$. En la ecuación, se entiende que el segundo miembro se anula en $(0, 0)$.

Observación. El segundo miembro es de clase C^1 pero no es C^2 cerca de $(0, 0)$. Nótese que la parte lineal de la ecuación constituye un nodo estable impropio.

7. Estudiar el comportamiento de las órbitas de la ecuación:

$$x_1' = -x_1 + x_2 + \frac{x_1}{\log(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}, \quad x_2' = -x_1 - x_2 + \frac{x_2}{\log(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}$$

cerca del punto crítico $(0, 0)$. En la ecuación, se entiende que el segundo miembro se anula en $(0, 0)$.

8. ♣ Sea p_c un punto crítico no degenerado de la ecuación $x' = f(x)$ (se supone que f es de clase C^1). Supongamos, como en el Teorema 5.21-b), que $A = f'(p_c)$ posee un autovalor real doble $\lambda_1 < 0$ de multiplicidad geométrica 1. Demuéstrese que para todo $\varepsilon > 0$ existe un cambio de variable $x = P^{-1}y + p_c$, donde P es una cierta matriz invertible, tal que la ecuación se transforma en:

$$y' = Jy + g(y), \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \varepsilon & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

en donde $\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{|g(y)|}{|y|} = 0$. Pruébese, cambiando a polares y eligiendo adecuadamente ε , que todas las semiórbitas positivas γ^+ que empiezan cerca de $(0, 0)$ tienden a $(0, 0)$ exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$.

5.5. La ecuación orbital

Consideremos la ecuación (5.5)

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

cuyo segundo miembro suponemos de clase C^1 en algún dominio G del plano.

Vamos a estudiar geométicamente la órbita γ que pasa por $p_0 = (x_0, y_0)$. Supongamos que p_0 no es punto crítico (en caso contrario todo está dicho). Entonces $f(p_0)$ ó $g(p_0)$ son no nulos. Supongamos que, por ejemplo, $f(p_0) \neq 0$ y sea Ω la componente conexa del conjunto

$$\{(x, y) : f(x, y) \neq 0\} \quad (5.10)$$

a la que pertenece p_0 . Entonces se tiene que aquella parte de γ que se encuentra en Ω , es decir $\gamma \cap \Omega$, viene descrita por la gráfica de la solución maximal $y = Y(x)$ del problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} & (x, y) \in \Omega \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Normalmente, la órbita completa γ cruza varias de las componentes conexas del conjunto (5.10) a través del lugar $f(x, y) = 0$ que típicamente consta de la unión de varias curvas. En un punto (x_1, y_1) de la curva $f(x, y) = 0$ la componente conexa de la órbita γ en el abierto $\{(x, y) : g(x, y) \neq 0\}$ se puede expresar como la gráfica de la solución maximal $x = X(y)$ del problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \\ x(y_1) = x_1. \end{cases} \quad (5.12)$$

Las ecuaciones (5.11) y (5.12) se denominan la ecuación orbital y se pueden escribir de manera conjunta como:

$$\frac{dx}{f(x, y)} = \frac{dy}{g(x, y)}.$$

Todas estas ideas se extienden fácilmente al caso n -dimensional.

Una descripción más detallada de las afirmaciones precedentes se recoge en el Anexo II.

Ejemplo 5.21 (Circunferencias). La ecuación orbital de la ecuación

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x, \end{cases}$$

en la región $y \neq 0$ es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Las soluciones hacen constante la función $V(x, y) = x^2 + y^2$. Se puede comprobar que todas las órbitas son circunferencias.

Ejemplo 5.22. [Ecuaciones de Lotka-Volterra]. Las ecuaciones de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax - Bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -Cy + Dxy\end{aligned}$$

constituyen un modelo sencillo para “imitar” la relación trófica entre una presa (x el número de efectivos) y su depredador y en un medio. Las ecuaciones ganan mucho si refieren a la población de equilibrio:

$$x_c = \frac{C}{D}, \quad y_c = \frac{A}{B}.$$

En efecto, llamando:

$$u = \frac{x}{x_0}, \quad v = \frac{y}{y_0},$$

e introduciendo la escala de tiempos:

$$\tau = At$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= u(1 - v) \\ \frac{dv}{d\tau} &= \alpha v(u - 1)\end{aligned}\tag{5.13}$$

$\alpha = \frac{C}{A}$. Considerando la ecuación orbital:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha v(u - 1)}{u(1 - v)},$$

y haciendo separación de variables se observa que la función:

$$V(u, v) = \alpha(u - \log u) + v - \log v,$$

se conserva sobre las soluciones de las ecuaciones de Lotka-Volterra en el primer cuadrante, es decir, $V(u(t), v(t))$ es constante sobre cada solución $(u(t), v(t))$. Más generalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 5.25. Una función C^1 , $V = V(x)$, se dice una integral primera para la ecuación n -dimensional (5.1) si $V(x(t)) = c$ (constante) sobre cada solución $x(t)$.

Teorema 5.26. Una función $V = V(x)$ de clase C^1 es una integral primera de la ecuación (5.5) en G si y sólo si

$$\nabla V(x) \cdot f(x) = 0 \quad (\text{producto escalar})$$

para cada $x \in G$.

Demostración. Al considerar la función $\varphi(t) = V(x(t))$, ésta es constante si y sólo si $\varphi'(t) = 0$, pero

$$\varphi'(t) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)).$$

□

Observaciones 5.23.

- a) Si la ecuación (5.1) admite una integral primera en un abierto G y $\gamma \subset G$ es una órbita de la ecuación entonces $\gamma \subset \{x \in G : V(x) = c\}$ para cierta constante c .
- b) La función $V(u, v) = \alpha(u - \log u) + v - \log v$ es una integral primera de las ecuaciones de Lotka-Volterra.

La siguiente propiedad se sigue del estudio de las ecuaciones exactas en el Capítulo I.

Proposición 5.27. *Consideremos la ecuación C^1 en un dominio G del plano:*

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

y supongamos que

$$\operatorname{div}(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (x, y) \in G.$$

Entonces, todo punto $p_0 \in G$ admite un entorno U en el que está definida una función $V = V(x, y)$ de clase C^1 (única salvo constantes aditivas) tal que:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = f \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -g$$

en U . En particular, $V(x, y)$ es una integral primera en dicho entorno. Si además, G es simplemente conexo, entonces se puede construir una integral primera en la totalidad de Ω

Observación 5.24. La existencia de integrales primeras en el entorno de puntos críticos en el plano es normalmente evidencia de la existencia de órbitas cerradas (infinitas) rodeando al punto singular (centros no lineales).

Ejemplo 5.25. Si $V(x, y)$ es una función C^1 en un dominio G del plano entonces V es una integral primera de la ecuación:

$$\begin{cases} x' = V_y \\ y' = -V_x. \end{cases}$$

en el dominio G . Una ecuación de este tipo se llama un sistema Hamiltoniano (la notación $H(x, y)$ en lugar de $V(x, y)$ es más común).

Ejemplo 5.26. [Ecuación del péndulo]. La ecuación:

$$x'' + f(x) = 0$$

se puede escribir,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x). \end{cases}$$

Una integral primera tiene la forma:

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + F(x)$$

donde $F(x) = \int_0^x f(s) ds$. Para trazar las órbitas de la ecuación basta construir las curvas de nivel de la función V , poniendo atención en aquellos casos donde dichas curvas contienen puntos críticos de la ecuación.

Debe resaltarse que los puntos críticos del sistema son de la forma $(x^*, 0)$ donde $f(x^*) = 0$. Tales x^* son así los puntos críticos de la función $F(x)$.

Se distinguen ahora dos casos: $f'(x^*) > 0$. Entonces x^* es un mínimo relativo estricto de F y para valores c de la energía:

$$c^* = F(x^*) < c < c^* + \delta$$

las curvas de nivel $V = c$ constituyen órbitas cerradas (curvas de Jordan) cuya expresión explícita es:

$$y = \pm \sqrt{2(c - F(x))}.$$

El punto $(x^*, 0)$ está rodeado por una familia de órbitas cerradas: se le denomina un centro no lineal.

Si $f'(x^*) < 0$, x^* define un máximo relativo estricto de F . El punto $(x^*, 0)$ es un punto de silla y para $c^* = F(x^*)$ la curva $V = c^*$, es decir:

$$y = \pm \sqrt{2(c^* - F(x))},$$

contiene a las variedades estable e inestable de $(x^*, 0)$. Agrupa así al punto crítico y localmente, a cuatro semiórbitas (dos positivas, dos negativas). El resto de las órbitas próximas a $(x^*, 0)$ se construye dándole valores a c :

$$c^* - \delta < c < c^* + \delta$$

y trazando las las curvas de nivel $V = c$ en la forma:

$$y = \pm \sqrt{2(c - F(x))}.$$

En el caso específico de la ecuación del péndulo sin fricción:

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$$

una integral primera es:

$$V = \frac{v^2}{2} + (1 - \cos \theta), \quad v = \dot{\theta}.$$

Ya se dijo que si V es una integral primera de la ecuación (5.1) en un dominio G del plano entonces sus órbitas están contenidas en los conjuntos de nivel

$$\{(x, y)/V(x, y) = c\}$$

($c = \text{constante}$). Sin embargo, como muestra el ejemplo del péndulo, $V(x, y) = c$ puede contener en algunos casos más de una órbita.

Sin ir más lejos, si $x(t)$ es una solución de (5.1) en $\mathbb{R}^n$ tal que $x(t) \neq x^*$ y satisface $x(t) \rightarrow x^*$ cuando $t \rightarrow \infty$ ó $t \rightarrow -\infty$ entonces tanto la órbita γ de $x(t)$ como $\{x^*\}$ yacen en el mismo conjunto de nivel $V(x) = c$ (¿por qué?).

Para averiguar el número de órbitas (que en algunos casos patológicos pudiera ser infinito) dentro de un conjunto de nivel $V = c$ tenemos la siguiente propiedad relativa al Ejemplo 5.25.

Proposición 5.28. *Sea $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^2 y consideremos el sistema*

$$\begin{cases} x' = V_y \\ y' = -V_x. \end{cases}$$

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de puntos críticos de dicha ecuación. Supóngase que el conjunto de nivel $\{V = c\}$ es no vacío. Entonces en $\{V = c\} \setminus \mathcal{P}$ hay tantas órbitas como componentes conexas tenga dicho conjunto.

Demostración. Comenzamos con una observación. Si $p_0 = (x_0, y_0) \in \{V = c\} \setminus \mathcal{P}$ entonces, por el teorema de la función implícita, existe un entorno U_0 de p_0 en $\mathbb{R}^2$ tal que:

$$(\{V = c\} \setminus \mathcal{P}) \cap U_0 = \{(x, y) : y = h(x) \text{ } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\}$$

para ciertos $\varepsilon > 0$ y una función $h(x)$ de clase C^1 en $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ (hemos supuesto que $f = V_y \neq 0$ en p_0 , caso contrario $g = -V_x$ es no nula en p_0 y una afirmación análoga es cierta si intercambiamos los papeles de x e y).

Nótese que $y = h(x)$ es la solución en $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ de la ecuación orbital

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{f}$$

con la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Sea ahora γ una órbita cualquiera en $\{V = c\} \setminus \mathcal{P}$ parametrizada por una solución $(\xi(t), \eta(t))$, $t \in (\alpha, \omega)$. Sabemos que $\gamma \subset \{V = c\} \setminus \mathcal{P}$ y como γ es conexa, está contenida en la componente conexa $\mathcal{C}$ en $\{V = c\} \setminus \mathcal{P}$ que pase por cualquiera de los puntos de γ .

Probamos en primer lugar que γ es un abierto en $\{V = c\} \setminus \mathcal{P}$. En efecto si $p_0 = (\xi(t_0), \eta(t_0))$ sabemos que:

$$\eta(t) = h(\xi(t))$$

mientras

$$\xi' = f(\xi, h(\xi))$$

con la condición inicial $\xi(t_0) = x_0$. Como $f(x, h(x)) \neq 0$ en $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ se tiene que $\xi(t)$ recorre la banda $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ en tiempo finito y como $(\xi(t), \eta(t))$ es una solución maximal, el intervalo de tiempo donde ello transcurre está incluido en (α, ω) . Ahora si $\xi(t)$ recorre $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ello significa que $(\xi(t), \eta(t))$ recorre completamente $\{V = c\} \setminus \mathcal{P} \cap U_0$ que está entonces contenido en γ .

Ahora demostramos que γ es un cerrado en $\{V = c\} \setminus \mathcal{P}$. Supongamos que $p^* = (x^*, y^*) = \lim(\xi(t_n), \eta(t_n))$ y sean U^* y $h^*(x)$ el entorno y la función introducidos al comienzo de la prueba y asociados al punto (x^*, y^*) ($(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ es el dominio de existencia de h^*). Para n grande se tiene que $(\xi(t_n), \eta(t_n)) \in U^*$ por lo tanto si $\xi^* = \xi(t_n)$ entonces $\xi(t)$ resuelve:

$$\xi' = f(\xi, h^*(\xi))$$

con dato inicial $\xi(t) = \xi^*$ en $t = t_n$, con $\eta(t) = h^*(\xi(t))$. Como $f(\xi, h^*(\xi)) \neq 0$ en $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ entonces $\xi(t)$ toma todos los valores del intervalo $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$ en un entorno finito de t_n . En particular $\xi(t^*) = x^*$ y $\eta(t^*) = h(x^*) = y^*$ (se ha tenido en cuenta que $(\xi(t), \eta(t))$ es una solución maximal). Luego $p^* \in \gamma$.

Como γ es a la vez abierto y cerrado en $\{V = c\} \setminus \mathcal{P}$ entonces $\gamma = \mathcal{C}$ y hemos terminado. □

Ejemplo 5.27. La ecuación

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 - x, \end{cases}$$

está en las condiciones de la propiedad para la función:

$$V = -\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

El conjunto,

$$V(x, y) = \frac{1}{6},$$

consta de cuatro órbitas. Una de ellas el punto crítico $(1, 0)$. Si de $V = 1/6$ quitamos $(1, 0)$ obtenemos tres componentes conexas que son las órbitas no triviales que hay en $V = 1/6$. La componente conexa acotada es una órbita que conecta el punto $(1, 0)$ consigo mismo empleando un tiempo infinito en el trayecto. Tal órbita se llama homoclínica.

La siguiente propiedad resulta de mucha utilidad para ampliar el alcance de la Proposición 5.28.

Proposición 5.29. Sean (f, g) un campo C^1 en un dominio G del plano y $\mu = \mu(x, y)$ una función continua en G que no se anula nunca (por tanto mantiene el signo). Entonces las ecuaciones (5.6) y

$$\begin{cases} x' = \mu(x, y)f(x, y) \\ y' = \mu(x, y)g(x, y), \end{cases}$$

poseen exactamente las mismas órbitas en G .

5.5.1. Interacciones presa y depredador

El punto $p_c = (1, 1)$, es un equilibrio para las ecuaciones de Lotka-Volterra (5.13). La matriz:

$$f'(p_c) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores son $\lambda = \pm i\sqrt{\alpha}$ y por tanto el comportamiento de las órbitas cerca de $(1, 1)$ es dudoso desde el punto de vista de los resultados descritos en este capítulo. Sin embargo la función

$$V(u, v) = \alpha(u - \log u) + v - \log v - (\alpha + 1),$$

permite describir las órbitas cerca de $(1, 1)$ (incluso en la totalidad del primer cuadrante). Se comprueba que:

- a) V es estrictamente convexa en $u > 0, v > 0$.
- b) $(1, 1)$ es el único punto crítico de V en el primer cuadrante.
- c) $V(u, v) \rightarrow \infty$ cuando (x, y) tiende a cualquier punto de los semiejes $u > 0$ o $v > 0$. Además $(1, 1)$ es un mínimo absoluto de V en el primer cuadrante en donde V toma el valor 0.

Para cada $c > 0$ la curva de nivel Γ_c

$$V(u, v) = c$$

representa una curva de Jordan (convexa) que contiene a $(1, 1)$ en su interior. Como no contiene punto crítico alguno se concluye (ver la primera sección del capítulo) que es la órbita de una solución periódica. Además, $\Gamma_c \rightarrow (1, 1)$ cuando $c \rightarrow 0+$. Por tanto $(1, 1)$ tiene la estructura de un “centro” y por ello este tipo de puntos se denomina un “centro no lineal”. Se tiene así un ejemplo donde la estructura lineal también se reproduce en el caso no lineal. El primer cuadrante está lleno de órbitas cerradas que rodean al equilibrio $(1, 1)$. Representan las fluctuaciones periódicas del sistema presa depredador en torno a sus valores de equilibrio.

Se comprueba asimismo que el origen $(0, 0)$, el estado de extinción del sistema, es un punto de silla. Los ejes constituyen sus variedades estable e inestable.

Observación 5.28. El sistema (5.13) no siendo Hamiltoniano tiene exactamente las mismas órbitas que

$$\begin{cases} u' = V_v \\ v' = -V_u. \end{cases}$$

Basta multiplicar ambas ecuaciones por $\mu = uv$ para obtener (5.13). Se le aplican así las conclusiones de la Proposición 5.28.

5.6. Soluciones periódicas y el problema de los dos cuerpos

Una cuestión de capital importancia de la que no se ha tratado es la de la existencia de órbitas cerradas de ecuaciones autónomas, que se conocen como oscilaciones libres o ciclos entre otros nombres.

El ejemplo fundamental de órbitas cerradas lo brindan las órbitas de objetos celestes (estrellas, planetas, satélites, etc) que es de donde se importó precisamente la terminología “órbita”.

El problema de los dos cuerpos, que tratamos a continuación, se sitúa en los propios orígenes del cálculo infinitesimal.

Se consideran dos cuerpos o masas m_1 y m_2 (dos objetos celestes) que interactúan entre sí por efecto de la atracción gravitatoria mutua. Una prueba rigurosa de que el movimiento relativo de los mismos siempre es una cónica la dio Newton por vez primera al integrar de forma geométrica las ecuaciones del problema.

Como se explicó en el Capítulo I –Ejemplo ??– si $\bar{r}$ es el centro de gravedad, $\bar{x}_1 - \bar{r}$, $\bar{x}_2 - \bar{r}$ son las posiciones relativas de los cuerpos con respecto al centro de gravedad, $\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ entonces

$$\bar{x}_1 - \bar{r} = -\theta\bar{x}, \quad \bar{x}_2 - \bar{r} = (1 - \theta)\bar{x},$$

donde $1 - \theta = m_1/M$, $\theta = m_2/M$ y finalmente:

$$\ddot{\bar{x}} = -\mu \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|^3},$$

donde $\mu = GM = G(m_1 + m_2)$. El movimiento de $\bar{x}$ es plano, basta con derivar el producto vectorial:

$$(\bar{x} \times \dot{\bar{x}})' = \dot{\bar{x}} \times \dot{\bar{x}} + \bar{x} \times \ddot{\bar{x}} = 0,$$

luego $\bar{x} \times \dot{\bar{x}} = e$ (e constante) y $\bar{x} \cdot e = 0$. El movimiento es pues plano.

Usando entonces coordenadas polares (ρ, θ) se llega a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 &= -\frac{\mu}{\rho^2}, \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} &= 0. \end{aligned}$$

De la segunda relación se deduce que $\mathcal{J} = \rho^2\dot{\theta}$ es una constante del movimiento que resulta especialmente relevante. En efecto, el área A barrida por la órbita entre los instantes t_0 y t (de ángulos correspondientes θ_0 y θ) resulta ser:

$$A(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} \rho(\theta_1)^2 d\theta_1,$$

en donde $\rho = \rho(\theta)$ en la órbita. Como $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$, la velocidad areolar $(A(\theta(t)))'$ vale:

$$\dot{A} = \frac{1}{2} \rho^2(t) \dot{\theta}(t).$$

La conservación de $\mathcal{J}$ es entonces una prueba de la segunda ley de Kepler.

Por otra parte:

$$dt = \frac{\rho^2}{\mathcal{J}} d\theta,$$

luego, si $h = h(t)$ es una función de t :

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{dh}{d\theta}, \\ \frac{d^2h}{dt^2} &= \frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{dh}{dt} \right). \end{aligned}$$

Para $\rho = \rho(\theta)$:

$$\frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) = -\frac{\mu}{\rho^2} + \frac{\mathcal{J}^2}{\rho^3}.$$

Poniendo $u = \frac{1}{\rho}$ llegamos por fin a:

$$u'' + u = \frac{\mu}{\mathcal{J}^2},$$

de donde:

$$u = \frac{\mu}{\mathcal{J}^2} + C \cos(\theta - \omega), \quad B > 0. \quad (5.14)$$

El valor de las constantes $\mathcal{J}$, ω y C viene dado por las condiciones iniciales:

$$\bar{x}_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}, \quad \dot{\bar{x}}_0 = \rho_1 e^{i\theta_1},$$

en la forma:

$$\dot{\rho}_0 = \rho_1 \cos(\theta_1 - \theta_0), \quad \dot{\theta}_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0} \sin(\theta_1 - \theta_0), \quad \mathcal{J} = \rho_1 \rho_0 \sin(\theta_1 - \theta_0),$$

donde $\dot{\rho}_0 = \dot{\rho}(0)$, $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0)$, mientras C y el ángulo ω se deducen de la ecuación:

$$C e^{i\omega} = \left(\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{\mu}{\mathcal{J}^2} \right) - \frac{\dot{\rho}_0}{\mathcal{J}} i \right) e^{i\theta_0},$$

en particular:

$$C = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{\mu}{\mathcal{J}^2} \right)^2 + \left(\frac{\dot{\rho}_0}{\mathcal{J}} \right)^2}.$$

De la ecuación (5.14)

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)},$$

con $p^{-1} = \frac{\mu}{\mathcal{J}^2}$, $e = Cp$, que es la ecuación de una cónica de excentricidad e .

No es difícil comprobar que $e = 0$ corresponde a la circunferencia, $0 < e < 1$ a la elipse, $e = 1$ a la parábola y $e > 1$ al caso de la hipérbola. En consecuencia,

las órbitas del movimiento relativo son cónicas. Obsérvese que en el caso de las elipses y circunferencias se obtienen órbitas cerradas. Se deduce así de forma directa la existencia de movimientos periódicos en el problema.

En todos los casos, el origen $\bar{x} = 0$ está localizado en uno de los focos de la cónica, lo que significa que los planetas orbitan entorno al centro de gravedad que constituye uno de los focos de la cónica. Cuando m_1 es mucho más grande que m_2 (sol-tierra) se puede suponer que m_1 ocupa el centro de gravedad, que se mueve en movimiento rectilíneo uniforme y que es m_2 quien orbita alrededor de m_1 . Esta es la primera ley de Kepler que afirma que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses y que éste se halla en uno de sus focos.

Suponiendo órbitas elípticas ω marca el argumento del “periastro” (“perihe-lio” en el caso del sistema sol-tierra, “perigeo” en el sistema tierra-luna). Es el ángulo que marca la posición más próxima del cuerpo ligero (la tierra) con respecto al más pesado $m_2 \gg m_1$ (el sol).

Con sólo un poco de trabajo más se prueba fácilmente la tercera ley de Kepler para órbitas elípticas que afirma que el cuadrado del periodo T es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita, con una constante que es independiente del planeta (ver más detalles en [8], una excelente introducción a la mecánica celeste). El periodo T es, obviamente, el año del planeta.

5.6.1. Ejercicios

1. Hállense los puntos singulares y decídase –siempre que sea posible– el comportamiento de las órbitas en las proximidades de dichos puntos:

a)

$$\begin{aligned}x' &= y - 1 \\y' &= x + y + 5.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x' &= 3x^2 - xy \\y' &= 4xy - 3y^2.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x' &= (x + 1)(y - 2) \\y' &= x^2 - x - 2.\end{aligned}$$

2. Las mismas cuestiones que en el problema anterior para los sistemas planos:

$$a) \begin{cases} x'_1 = 1 - x_2 \\ x'_2 = x_1^3 + x_2, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x'_1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \\ x'_2 = (x_1 + 1)(x_2 + 1), \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 - x, \end{cases} \quad d) \begin{cases} u' = v + u - \frac{1}{3}u^3 \\ v' = -\varepsilon u \end{cases} \quad (\varepsilon > 0),$$

$$e) u'' + cu' + u(1 - u) = 0 \quad c \in \mathbb{R}.$$

En el caso c) demuéstrese que las soluciones $(x(t), y(t))$ de la ecuación hacen constante la función (Ejemplo 5.26):

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4.$$

3. Estúdiense las órbitas de los siguientes sistemas autónomos no lineales:

a)

$$\begin{aligned}x' &= x^2 \\ y' &= x^2 + y^2 + xy.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x' &= x + y + 6 \\ y' &= 3x - y - 6.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x' &= x^2 - 2y^{-3} \\ y' &= 3x^2 - 2xy.\end{aligned}$$

4. Estúdiense las órbitas de la ecuación (ver el Ejemplo 5.26):

$$x'' + \sin x = 0.$$

5. Estudiar las órbitas de la ecuación (ver el Ejemplo 5.26):

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 - x, \end{cases}$$

6. Analizar las órbitas de la ecuación:

$$\begin{cases} x' = (-3x - y)(x^2 + y^2 - 1) \\ y' = 2x(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

Indicación. Obsérvese que, tomando las debidas precauciones, la ecuación orbital es sencilla.

7. Dedúzcanse las expresiones para $\dot{\rho}_0$, $\dot{\theta}_0$, $\mathcal{J}$, C y ω presentadas en el problema de los dos cuerpos. Demuéstrese la afirmación allí enunciada sobre la posición que marca el perihelio.

Indicación. Se tiene:

$$\bar{x} = \rho e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{x}} = (\dot{\rho} + i\rho\dot{\theta})e^{i\theta}.$$

5.7. Anexo I: Órbitas que son curvas de Jordan

Presentamos algunos lemas (cf. [12]). En lo que sigue usamos las letras J, I para designar los intervalos cerrados $[a, b]$ y $[\alpha, \beta]$, respectivamente.

Lema 5.30. *Sea $h : J \rightarrow \mathbb{R}$, $J = [a, b]$, continua y localmente inyectiva. Entonces h es inyectiva y por tanto estrictamente monótona.*

Demostración. Observamos que si h es inyectiva en J entonces $h(a) < h(b)$ ó $h(a) > h(b)$. En el primer caso por ejemplo, $h(a) < h(y) < h(b)$ si $a < y < b$ pues si, pongamos por caso, $h(y) > h(b)$ existiría $a < c < y$ con $h(c) = h(b)$ (teorema del valor medio) lo cual no es posible. Si $a < x < y < b$ aplicamos el razonamiento en el intervalo $[a, y]$ y concluimos que $h(a) < h(x) < h(y)$. Por tanto h es creciente (estrictamente) en J .

Ahora probamos el lema. h es inyectiva en el intervalo $[a, a + \varepsilon]$ por tanto creciente (por ejemplo) en $[a, a + \varepsilon]$. Ponemos:

$$c = \sup\{t \in [a, b] : h \text{ creciente en } [a, t]\}.$$

Ha de ser $c = b$ pues si $c < b$ entonces h es estrictamente monótona en $[c - \delta, c + \delta]$ para cierto $\delta > 0$ y por tanto creciente en dicho intervalo. Esto contradice la definición de c . □

Lema 5.31. *Sea $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de Jordan con $C = \zeta(I)$ y $z : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización C^1 (Observación 5.4) con $z(J) \subset C$. Entonces existe una única función continua y estrictamente monótona $h : J \rightarrow I$ tal que:*

$$z(t) = \zeta(h(t))$$

para cada $t \in J$.

Demostración. Como ζ es inyectiva $h = \zeta^{-1} \circ z$.

Por otro lado $z(t)$ es localmente inyectiva porque $z'(t) \neq 0$ en J . En efecto, ello implica que cada $t_0 \in J$ admite un entorno U donde alguna de las componentes $z_i(t)$ de $z(t)$ es inyectiva, luego la propia $z(t)$ es inyectiva en U . En consecuencia, h también es localmente inyectiva.

Ahora $\zeta : J \rightarrow C$, $C = \zeta(I)$ es un homeomorfismo porque es continua, biyectiva y C es compacto (esta observación es válida para todas las parametrizaciones de Jordan). Así h también es continua y en virtud del lema precedente hemos terminado. □

En el siguiente resultado consideramos $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, G un abierto, f de clase C^1 y la ecuación diferencial autónoma (5.1):

$$x' = f(x).$$

Teorema 5.32. *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ una curva de Jordan que no contiene puntos críticos de la ecuación (5.1). Sea $x(t)$, $t \in (\alpha_1, \omega_1)$, una solución maximal de dicha ecuación cuya órbita $\gamma \subset C$. Entonces $x(t)$ es una solución periódica y $\gamma = C$.*

Demostración. Como C es un compacto de los resultados de prolongación se sigue que $(\alpha_1, \omega_1) = \mathbb{R}$ y $x(t)$ está definida en todo $\mathbb{R}$.

Suponemos que $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I = [\alpha, \beta]$ es una parametrización de Jordan cerrada que parametriza C , por tanto ζ es inyectiva en $[\alpha, \beta)$ y $\zeta(\alpha) = \zeta(\beta)$. Ahora observamos que la extensión T -periódica $\tilde{\zeta}$ de ζ a $\mathbb{R}$, $T = \beta - \alpha$, es tal que la restricción $\tilde{\zeta}|_{I_0}$ de $\tilde{\zeta}$ a cualquier intervalo de la forma $I_0 = [t_0, t_0 + T]$ es también una parametrización de Jordan de C . Esto nos permite suponer que el valor inicial $x(0)$ de la solución coincide con el punto inicial-final de la parametrización:

$$x(0) = \zeta(\alpha) = \zeta(\beta).$$

Ahora definimos:

$$c = \sup\{t > 0 : x[0, t] \neq C\}.$$

Primero observamos que $c > 0$ porque $x[0, \varepsilon] \rightarrow x(0) = \zeta(\alpha)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0+$ y C no es un punto.

Por otro lado, para $0 < c' < c$, $x[0, c'] \subset C' \subset C$ donde C' es un arco de Jordan. En efecto, observamos que $C' \setminus \{x(0)\} \approx (\alpha, \beta)$ (" $\approx$ " = "homeomorfo"). Por otro lado, $x(0, c')$ es conexo en $C \setminus \{x(0)\}$ luego $\zeta^{-1}(x(0, c'))$ es un subintervalo estrictamente contenido en (α, β) lo que significa que $\zeta^{-1}(x(0, c')) \subset (\alpha, \beta - \varepsilon)$ o que $\zeta^{-1}(x(0, c')) \subset (\alpha + \varepsilon, \beta)$ para algún ε . Suponiendo por ejemplo el primer caso, $x(0, c') \subset \zeta[\alpha, \beta - \varepsilon]$. Por continuidad $x[0, c'] \subset \zeta[\alpha, \beta - \varepsilon]$ que prueba la afirmación formulada si se toma $C' = \zeta[\alpha, \beta - \varepsilon]$.

Por el lema precedente existe $h : [0, c'] \rightarrow [\alpha, \beta - \varepsilon]$ continua, creciente y única tal que:

$$x(t) = \zeta(h(t)) \quad t \in [0, c'].$$

Como $c' < c$ es arbitrario la aplicación h se puede extender por unicidad a una aplicación continua y creciente $h : [0, c) \rightarrow [\alpha, \beta]$ tal que

$$x(t) = \zeta(h(t))$$

para todo $t \in [0, c)$. Vamos a llamar $\gamma = \lim_{t \rightarrow c} h(t)$ que existe y cumple $\alpha < \gamma \leq \beta$. En primer lugar podemos concluir que $c < \infty$ pues en caso contrario existiría:

$$x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow \gamma} \zeta(s).$$

Entonces x^* sería un punto crítico de la ecuación en γ lo cual no es posible.

Como $c < \infty$ extendemos h a $[0, c]$ definiendo $h(c) = \gamma$. Tenemos entonces que $x(c) = \zeta(\gamma)$ y afirmamos que $\gamma = \beta$. Caso contrario $\gamma < \beta$ y

$$x[0, c] = \zeta[\alpha, \gamma] \neq C = \zeta[\alpha, \beta].$$

Como $\zeta[\beta - 2\varepsilon_1, \beta - \varepsilon_1] \cap x[0, c] = \emptyset$ (ε_1 pequeño) resulta $x[0, c + \varepsilon] \neq C$ que contradice la definición de c . Por tanto ha de ser $\gamma = \beta$ y

$$x[0, c] = C$$

con $x(c) = h(\beta) = x(0)$. □

Se demuestra a continuación el Teorema 5.12

Teorema 5.33. *Si γ es una órbita compacta de (5.1) y no es un punto crítico, entonces es la órbita de una solución periódica.*

Demostración. Demostramos que γ no puede ser abierta. Si γ es compacta, la solución $x(t)$ que la parametriza está definida en todo $\mathbb{R}$ y $x : \mathbb{R} \rightarrow \gamma$ es una biyección continua en caso de ser γ abierta. Por otro lado la condición $x'(t) \neq 0$ implica que $x(\cdot)$ define un homeomorfismo local sobre su imagen γ . En efecto cada punto t_0 es centro de un intervalo compacto I sobre el que x es inyectiva. Como $x(I)$ es compacto, $x : I \rightarrow x(I)$ es un homeomorfismo (de hecho este argumento prueba que todas las soluciones no constantes definen una aplicación recubridora sobre su órbita). Si γ es abierta (de acuerdo al teorema de clasificación) resulta que $\mathbb{R}$ es homeomorfo a γ y γ no puede ser compacta. $\square$

5.8. Anexo II: La ecuación orbital

Consideramos la ecuación C^1 en un abierto G del plano:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Asimismo Ω_k^+ representa una componente conexa del conjunto $\{(x, y) \in G : f(x, y) > 0\}$ que por el momento representamos como Ω^+ para abreviar. Tenemos la siguiente propiedad.

Proposición 5.34. *Sean $p_0 = (x_0, y_0) \in \Omega^+$ y γ^+ la órbita de la ecuación (5.5):*

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

observada en Ω^+ . Entonces:

$$\gamma^+ = \{(x, y) : y = h(x), \quad x \in (a, b)\}$$

donde $(h, (a, b))$ es la solución maximal del problema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} & (x, y) \in \Omega^+ \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Demostración. El problema:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) & x(0) = x_0 \\ y' = g(x, y) & y(0) = y_0 \end{cases} \quad (5.16)$$

admite una única solución maximal $(x(t), y(t))$ definida en $I_+ = (\alpha_+, \omega_+)$ con $(x(t), y(t)) \in \Omega_+$ para $t \in I_+$. Como $x'(t) > 0$, $x : I^+ \rightarrow (a_+, b_+)$ define

un difeomorfismo con $(a_+, b_+) = x(I_+)$. Si $x \mapsto \tau(x)$ es la inversa de $x(t)$ y $h_+(x) = y(\tau(x))$ entonces $(h_+, (a_+, b_+))$ define una solución de (5.15). Luego $(a_+, b_+) \subset (a, b)$ y $h_+(x) = h(x)$ en (a_+, b_+) . Nótese que en particular la solución del problema original se escribe en la forma:

$$(x(t), y(t)) = (x(t), h_+(x(t))) \quad t \in I_+,$$

de donde,

$$\gamma^+ = \{(x, y) : y = h_+(x), \quad x \in (a_+, b_+)\}.$$

Ahora consideramos la solución maximal $(h, (a, b))$ de (5.15). Introducimos el problema:

$$\begin{cases} x' = f(x, h(x)) & x \in (a, b) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Su solución maximal $(\xi, (\alpha_0, \omega_0))$ satisface $\xi(t) \rightarrow a$ y $\xi(t) \rightarrow b$ cuando $t \rightarrow \alpha_0$ y $t \rightarrow \omega_0$, respectivamente. Ello es consecuencia de que $f(x, h(x)) > 0$ para $x \in (a, b)$. Asimismo:

$$(x(t), y(t)) = (\xi(t), h(\xi(t))) \quad t \in (\alpha_0, \omega_0)$$

es solución de (5.15). En particular $(\alpha_0, \omega_0) \subset I_+$ luego $\xi(\alpha_0, \omega_0) = x(\alpha_0, \omega_0)$ es decir $(a, b) \subset (a_+, b_+)$. De lo establecido más arriba $(a, b) = (a_+, b_+)$ y por tanto $h = h_+$, luego hemos terminado. $\square$

En la siguiente propiedad Ω^+ representa una componente de $\{(x, y) \in G : f(x, y) > 0\}$.

Proposición 5.35. *Sea γ una órbita de la ecuación (5.5). Entonces $\gamma \cap \Omega^+$ se representa mediante la gráfica en $\mathbb{R}^2$ de una solución maximal de la ecuación orbital*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)},$$

observada esta ecuación en Ω^+ .

Demostración. Usamos la notación de la propiedad anterior y notamos que si $p_0 \in \gamma \cap \Omega^+$ entonces $\gamma^+ \subset \gamma \cap \Omega^+$. Se trata entonces de probar que $\gamma \cap \Omega^+ = \gamma^+$ y aplicar la proposición precedente.

Sea $(\bar{x}, (\alpha, \omega))$ la solución maximal por p_0 , siendo entonces $\gamma = \bar{x}(\alpha, \omega)$, donde $\bar{x}(t) = (x(t), y(t))$. Resulta que:

$$\gamma \cap \Omega^+ = \bar{x}(I^*),$$

donde $I^* \subset (\alpha, \beta)$. Ahora, $\gamma \cap \Omega^+$ es abierto en γ y si $\hat{x} = x(\hat{t}) \in \gamma \cap \Omega^+$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{x}(\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon) \subset \Omega^+$, así $(\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon) \subset I^*$. Esto prueba que I^* es abierto y por tanto lo escribimos como una unión disjunta:

$$I^* = \cup(\alpha_n, \beta_n).$$

Por otra parte $x'(t) > 0$ para $t \in I^*$ ello implica que $x(I^*) = \cup(a_n, b_n)$ siendo tales intervalos disjuntos. Finalmente $\pi(\gamma \cap \Omega^+) = x(I^*)$ donde $\pi(x, y) = x$ por tanto $x(I^*)$ ha de ser conexo y sólo puede haber un sólo intervalo (a_n, b_n) y consecuentemente un sólo intervalo (α_n, β_n) . Si $I^* = (\alpha_n, \beta_n)$ entonces

$$\gamma \cap \Omega^+ = \bar{x}((\alpha_n, \beta_n)) \subset \gamma^+,$$

pues $(\bar{x}, (\alpha_n, \beta_n))$ es solución de (5.15) y $(\bar{x}, (\alpha_+, \beta_+))$ es su solución maximal. $\square$

Observación 5.29. Si γ es una órbita de la ecuación (5.5) y $\Omega^+ = \{(x, y) \in G : f(x, y) > 0\}$ entonces $\Omega^+ = \cup \Omega_n^+$ donde Ω_n^+ son las componentes de Ω^+ . Entonces:

$$\gamma \cap \Omega^+ = \cup_n (\gamma \cap \Omega_n^+),$$

y cada componente $\gamma \cap \Omega_n^+$ se representa mediante la gráfica de una solución maximal de la ecuación orbital

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Si $\Omega^- = \{(x, y) \in G : f(x, y) < 0\}$ y Ω_n^- son sus componentes, entonces $\gamma \cap \Omega^- = \cup_n (\gamma \cap \Omega_n^-)$ y un análisis idéntico al de arriba prueba que cada componente $\gamma \cap \Omega_n^-$ se representa mediante la gráfica de una solución maximal de dicha ecuación orbital.

Similarmente, si $\Lambda^+ = \{(x, y) \in G : g(x, y) > 0\}$, $\Lambda^- = \{(x, y) \in G : g(x, y) < 0\}$ y sus componentes son $\Lambda_n^\pm$ entonces las componentes $\gamma \cap \Lambda_n^\pm$ de $\gamma \cap \Lambda^\pm$ se representan mediante las gráficas de soluciones maximales de la ecuación orbital:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

observada en $\Lambda_n^\pm$.

Finalmente, si la órbita γ no es un punto crítico entonces $\gamma \subset \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Lambda^+ \cup \Lambda^-$ luego se describe totalmente mediante la gráfica de una de las dos versiones de la ecuación orbital.

Ejemplo 5.30. [Ecuaciones de Lotka-Volterra]. Las órbitas de la ecuación $(A, B, C, D > 0)$

$$\begin{cases} x' = Ax - Bxy \\ y' = -Cy + Dxy, \end{cases}$$

en el primer cuadrante $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, se pueden describir mediante la gráfica de las soluciones de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-Cy + Dxy}{Ax - Bxy},$$

en las componentes:

$$\Omega^+ = \{y < \frac{A}{B}\} \quad \Omega^- = \{y > \frac{A}{B}\}.$$

Se pueden expresar mediante soluciones de

$$\frac{dx}{dy} = \frac{Ax - Bxy}{-Cy + Dxy},$$

en las componentes:

$$\Lambda^+ = \{x > \frac{C}{D}\} \quad \Lambda^- = \{x < \frac{C}{D}\}.$$

Como se vio, las órbitas se representan de manera conjunta mediante las curvas de nivel de la función:

$$V(x, y) = A \log y - By + C \log x - Dx.$$

En efecto $V(x, y) = c$ representa de manera unificada la solución general de ambas ecuaciones.

Bibliografía

- [1] BREZIS, H., *Análisis Funcional*. Alianza, Madrid, 1983.
- [2] CHOW S. N., HALE J. K., *Methods in local bifurcation theory*. Springer, Berlín, 1982.
- [3] COPPEL, W. A., *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, D. C. Heath and Company, Boston, 1965.
- [4] DE GUZMÁN, M., *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Teoría de la Estabilidad y Control*. Alhambra, Madrid, 1975.
- [5] DE GUZMÁN, M. (EDITOR), *Matemáticas en un Mundo Moderno*. Ed. Blume, Barcelona, 1970.
- [6] HARTMAN, PH., *Ordinary Differential Equations*. J. Wiley, New York, 1964.
- [7] KLINE M., *Pensamientos matemáticos desde la antigüedad hasta nuestros días* (3 Vols.). Alianza Universidad, Madrid, 1990.
- [8] ORTEGA R., UREÑA A., *Introducción a la Mecánica Celeste*. Ediciones de la Universidad de Granada, Granada, 2010.
- [9] PUIG ADAM, P., *Ecuaciones diferenciales*. Madrid, 1977.
- [10] ROUCHÉ N., MAWHIN J., *Équations Différentielles Ordinaires. Vol. I, Théorie Générale*. Masson et Cie, París, 1973.
- [11] SPIVAK, M., *Calculus*. Reverté, Barcelona.
- [12] WALTER, W., *Ordinary Differential Equations*. Springer, Berlín-NY, 199*.