**Análisis Matemático VI** **Curso 2005-2006**

**Examen Final de Junio** **$1^a$ convocatoria**

1. Descríbase geométricamente el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación:
$$z^2 - \bar{z}^2 = i.$$

2. Sea $\operatorname{Log} z$ la rama principal del logaritmo. Probar que:
$$\overline{\operatorname{Log} z} = \operatorname{Log} \bar{z}.$$

3. Sin utilizar la regla de L'Hospital hállese el valor del límite:
$$\lim_{z \to 2i} \frac{z^2 - iz + 2}{z^2 + 4}.$$

4. Se considera la función:
$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$
Estúdiese su dominio de holomorfía calculando allí la derivada $f'(z)$. ¿Cuál es la imagen del eje imaginario $\Re z = 0$ mediante dicha función?

5. La función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ se define mediante las expresiones:
$$u(x, y) = x^3 + axy^2,$$
$$v(x, y) = bx^2y + cy^3 + 1,$$
donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Hallar los valores de $a, b, c$ que hacen de $f(z)$ una función entera.

6. Determinar el dominio de holomorfía de la función $f(z) = \operatorname{Log}(1 + z^2)$. Calcular su desarrollo en serie de potencias en $z = 0$ así como el correspondiente radio de convergencia.

   *Indicación.* Para calcular el desarrollo puede ser útil derivar primero la función.

7. Sea $\gamma$ la circunferencia de centro 0 y radio $R > 0$ parametrizada en la forma:
$$\gamma(s) = Re^{is}, \qquad 0 \leq s \leq 2\pi.$$
Hállense los valores de la integral:
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2iz},$$
para $0 < R < 2$ y $R > 2$.

8. Calcular, usando el teorema de los residuos, la integral:
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + 1}\, dx.$$

9. Sean $g(z)$ una función holomorfa en la bola $B(a, R)$ con un *cero* simple en $z = a$ y $f(z)$ una función holomorfa en $B(a, R) \setminus \{a\}$ que posee un *polo* doble en $z = a$.

a) Demostrar que $z = a$ es un polo simple de $(z - a)f(z)$.

b) Probar que $z = a$ es un polo simple de $g(z)f(z)$.

c) Comprobar que:

$$\text{Res } (g(z)f(z), a) = g'(a) \text{ Res } ((z - a)f(z), a).$$

---

*Nota.* Los ejercicios del 1 al 8 valen 1 punto, el 9 dos puntos.

*La Laguna, 21 de Junio de 2006.*

**Análisis Matemático VI** **Curso 2005-2006**

**Examen Final de Junio** **$2^a$ convocatoria**

1. [1 punto] Hallar el rectángulo de lados paralelos a los ejes real e imaginario uno de cuyos vértices es el complejo $z = 2+i$ y cuyas diagonales se cortan en el punto $z_0 = 1$.

2. [1 punto] Se considera el dominio $G = \{z : 0 < \text{Arg } z < \frac{\pi}{3}\}$ y la aplicación bilineal $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ que cumple:

$$T(0) = -\sqrt{3}, \qquad T(1) = 0, \qquad T(\infty) = \sqrt{3}.$$

¿En qué curvas transforma $T$ las partes "rectas" de la frontera de G?, ¿dónde se cortan tales curvas?, ¿qué ángulo forman?

3. [1 punto] Hallar la función entera $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ tal que $f(0) = 2$ y cuya parte imaginaria tiene la forma:

$$v(x,y) = e^x(x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y + y \cos y).$$

4. [2 puntos] Se considera la función:

$$f(z) = \text{th } z = \frac{\text{senh } z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

a) Determinar su dominio de holomorfía y singularidades aisladas. Clasificar dichas singularidades.

b) Probar que $f(z)$ es periódica.

c) Calcular explícitamente una rama de inversa $g(z)$ de dicha función, determinando su dominio de holomorfía y la derivada de $g$ en dicho dominio.

5. [1 punto] Se consideran las curvas cerradas $\gamma_1 = [0, 2, 2+2i, 2i, 0]$, $\gamma_2 = [1+i, 1-i, -1-i, -1+i, 1+i]$ y la curva cerrada "suma" de las anteriores $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Calcúlese el índice $n(\gamma, z)$ de $\gamma$ con respecto a $z$, para $z$ variando en cada una de las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

6. [1 punto] Se considera el desarrollo en serie de potencias de tipo Laurent:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{|n|} z^n = \cdots + \frac{\lambda^2}{z^2} + \frac{\lambda}{z} + 1 + \lambda z + \lambda^2 z^2 + \cdots,$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, es un complejo dado. Determínese el mayor anillo de la forma $0 \leq r_1 < |z| < r_2$ donde la serie converge absolutamente.

7. [1 punto] Calcular la integral:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x(1-x^2)}\, dx.$$

8. [2 puntos] Sea $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con desarrollo de Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

a) Demuéstrese que $f$ es impar ($f(-z) = -f(z)$) si y sólo si $a_n = 0$ para todo $n$ par.

b) Pruébese que $f$ es par ($f(-z) = f(z)$) si y sólo si $a_n = 0$ para todo $n$ impar.

c) Pruébese que toda $f \in H(B(0,R))$ se escribe en forma única como la suma de una función impar y de otra par.

---

*La Laguna, 4 de Julio de 2006.*

**Análisis Matemático VI** **Curso 2005-2006**

**Examen Final** **Convocatoria de Septiembre**

1. [1 punto] Hállese el triángulo equilátero cuyo centro es $z_0 = 0$ y uno de cuyos vértices es $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$.

2. [1 punto] Hállese una aplicación bilineal $T(z) = az+b/cz+d$ que transforme el círculo $|z-4i| < 2$ en el semiplano $\Im w > \Re w$, que aplique el centro del círculo en el punto $-4$ y el punto $2i$ de la circunferencia en el origen 0.

3. [1 punto] Se considera la función:
$$g(z) = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{\mathrm{z-i}}{\mathrm{z+i}}.$$
Determinar su dominio de holomorfía $\Omega$, calculando su derivada en dicho dominio. Pruébese que $g$ define una rama de inversa de la función cotangente (es decir, una rama de arccotag $z$).

4. [1 punto] ¿Para qué valores de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ es la función:
$$f(z) = \cos x(\cosh y + a \text{ senh } y) + i \operatorname{sen} x(\cosh y + b \text{ senh } y)$$
holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$?

5. [1 punto] Hallar el radio de convergencia de la serie de potencias:
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

6. [1.5 puntos] Evaluar la integral:
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1},$$
donde $\gamma$ es la curva parametrizada por $\gamma(s) = 2|\cos 2s|e^{is}$, $0 \leq s \leq 2\pi$.

7. [1.5 puntos] Sea $f(z)$ una función continua en el dominio $G = \{z : |z| \geq R_0, \quad 0 \leq \arg z \leq \alpha\}$, que satisface:
$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = A$$
para cierto $A \in \mathbb{C}$. Pruébese entonces que:
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = i\alpha A,$$
en donde $\Gamma_R$ representa el arco de circunferencia $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \alpha$ $(R \geq R_0)$.

8. [1 punto] Sea $g$ una función holomorfa en la bola $\{z : |z-a| < R\}$ mientras $f$ es holomorfa en $\{z : |z-a| < R\} \setminus \{a\}$ y tiene un polo simple en $z = a$. Probar que:
$$\text{Res } (gf, a) = g(a) \text{ Res } (f, a).$$

9. [1 punto] Calcular la integral ($a > 0$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2 - x^2}\, dx.$$

---

*La Laguna, 1 de Septiembre de 2006.*

1. [1p] Se dan dos números complejos $a, b \in \mathbb{C}$. Pruébese que:

$$|z-a| = |z-b|$$

define la ecuación general de una recta.

2. [1p] Calcúlense las partes real $u(x,y)$ e imaginaria $v(x,y)$ de la función sen $z$. Compruébese que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

3. Se considera la función $f(z) = \sqrt{e^z}$. Determinar el mayor dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contenga a $z = 0$ en el que dicha función sea holomorfa. Calcular allí su derivada.

4. [1p] ¿Bajo qué condiciones sobre el complejo $a \in \mathbb{C}$ se tiene que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$$

define una función entera, es decir, una función holomorfa en la totalidad de $\mathbb{C}$?

5. [2p] Se considera la función:

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2}.$$

a) Hallar todas sus singularidades. Clasificarlas. Hallar los residuos.

b) Calcular el desarrollo de Laurent en $z = 0$ determinando su dominio de convergencia.

6. [1p] Se considera la circunferencia $\gamma = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Utilizar la fórmula de Cauchy para calcular la integral:

$$\int_\gamma \frac{z^{1/m}}{(z-1)^m}\, dz,$$

en donde $m$ representa un número natural.

7. [2p] Utilizar el teorema de los residuos para calcular la integral definida:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\cos x + 2)^2}.$$

8. [1p] Se consideran $f(z)$, $g(z)$ funciones holomorfas en el círculo $\{|z-a| < r\}$ de suerte que $f(a) \neq 0$ mientras $z = a$ es un cero *doble* de $g(z)$. Demostrar que la función:

$$\frac{f(z)}{g(z)}$$

posee un polo doble en $z = a$.

**Análisis Matemático VI** **Curso 2005-2006**
**Examen Final. Junio 2008**

---

*Primera convocatoria*

---

1. [*1 punto*] Sean $z_1, z_2, z_3$ tres números complejos distintos. Obténgase una condición necesaria y suficiente para que estén alineados.

2. [*1 punto*] Estúdiese cómo transforma la función:

$$T(z) = \frac{z-1}{z}$$

a las circunferencias $C_x$ cuyos diámetros son los segmentos $[0, x]$ $(x > 0)$ ó $[x, 0]$ $(x < 0)$ del eje real.

3. [*1.5 puntos*] Estúdiese el dominio de holomorfía de la función:

$$f(z) = \text{ Log } \left(\frac{1-z}{1+z}\right).$$

Hállese la serie de Taylor en $z = 0$ calculando asimismo su radio de convergencia.

4. [*1 punto*] Calcular la función entera $f(z)$ cuya parte real es:

$$\Re f(z) = xy + e^x \operatorname{sen} y - \cos x \operatorname{senh} y$$

y tal que $f(0) = -i$.

5. [*1.5 puntos*] Hallar el valor de las integrales:

a) $\int_{|z|=1} \sqrt{9 - z^2}\, dz$

b) $\int_{|z|=1} z^{-1} \text{ Log } (z + e)\, dz$,

en donde $|z| = 1$ se ha orientado positivamente en ambos casos.

6. [*1 punto*] ¿Cuáles son las singularidades aisladas de la función:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z \cos z} \text{ ?}$$

Determínense los correspondientes residuos.

7. [*1 punto*] Hallar, usando el teorema de los residuos, el valor de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

8. [*2 puntos*] Sea $\gamma$ una curva cerrada $C^1$ a trozos de $\mathbb{C}$. Se da una función $g(z)$ que es continua en $\gamma$ y se considera la integral:

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Demuéstrese con detalle que $f$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma$, es decir, pruébese que si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ entonces $f$ se puede representar como una serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con radio de convergencia positivo. Obténgase una expresión para los coeficientes $a_n$ en términos de $g$.

---

*La Laguna, a 12 de Junio de 2008.*

**Análisis Matemático VI** **Curso 2005-2006**
**Examen Final. Junio 2008**

---

*Segunda convocatoria*

---

1. [*1 punto*] Escríbase en forma binomia el número complejo:

$$(1+i\sqrt{3})^{20}.$$

2. [*1 punto*] Hallar la transformación bilineal $T$ que cumple $T(0)=0$, $T(1)=\infty$ y $T(\infty)=1$. Una vez encontrada determinar la imagen por $T$ de la región:

$$G=\{z : 0<\arg z<\frac{\pi}{2}\}.$$

3. [*1 punto*] Se considera la función

$$f(z)=\sqrt{\frac{2}{1-z}},$$

en donde $\sqrt{\cdot}$ representa la parte principal de la raíz cuadrada. Estúdiese su dominio de holomorfía, calculando su desarrollo de Taylor en $z=0$. Determinar el radio de convergencia de dicho desarrollo.

4. [*1.5 puntos*] Determinar qué relaciones deben satisfacer $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ para que:

$$u(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$$

sea la parte real de una función entera $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Calcúlese también la función $v(x,y)$.

5. [*1.5 puntos*] Hallar el valor de las integrales:

a) $\int_\gamma \operatorname{sen} z^2\ dz$,

b) $\int_\gamma (z^2+2iz)^{-1}\ dz$,

donde $\gamma(s)=2\cos s+i\operatorname{sen} s,\ s\in[0,2\pi]$.

6. [*1 punto*] Determinar el mayor dominio del plano donde converja la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{z^n}.$$

*Indicación.* Se sugiere pensar en la variable $\zeta=\dfrac{1}{z}$.

7. [*1 punto*] Hallar –mediante el teorema de los residuos– el valor de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 2x + 2}\, dx.$$

8. [*2 puntos*] Sean $f$ y $g$ funciones holomorfas en $D(a, r)$ y tales que $f(a) \neq 0$ mientras $z = a$ es un cero doble de $g$. Probar que $z = a$ es un polo doble de la función $\dfrac{f}{g}$ con residuo:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{6f'(a)g''(a) - 2f(a)g'''(a)}{3g''(a)^2}.$$

Estúdiense las singularidades y correspondientes residuos de la función:

$$h(z) = \frac{\cos z}{\operatorname{sen}^2 z}.$$

---

*La Laguna, a 30 de Junio de 2008.*

**Análisis Matemático VI** **Curso 2007-2008**
**Convocatoria de Septiembre de 2008**

---

1) [*1 punto*] Estudiar qué dominio resulta cuando se transforma $G = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0,\ \Re z > \Im z\}$ mediante la función $f(z) = iz^2$.

2) [*1.5 puntos*] Determinar en qué puntos $z \in \mathbb{C}$ son derivables las funciones:

a) $f(z) = \log(\log z)$ ($\log z$ la rama principal del logaritmo),

b) $f(z) = z(\bar{z}^2 - z)$.

3) [*1 punto*] Representar en serie de potencias de $z$ (el desarrollo de Taylor en $z = 0$) la función:

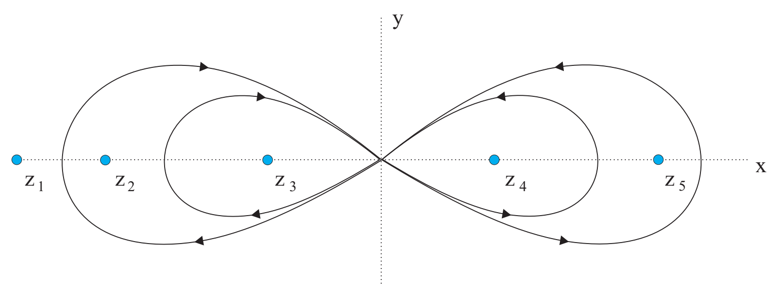
$$f(z) = \frac{z}{(1+z^2)^2},$$

determinando el correspondiente radio de convergencia $r$. ¿Puede calcularse $r$ sin apelar a la fórmula de Hadamard?

4) [*1 punto*] Empleando la fórmula de Cauchy, determinar el valor de la integral:

$$\int_\gamma \frac{\log(1+z)}{z^4}\, dz \qquad \gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

5) [*1 punto*] La curva cerrada $\gamma$ de la figura es de clase $C^1$.




Hallar razonadamente el índice $n(\gamma, z)$ cuando $z$ toma sucesivamente los valores $z_1, \dots, z_5$ que se indican en dicha figura.

6) [*1 punto*] Usar el teorema de los residuos para calcular el valor de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx.$$

7) [*1.5 puntos*] Se sabe que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera no constante que admite una infinidad de ceros distintos $z_n$ ($n \in \mathbb{N}$). ¿Qué se puede decir de $\lim z_n$?

8) [*2 puntos*] Sea $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, una función holomorfa que toma sus valores en una recta $r \subset \mathbb{C}$. Pruébese entonces que $f$ es constante.

---

*La Laguna, a 9 de Septiembre de 2008.*

**Análisis Matemático VI** **Examen Final**
**Primera Convocatoria** **Junio 2009**

---

Se debe elegir entre una de las opciones A), B).

**Opción A: Teoría y Problemas**

- [*4 puntos*] Describir las propiedades de convergencia de las series de potencias, dando la definición de radio de convergencia. Demostrar en detalle el siguiente teorema.

  **Theorem 1** (Hadamard, 1892)**.** *El radio de convergencia* $0 \leq \rho \leq \infty$ *de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *viene dado por la expresión:*

$$\rho = \frac{1}{\{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}\}}. \tag{0.1}$$

- Ejercicios.

1. [*1 punto*] Hallar las raíces de la ecuación:

$$z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

2. [*1 punto*] ¿Qué lugar geométrico representa la desigualdad:

$$|z-1| > |z+1|?$$

3. [*1 punto*] Se considera el semicírculo $S = \{\Re z < -\frac{1}{2}\} \cap \{|z+\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$. ¿Qué región resulta cuando se somete $S$ a la transformación

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1?$$

4. [*1 punto*] Estudiar la derivabilidad de la función:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}\{\sqrt{iz+1}\}}{z^2+1},$$

   hallando el valor de la derivada en los puntos donde ésta exista.

5. [*1 punto*] Se consideran las curvas cerradas $\gamma_1(s) = e^{is}$, $s \in [0, \pi]$ y $\gamma_2 = [1-i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i]$ (cuadrado de vértices $\pm 1 \pm i$). Si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ designa la curva suma, hállese el valor de la integral:

$$\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\, dz.$$

6. [*1 punto*] Calcúlese la integral impropia:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\, dx.$$

**Opción B: Problemas**

1. [*1 punto*] Hallar las raíces de la ecuación:

$$z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

2. [*1 punto*] ¿Qué lugar geométrico representa la desigualdad:

$$|z-1| > |z+1|?$$

3. [*1 punto*] Se considera el semicírculo $S = \{\Re z < -\frac{1}{2}\} \cap \{|z+\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$. ¿Qué región resulta cuando se somete $S$ a la transformación

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1?$$

4. [*1 punto*] La serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\lambda^n}$$

depende del parámetro complejo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Determinar su radio de convergencia. ¿Define una función entera para algún valor de $\lambda$?

5. [*1 punto*] Estudiar la derivabilidad de la función:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}\{\sqrt{iz+1}\}}{z^2+1},$$

hallando el valor de la derivada en los puntos donde ésta exista.

6. [*1 punto*] Se consideran las curvas cerradas $\gamma_1(s) = e^{is}$, $s \in [0,\pi]$ y $\gamma_2 = [1-i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i]$ (cuadrado de vértices $\pm 1 \pm i$). Si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ designa la curva suma, hállese el valor de la integral:

$$\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\, dz.$$

7. [*1 punto*] Se sabe que la función Arctag $z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{it : |t| \geq 1\}$. Decidir qué clase de singularidad posee la función

$$f(z) = \frac{\text{Arctag } z}{z^2}$$

en $z = 0$, calculando su desarrollo de Laurent en dicho punto.

8. [*1 punto*] Calcúlese la integral impropia:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\, dx.$$

9. [2 puntos]

a) Sea $f$ una función entera, es decir, una función holomorfa en $\mathbb{C}$. Pruébese que si $f(\mathbb{C})$ está contenido en un disco $D(a,r)$ $(r>0)$ entonces $f$ es constante.

b) Demostrar que si $u=u(x,y)$ es una función armónica en $\mathbb{R}^2$ que está acotada inferiormente entonces $u$ es constante. *Indicación*: Constrúyase en primer lugar una función entera $f$.

---

*La Laguna, a 29 de Mayo de 2009.*

**Análisis Matemático VI** **Examen Final**
**Segunda Convocatoria** **Junio 2009**

---

Se debe elegir entre una de las opciones A), B).

**Opción A: Teoría y Problemas**

- [*4 puntos*] Enunciar con detalle el teorema de la fórmula integral de Cauchy para círculos. Utilícese entonces dicho resultado para demostrar lo siguiente.

  **Theorem 1.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : G \to \mathbb{C}$ una función derivable con derivada continua en $G$. Si $D(a, r)$ es un disco arbitrario en $G$, es decir, $D(a, r) \subset \mathbb{C}$, entonces:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \tag{0.1}$$

  *para todo $z \in D(a, r)$. Además, la serie es absolutamente convergente mientras los coeficientes se expresan mediante las relaciones:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{(z - a)^{(n+1)}}\ dz \tag{0.2}$$

  *donde $R$ es cualquier número cumpliendo $0 < R < r$ y $|z-a| = R$ se recorre en sentido positivo.*

- Ejercicios.

1. [*1 punto*] Escribir en la forma $a + bi$ el número complejo:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{11}.$$

2. [*1 punto*] La serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\lambda^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{\mu^n}$$

   depende de dos parámetros complejos $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Hallar su radio de convergencia.

3. [*1 punto*] Se considera la función compleja:

$$f(z) = x^3 - 3y^2 + 2x + i(3x^2 y - y^3 + 2y).$$

   Estudiar en qué puntos $z \in \mathbb{C}$ es derivable dicha función calculando la derivada $f'(z)$ en dichos puntos.

4. [*1 punto*] Represéntense las curvas cerradas:

$$\gamma_1 = [0, e^{\frac{2\pi}{3}i} - 1, e^{-\frac{2\pi}{3}i} - 1, 0] \qquad \gamma_2 = \left[\frac{3}{2}, e^{\frac{2\pi}{3}i} + \frac{1}{2}, e^{-\frac{2\pi}{3}i} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Hállense entonces las integrales:

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\, dz\ , \qquad \int_{\gamma_2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\, dz.$$

5. [*1 punto*] Hallar y clasificar las singularidades de la función:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-1)}.$$

Calcúlense los correspondientes residuos.

6. [*1 punto*] Hallar –empleando el teorema de los residuos– el valor de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx.$$

## Opción B: Problemas

1. [*1 punto*] Escribir en la forma $a + bi$ el número complejo:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{11}.$$

2. [*1'5 puntos*] Se designa por $\sqrt{z}$ la rama principal de la raíz cuadrada.

a) Probar que $\Re(\sqrt{z}) > 0$ para $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

b) Estudiar en qué puntos de $\mathbb{C}$ es derivable la función $\sqrt{z^2+1}$ hallando el valor de dicha derivada.

c) La misma cuestión para la función $\operatorname{Log}\left(\sqrt{z^2+1}\right)$.

3. [*1 punto*] La serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\lambda^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{\mu^n}$$

depende de dos parámetros complejos $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Hallar su radio de convergencia.

4. [*1 punto*] Se considera la función compleja:

$$f(z) = x^3 - 3y^2 + 2x + i(3x^2y - y^3 + 2y).$$

Estudiar en qué puntos $z \in \mathbb{C}$ es derivable dicha función calculando la derivada $f'(z)$ en dichos puntos.

5. [*1 punto*] Represéntense las curvas cerradas:

$$\gamma_1 = [0, e^{\frac{2\pi}{3}i} - 1, e^{-\frac{2\pi}{3}i} - 1, 0] \qquad \gamma_2 = \left[\frac{3}{2}, e^{\frac{2\pi}{3}i} + \frac{1}{2}, e^{-\frac{2\pi}{3}i} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Hállense entonces las integrales:

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\, dz\ , \qquad \int_{\gamma_2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\, dz.$$

6. [*1 punto*] Hallar y clasificar las singularidades de la función:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-1)}.$$

Calcúlense los correspondientes residuos.

7. [*1 punto*] Hallar –empleando el teorema de los residuos– el valor de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx.$$

8. [*1 punto*] Calcular el desarrollo de Laurent de la función:

$$f(z) = \frac{(3-z)\operatorname{sen}\pi z}{(z-2)^2}$$

en el punto $z = 2$.

9. [*1'5 puntos*] Es de sobra conocido que para $t_1, t_2$ números reales cualesquiera se satisface la relación:

$$\operatorname{sen}(t_1 + t_2) = \operatorname{sen} t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \operatorname{sen} t_2.$$

El objetivo del presente ejercicio es <u>usar</u> el principio de prolongación analítica para extender dicha identidad al caso complejo.

a) Demostrar que para $t_1 \in \mathbb{R}$ un número real fijado, se cumple la identidad

$$\operatorname{sen}(t_1 + z_2) = \operatorname{sen} t_1 \cos z_2 + \cos t_1 \operatorname{sen} z_2,$$

para todo $z_2 \in \mathbb{C}$.

b) Se fija ahora el número comlejo $z_2 \in \mathbb{C}$ y se pide demostrar que la identidad:

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2,$$

se cumple para todo número complejo $z_1 \in \mathbb{C}$.

---

*La Laguna, a 13 de Junio de 2009.*

**Análisis Matemático VI** **Curso 2008-2009**
**Convocatoria Extraordinaria** Julio 2009

---

## A) Opción teoría y problemas

**A1) Teoría** [4 puntos]

Demuéstrese con detalle el siguiente resultado.

**Theorem 1.** *Sea $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación compleja, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, mientras $f_R : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_R(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ es la apliación real asociada a $f$. Sea $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto de $G$.*

*Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*1) $f$ es derivable en $z_0$.*

*2) $f_R$ es diferenciable en $(x_0, y_0)$ y se satisfacen las siguientes relaciones (ecuaciones de Cauchy-Riemann):*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}.$$

*En particular se tiene que:*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

**A2) Problemas** [6 puntos]

1. [*1 punto*] Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$. Determinar qué lugar geométrico describen los $z \in \mathbb{C}$ tales que:
$$\Im\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0.$$

2. [*1 punto*] Para $\lambda \in \mathbb{C}$ fijado se considera la serie de potencias:
$$1 + \lambda z + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + \cdots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-(n-1))}{n!}z^n + \cdots$$
Calcular su radio de convergencia.

3. [*1 punto*] Determinar el dominio de holomorfía de la función:
$$f(z) = (e^z + 1)\,\mathrm{Log}\,(e^z + 1),$$
calculando su derivada en los puntos de dicho dominio.

4. [*1 punto*] Se considera la función $f(z) = 1 - y^2 + i(2xy - y^2)$. Identifíquense los puntos donde es derivable calculando el valor de su derivada en tales puntos.

5. [*1 punto*] Calcular el valor de la integral:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)(z+2)}\,dz,$$

donde $\gamma$ es la curva $\gamma = [-3, 1-i, 1+i, -3]$.

6. [*1 punto*] Mediante el teorema de los residuos hallar el valor de la integral:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx.$$

**B) Opción problemas** [10 puntos]

1. [*1 punto*] Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$. Determinar qué lugar geométrico describen los $z \in \mathbb{C}$ tales que:

$$\Im\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0.$$

2. [*1 punto*] Hallar la imagen del círculo unidad $D = \{z : |z| < 1\}$ mediante la aplicación:

$$f(z) = i\frac{1-z}{1+z}.$$

3. [*1 punto*] Para $\lambda \in \mathbb{C}$ fijado se considera la serie de potencias:

$$1 + \lambda z + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + \cdots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-(n-1))}{n!} z^n + \cdots$$

Calcular su radio de convergencia.

4. [*1 punto*] Determinar el dominio de holomorfía de la función:

$$f(z) = (e^z + 1)\ \mathrm{Log}\ (e^z + 1),$$

calculando su derivada en los puntos de dicho dominio.

5. [*1 punto*] Se considera la función $f(z) = 1 - y^2 + i(2xy - y^2)$. Identifíquense los puntos donde es derivable calculando el valor de su derivada en tales puntos.

6. [*1 punto*] Calcular el valor de la integral:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)(z+2)}\,dz,$$

donde $\gamma$ es la curva $\gamma = [-3, 1-i, 1+i, -3]$.

7. [*1 punto*] Determínense las singularidades de la función:

$$f(z) = \frac{z^2+1}{\mathrm{sen}^2\, z}$$

calculando los residuos en dichas singularidades.

8. [*1 punto*] Mediante el teorema de los residuos hallar el valor de la integral:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\ dx.$$

9. [*2 puntos*] Se sabe que una función $f$ es holomorfa en $D(0,1)\setminus\{0\} = \{z : 0 < |z| < 1\}$. Se sabe asimismo que existe $0 < r < 1$ tal que si $\gamma = re^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\int_\gamma f(\zeta)\zeta^n\ d\zeta = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuéstrese que $f$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$.

---

*La Laguna, 17 de julio de 2009.*