Capítulo 1

El cuerpo de los números complejos

1.1. Los números reales. Propiedades

Módulo identificaciones, los números reales $\mathbb{R}$ constituyen el único cuerpo K conmutativo, ordenado y completo (nociones que se definen a continuación). Conforman una ampliación mejorada de conjuntos de números más elementales. A saber, los naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, los enteros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ y los racionales $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\right\}$.

Definición 1.1 (Cuerpos)**.** *Un conjunto K dotado de dos operaciones "$+$" y "$\cdot$" se dice un cuerpo conmutativo si*

i) $(K, +)$ *es un grupo abeliano (conmutativo).*

ii) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ *es un grupo y "$\cdot$" es conmutativa.*

iii) "$\cdot$" es distributiva con respecto a "$+$".

Se dice que $(K, +)$ es un grupo abeliano si para $x, y, z \in K$ arbitrarios

$$\begin{aligned}
&1) \quad x + (y + z) = (x + y) + z \\
&2) \quad \exists 0 \in K \ : x + 0 = 0 + x = x \\
&3) \quad \forall x,\ \exists \hat{x} : x + \hat{x} = \hat{x} + x = 0 \\
&4) \quad x + y = y + x.
\end{aligned}$$

En 3), $\hat{x}$ se llama el opuesto de x y se escribe $-x$. Análogamente, si abreviamos $x \cdot y = xy$, $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ cumple ($x, y, z \in K \setminus \{0\}$ cualesquiera):

$$\begin{aligned}
&5) \quad x(yz) = (xy)z \\
&6) \quad \exists 1 \in K \setminus \{0\} \ : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \\
&7) \quad \forall x,\ \exists \tilde{x} : x\tilde{x} = \tilde{x}x = 1 \\
&8) \quad xy = yx.
\end{aligned}$$

Nótese que está implícito en 6) que $1 \neq 0$. Se llama a $\tilde{x}$ el inverso de x y se escribe x^{-1}. Finalmente iii) significa que para $x, y, z \in K$ cualesquiera:

$$x(y+z) = xy + xz.$$

La diferencia y el cociente de dos elementos $x, y \in K$ $(y \neq 0)$ se definen como $x - y = x + (-y)$, $\dfrac{x}{y} = xy^{-1}$, respectivamente.

Como consecuencia de la Definición 1.1, en todo cuerpo K se cumplen una serie de propiedades que son familiares en el contexto de los números. A partir de ahora sobeentenderemos el apelativo "conmutativo" al referirnos a los cuerpos.

Proposición 1.2. *Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo. Se cumplen entonces las siguientes propiedades:*

$$\begin{array}{llll} 1) & x+y=x+z \Rightarrow y=z & 5) & x \neq 0,\ xy=xz \Rightarrow y=z \\ 2) & x+y=x \Rightarrow y=0 & 6) & x \neq 0,\ xy=x \Rightarrow y=1 \\ 3) & x+y=0 \Rightarrow y=-x & 7) & x \neq 0,\ xy=1 \Rightarrow y=x^{-1} \\ 4) & -(-x)=x. & 8) & x \neq 0,\ ((x^{-1})^{-1}=x. \end{array}$$

Las propiedades 3), 7) afirman que el opuesto y el inverso de x son únicos.

Para completar el panorama familiar de las leyes del cálculo se tiene la propiedad siguiente.

Proposición 1.3. *Si $(K, +, \cdot)$ es cuerpo entonces para $x, y \in K$ arbitrarios:*

$$\begin{array}{ll} 1) & 0 \cdot x = 0 \\ 2) & x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0 \\ 3) & (-x)y = x(-y) = -xy \\ 4) & (-x)(-y) = xy. \end{array}$$

Demostración. En el caso de 1):

$$x \cdot 0 = x(0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow x \cdot 0 = 0.$$

Para 2) si $x \neq 0$ y fuese $xy = 0$ resultaría $y = 0$ contra lo supuesto.

Asimismo se tienen las relaciones:

$$xy + (-x)y = 0, \qquad xy + x(-y) = 0$$

de donde se deduce 3). Para 4):

$$(-x)(-y) = -x(-y) = -(-xy)) = xy.$$

□

Siguiendo [**?**] damos la siguiente definición de orden total.

Definición 1.4. *Un conjunto K (totalmente) ordenado es aquél que posee una relación "$<$" que cumple las propiedades:*

i) Dados $x, y \in K$ se satisface sólo una de las siguientes propiedades: o bien $x < y$, o bien $x = y$ o bien $y < x$.

ii) (Transitiva) $x < y$ & $y < z$ implican $x < z$.

Es habitual denotar $x \leq y$ si $x < y$ o $x = y$. Asimismo $y > x$ e $y \geq x$ se usan indistintamente para representar $x < y$, $x \leq y$, respectivamente. Es también habitual introducir la relación de orden en la forma $x \leq y$.

Otra definición clave para caracterizar los números reales es la de cuerpo ordenado.

Definición 1.5. *Un cuerpo $(K, +, \cdot)$ dotado de una relación de orden total "$<$" se dice un "cuerpo ordenado" si se cumplen las siguientes propiedades de compatibilidad:*

1) $y < z \Rightarrow x + y < x + z$

2) $x > 0, y > 0 \Rightarrow xy > 0$.

Si K es un cuerpo ordenado y $x \in K$ entonces o bien $x > 0$ o $x = 0$ o $x < 0$. En el primer caso se dice que x es positivo, mientras x negativo significa $x < 0$. Se denota por K^+ a los elementos positivos de K. La definición 1.5 dice que el orden es invariante por traslaciones [1)] y que K^+ es invariante frente al producto [2)].

Proposición 1.6.

1) K^+ es invariante frente a la suma.

2) $x < y \Leftrightarrow y - x > 0$.

Es también habitual introducir la noción de cuerpo ordenado a través de los elementos positivos. En este enfoque primero se distinguen en el cuerpo K quiénes son los elementos positivos K^+. Una vez conocidos éstos se dice que $y > x$ si $y - x \in K^+$ (ver [**?**]). Otras propiedades de los cuerpos ordenados son las siguientes.

Proposición 1.7.

1. Si $x > 0$ entonces $-x < 0$, mientras $x < 0 \Rightarrow -x > 0$.

2. Si $x > 0$ entonces $y < z \Rightarrow xy < xz$.

3. En cambio, $x < 0$ y $y < z$ implican $xy > xz$.

4. Si $x \neq 0$ resulta $x^2 > 0$. En particular $1 > 0$.

Demostración. Para probar 1) si $x > 0$ resulta $x + (-x) > -x$ luego $-x < 0$. Las demás se prueban igual. □

Ejercicio 1.1. Para $p \in \mathbb{N}$ primo se designa por $\mathbb{Z}_p$ el cuerpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. ¿Es $\mathbb{Z}_p$ un cuerpo ordenado con su orden natural?

Observaciones 1.1.

a) Si K es un cuerpo ordenado podemos considerar la inyección:

$$\begin{array}{rccl} I: & \mathbb{N} & \longrightarrow & K \\ & n & \longmapsto & I(n) = n \cdot 1 := 1 + \overset{n)}{\cdots} + 1. \end{array}$$

Identificando $I(\mathbb{N})$ con $\mathbb{N}$ se deduce que todo cuerpo ordenado contiene a los racionales $\mathbb{Q}$. En efecto $\mathbb{Q}$ se obtiene como $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$, mientras $\mathbb{Z} = \{\pm p : p \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

b) En las propiedades listadas hasta ahora de los cuerpos ordenados no se observa ninguna caracterítica especial que permita distinguir $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. Esta es la seña de identidad de la propiedad de continuidad o completitud que presentamos a continuación.

Siguen ahora dos nociones habituales de los conjuntos ordenados. El calificativo ordenado hace referencia a la Definición 1.4 (cf. [**?**]).

Definición 1.8 (Cotas). *Sea K un conjunto ordenado, $E \subset K$. Se dice que $b \in K$ es una cota superior de E si $x \leq b$ para cada $x \in E$. De manera simétrica se define cota "inferior".*

Si E admite cota superior se dice acotado superiormente.

Definición 1.9 (Supremos). *Sea $E \subset K$, K ordenado. Se llama supremo de E a todo elemento $c \in K$ que cumpla las propiedades:*

1. c es cota superior de E.

2. Si $b < c$ entonces b no es cota superior de E.

Pudiera no haber elementos c con tales propiedades. Si un tal c existe, es –por 2)– necesariamente único. Esto sugiere la notación $\sup E$. La noción de "ínfimo" se introduce de manera simétrica.

Definición 1.10. *Un conjunto ordenado K posee la propiedad del supremo (repectivamente, ínfimo) si todo conjunto $E \subset K$ acotado superiormente (inferiormente) admite supremo (ínfimo).*

Se cumple la siguiente propiedad (cf. [**?**]).

Teorema 1.11. *Si un conjunto ordenado K posee la propiedad del supremo entonces también cumple la del ínfimo.*

El proceso genético que lleva de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ consiste en ir dotando de opuestos e inversos a los elementos de $\mathbb{N}$. Desde este punto de vista $\mathbb{Q}$ está libre de defectos sin embargo se tiene la siguiente propiedad.

Proposición 1.12. *El conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ no admite supremo en $\mathbb{Q}$ mientras $\{y \in Q : y^2 > 2\}$ tampoco posee ínfimo en $\mathbb{Q}$.*

Está implícito en la proposición que no es posible hallar $\sqrt{2}$ en $\mathbb{Q}$ (hecho que por otra parte se demuestra de manera directa).

Ejercicio 1.2. *Probar que no existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$. A tal fin, supóngase que $\dfrac{p}{q} = 2$ donde p, q no son pares simultáneamente.*

El que un cuerpo ordenado K posea la propiedad del supremo quiere decir que K es en cierta forma "continuo", es decir no presenta "fisuras". Topológicamente hablando esto significa que es cerrado frente a paso al límite o si quiere, que es "completo". En este sentido $\mathbb{Q}$ es defectuoso y la razón de construir $\mathbb{R}$ es la de ampliar $\mathbb{Q}$ para incluirlo en una envoltura (topológicamente) cerrada.

Definición 1.13. *Se dice que un cuerpo ordenado $\mathcal{R}$ es un cuerpo de números reales si $\mathcal{R}$ posee la propiedad del supremo.*

Un problema natural es el de la existencia de un cuerpo de números reales, cuestión que a finales del siglo XIX se conocía como el "problema del continuo" ([**?**]). G. Cantor y R. Dedekind dieron en 1876, pruebas distintas de la existencia de un tal cuerpo a partir de los números racionales $\mathbb{Q}$. El primero a través de las sucesiones de Cauchy, el segundo por medio de las así denominadas "cortaduras" de números racionales. Tales construcciones fueron los primeros frutos –por cierto bastante controvertidos en su tiempo, por no decir revolucionarios– que aportó a la matemática del último cuarto del XIX la recién estrenada teoría de conjuntos. David Hilbert, el prestigioso matematico alemán, no dudó en calificar de "paraíso" el nuevo escenario que dicha teoría propició en la matemática (cf. [**?**]). No nos ocupamos de tales construcciones de $\mathbb{R}$ pero los resultados obtenidos son equivalentes porque todos los cuerpos de números reales coinciden (módulo identificaciones). La base de esta afirmación radica en que todo cuerpo ordenado contiene una copia de los números racionales $\mathbb{Q}$ (Observación 1.1).

Teorema 1.14. *Sea $\mathcal{R}$ un cuerpo de números reales. Entonces,*

i) [Propiedad Arquimediana]. *Dado $x > 0$ para todo $y \in \mathcal{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. En particular, existe un único $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(m-1)x \leq y < mx$.*

ii) [Densidad de $\mathbb{Q}$]. *Dados $x < y$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.*

Observación 1.2. Todo espacio métrico (X, d) se puede completar a otro (Y, d) de suerte que $X \subset Y$ (en un sentido a precisar). El proceso –fiel réplica de la construcción de Cantor de $\mathbb{R}$– identifica los elementos de Y con las sucesiones de Cauchy de X. La propiedad precedente establece que todo cuerpo de números reales se identifica con las sucesiones de Cauchy de "sus" números racionales. En efecto ii) afirma que todo $x \in \mathcal{R}$ es el límite de una sucesión de números racionales. Es por ello que todos los cuerpos de números reales son isomorfos. En consecuencia a partir de ahora hablaremos de "un sólo cuerpo" de números reales que designaremos por $\mathbb{R}$.

Demostración del Teorema 1.14. i) Suponiendo $y > 0$ si fuese

$$nx \leq y$$

para todo n, existiría un supremo c de $\{nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ con lo que

$$c - x < mx$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. De ahí, $c < (m+1)x$ que no es posible.
ii) Como $y - x > 0$ se tiene de i) que

$$y - x > \frac{1}{n},$$

para algún $n \in \mathbb{N}$ con lo que

$$x < x + \frac{1}{n} < y.$$

Asimismo se sigue la existencia de $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ de suerte que:

$$nx < m_1 \ , \qquad -nx < m_2,$$

es decir:

$$-m_2 < nx < m_1.$$

Por finitud existe un único $m \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$m - 1 \leq nx < m,$$

con lo que la segunda afirmación de i) queda probada mientras:

$$\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}.$$

De ahí se concluye:

$$x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y.$$

□

Observación 1.3. La idea para probar ii) es primeramente estimar por defecto la distancia $y - x$ con $\frac{1}{n}$. Después se mide x tomando $\frac{1}{n}$ como unidad.

El problema fundamental de la extracción de raíces n-ésimas se puede resolver en cualquier cuerpo $\mathcal{R}$ de números reales.

Teorema 1.15. *Para todo $x \in \mathcal{R}$, $x > 0$, existe un único $y > 0$ tal que*

$$y^n = x.$$

Demostración. a) Unicidad. Es consecuencia de que $y_1 < y_2 \Rightarrow y_1^n < y_2^n$.
b) Existencia. Se considera el conjunto:

$$E = \{t \in \mathcal{R} : t^n < x\}.$$

Resulta que $E \neq \emptyset$ pues:

$$\frac{1}{1+x^{-1}} \in E.$$

De hecho obsérvese que

$$(1+z)^n > 1 + nz, \qquad z > 0.$$

Análogamente, $b = 1 + x$ es cota superior de E con lo que existe

$$y = \sup E.$$

Probamos que no puede ser:

$$y^n < x$$

porque existiría $h > 0$ con

$$(y+h)^n < x.$$

La clave está en medir el incremento en la función b^n. De hecho:

$$b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a), \qquad 0 < a < b.$$

Hay que elegir $h > 0$ de forma que $(y+h)^n - y^n < x - y^n$. Tomando $0 < h < 1$:

$$(y+h)^n - y^n < nh(y+h)^n < nh(y+1)^n < x - y^n,$$

para lo que basta con que:

$$h < \text{mín}\{1, \frac{x-y^n}{n(y+1)^n}\}.$$

Tampoco puede ser:

$$y^n > x,$$

porque encontramos $h > 0$ tal que:

$$(y-h)^n > x.$$

En efecto se tiene:

$$(y-h)^n - x = y^n - x - (y^n - (y-h)^n)$$

y se busca $0 < y < h$ para que:

$$y^n - (y-h)^n < y^n - x.$$

Usando la estimación anterior se tiene:

$$y^n - (y-h)^n < nhy^{n-1}$$

y basta con tener:

$$0 < h < \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}.$$

En conclusión, resulta $y^n = x$ y hemos terminado.

□

1.2. Los números complejos

Un problema fundamental desde los tiempos de la matemática babilónica y egipcia es el de la resolución de ecuaciones algebraicas (cf. [**?**]). Hay ecuaciones algebraicas en $\mathbb{R}$ que carecen de solución como:

$$x^2 + 1 = 0. \tag{1.1}$$

En efecto, la Proposición 1.7 afirma que $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ por lo que no hay elementos en $\mathbb{R}$ que satisfagan dicha ecuación. Este problema se resuelve extendiendo $\mathbb{R}$ a un cuerpo más amplio $\mathbb{C}$ que introducimos ahora.

Definición 1.16. *El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos se define como:*

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones "+" y "·":

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Sus elementos, genéricamente designados por z, se llaman números complejos.

Proposición 1.17. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un cuerpo en el que:*

$$\Re = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

es un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$. Si $z = (a, b)$ entonces:

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Proposición 1.18. *El número complejo*

$$i := (0, 1),$$

satisface $i^2 = -(1, 0)$.

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos no es sino $\mathbb{R}^2$, en donde se ha definido un "producto". Esta presentación de los números complejos se debe directamente a K. F. Gauss y fue, en su momento, el primer tratamiento riguroso de esta clase de números. Es por tanto un $\mathbb{R}$ espacio vectorial donde para $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda z := (\lambda, 0) \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

Como los complejos $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ constityen una copia de $\mathbb{R}$ es costumbre escribir a en lugar de $(a, 0)$. Bajo esta observación se tiene.

Proposición 1.19. *Todo complejo z se escribe en la forma:*

$$z = a + bi. \tag{1.2}$$

Se conoce a i como la unidad imaginaria. Siendo $-1 = (-1, 0)$ resulta que $\pm i$ son las soluciones de la ecuación (1.1).

Definición 1.20. *Para $z = (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$ se conocen a a, b como las partes real e imaginaria de z, y se denotan:*

$$a = \Re z, \qquad b = \Im z.$$

Análogamente se designa por:

$$\bar{z} = a - bi$$

el complejo conjugado de z.

Sigue ahora una obviedad.

Proposición 1.21. *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se tiene:*

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\Re z_1 = \Re z_2 \ \& \ \Im z_1 = \Im z_2).$$

A continuación, un grupo de propiedades básicas.

Proposición 1.22. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:*

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
3. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
4. $\Re z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\Im z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.
5. $z\bar{z} \in \mathbb{R}^+$, $z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Ejercicio 1.3. *Un polinomio de coeficientes complejos se define como $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^k$, donde los $a_k \in \mathbb{C}$. Pruébese que ζ es raíz de p si y sólo si $\bar{\zeta}$ es raíz del polinomio $\bar{p}(z) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{n-k} z^k$. Demostrar asimismo lo siguiente:*

i) Si $p(z)$ tiene coeficientes reales "ζ raíz $\Leftrightarrow$ $\bar{\zeta}$raíz".

ii) Si $p(z)$ tiene coeficientes reales y grado impar entonces admite al menos una raíz real.

Definición 1.23. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ se define su producto escalar como:*

$$\langle z, w \rangle = \Re(z\bar{w}),$$

por lo tanto, el módulo de un complejo z (su "norma euclídea") se define

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Proposición 1.24. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:*

1. $|z| \geq 0$ *y* $|z| = 0 \ \Leftrightarrow \ z = 0$.
2. $|\bar{z}| = |z|$.

3. $|zw| = |z||w|$.

4. $|\Re z| \leq |z|$, $|\Im z| \leq |z|$.

5. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

6. $|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\Re z\bar{w}$.

La Proposición 1.24 introduce la distancia euclídea en $\mathbb{C}$ y la principal conclusión es que la topología de $\mathbb{C}$ es la de $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea. Desde este punto de vista damos "ipso facto" sentido a todas las posibles cuestiones de convergencia en $\mathbb{C}$ (sucesiones, series, límites, continuidad, compacidad, conexión, etc). No obstante, detallaremos algunos aspectos más adelante.

Definición 1.25. *Dados $z, w \in \mathbb{C}$ la distancia euclídea entre ambos se define como:*

$$\operatorname{dist}(z, w) = |z - w|.$$

Representaremos la bola (usaremos también el término "disco") abierta como:

$$D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}.$$

Abreviaremos $D = D(0, 1)$ el disco unidad. Asimismo

$$\partial D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}.$$

designará la frontera de $D(z_0, r)$.

Observación 1.4. En todo espacio métrico se pueden elegir una infinidad de métricas equivalentes. En su momento consideraremos métricas alternativas a la euclídea.

1.3. El argumento

Se prueba en el Apéndice que la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \partial D \\ & \theta & \longmapsto & \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \end{array}$$

es sobreyectiva. Es más, su restricción h_0 a $[0, 2\pi)$ es biyectiva y es por ello que dado $z \neq 0$ existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$z = |z| \cos\theta + i|z| \operatorname{sen}\theta, \tag{1.3}$$

que es la representación trigonométrica de z con $\theta \in [0, 2\pi)$. Por otra parte, h es 2π-periódica y la restricción h_τ de h a cualquier intervalo $[\tau, 2\pi + \tau)$ también es biyectiva con lo que hay una única respresentación en la forma (1.3) siempre que θ se restrinja a variar en un intervalo de longitud total 2π de la forma $[\tau, 2\pi + \tau)$. En otras palabras, para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se tiene que:

- fijado $\tau \in \mathbb{R}$ existe un único $\theta \in [\tau, \tau + 2\pi)$ tal que (1.3) se cumple.
- todos los demás $\theta' \in \mathbb{R}$ para los que (1.3) se cumplen son necesariamente de la forma
$$\theta' = \theta + 2k\pi,$$
para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Según se indica en el Apéndice y tras la oportuna definición de la función exponencial compleja (cf. Capítulo III) se satisface la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

Quienes prefieran esperar hasta el Capítulo III pueden usar $h(\theta)$ en lugar de $e^{i\theta}$. Las propiedades fundamentales que emplearemos:

$$h(t+s) = h(t)h(s), \qquad h(0) = 1, \qquad h(\pi/2) = i,$$

se demuestran en el apéndice y son coherentes con la notación exponencial.

Por tanto
$$z = |z|e^{i\theta} \tag{1.4}$$
es lo que se conoce como la representación exponencial de z.

A los efectos del presente curso nos interesa conocer la dependencia en z de los diversos valores de θ señalados en las relaciones (1.3) y (1.4). Se les conoce como los argumentos de z. Pondremos cuidado en diferenciar los argumentos como meros valores de θ que cumplen (1.3) o (1.4) para un z fijado, del concepto de "función argumento", adelantando que es posible elegir infinitas de tales funciones.

Definición 1.26. *Un argumento de $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ es todo valor de θ que da validez a cualquiera de las expresiones* (1.3) *o* (1.4)*. Representaremos por* $\arg z$ *al único de tales $\theta \in [0, 2\pi)$, mientras que llamaremos argumento principal* $\operatorname{Arg} z$ *al único $\theta \in (-\pi, \pi]$.*

Para un complejo dado z (siempre que se hable de argumentos se entenderá $z \neq 0$) todos sus argumentos se pueden representar en la forma:

$$\{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposición 1.27. *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = z_2$ si y sólo si:*

$$|z_1| = |z_2| \qquad \& \qquad \arg z_1 = \arg z_2.$$

Proposición 1.28. *Sean z, z_1, z_2 complejos con argumentos $\theta, \theta_1, \theta_2$ y módulos ρ, ρ_1, ρ_2 entonces:*

1. $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$, $\dfrac{1}{z} = \rho^{-1}e^{-i\theta}$
2. $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

3. Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene (fórmula de d'Moivre):

$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Obsérve que no es cierto que $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ o $\arg \dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$. Las relaciones correctas son:

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}, \qquad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

A los efectos de las definiciones que siguen, para $\tau \in \mathbb{R}$, h_τ designa la restricción de h al intervalo $[\tau, \tau + 2\pi)$, $\gamma_\tau = \{th(\tau) : t \geq 0\}$ –la semirrecta cerrada desde 0 a ∞ con dirección $h(\tau)$– $\Omega_\tau = \mathbb{C} \setminus \gamma_\tau$ – el plano $\mathbb{C}$ "cortado a lo largo de γ_τ".

Proposición 1.29. *Para $\tau \in \mathbb{R}$ se define la función:*

$$\begin{array}{rccc} \arg_\tau : & \mathbb{C} \setminus \{0\} & \longrightarrow & [\tau, \tau + 2\pi) \\ & z & \longmapsto & h_\tau^{-1}\left(\dfrac{z}{|z|}\right). \end{array}$$

Se satisfacen entonces las siguientes propiedades.

1) Para cada z, $\arg_\tau z$ es un argumento de z:

$$z = |z| e^{i \arg_\tau z}. \tag{1.5}$$

2) $\arg_\tau$ es continua en Ω_τ mientras es discontinua *en cada uno de los puntos de γ_τ. Más aún, $\arg_\tau$ es C^∞ en Ω_τ con:*

$$(\arg_\tau)_x = -\frac{x}{|z|^2}, \qquad (\arg_\tau)_y = \frac{y}{|z|^2}.$$

3) $\arg_{\tau + 2k\pi} = \arg_\tau + 2k\pi$.

4) Para $\tau \in [0, 2\pi)$ se tiene:

$$\arg_\tau z = \begin{cases} \arg z & \tau \leq \arg z < 2\pi \\ \arg z + 2\pi & 0 \leq \arg z < \tau. \end{cases}$$

Observación 1.5. Las propiedades 3), 4) permiten expresar $\arg_\tau$ en términos de arg. En efecto todo τ se escribe $\tau = \langle \tau \rangle + 2k\pi$ para un único $\langle \tau \rangle \in [0, 2\pi)$. Por tanto:

$$\arg_\tau z = \begin{cases} \arg z + 2k\pi & \langle \tau \rangle \leq \arg z < 2\pi \\ \arg z + 2(k+1)\pi & 0 \leq \arg z < \langle \tau \rangle. \end{cases}$$

Demostración de la Proposición 1.29. Que $\arg_\tau$ es continua en Ω_τ y se cumple la identidad (1.5) es consecuencia de la definición de dicha función. La discontinuidad en γ_τ se razona así: existen $\zeta_n \to h(\tau)$, $\zeta'_n \to h(\tau)$, $|\zeta_n| = |\zeta'_n| = 1$,

$\lim \arg_\tau(\zeta_n) = \tau$, $\lim \arg_\tau(\zeta_n') = \tau + 2\pi$. Si $z \in \gamma_\tau$, $z = th(\tau) = \lim t\zeta_n = \lim t\zeta_n'$ de donde se concluye la discontinuidad.

La regularidad es más delicada y requiere un razonamiento "ad hoc". Hacemos una construcción explícita de la función $\arg z$. Definimos Arctag x la "rama" de la función arcotangente que toma valores en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Entonces:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{Arctag} \frac{\Im z}{\Re z} & \Re z \geq 0, \Im z > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \Re z = 0, \Im z > 0 \\ \operatorname{Arctag} \frac{\Im z}{\Re z} + \pi & \Re z < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \Re z = 0, \Im z < 0 \\ \operatorname{Arctag} \frac{\Im z}{\Re z} + 2\pi & \Re z > 0, \Im z < 0. \end{cases}$$

Un análisis cuidadoso revela que $\arg z$ tiene esa expresión y que $\arg z$ es C^∞ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

La propiedad 3) sigue del hecho de que $\arg_\tau z + 2k\pi$ es un argumento de z en el intervalo $[\tau + 2k\pi, \tau + 2(k+1)\pi)$. Análogamente, el lado derecho de 4) es un argumento en el intervalo $[\tau, \tau + 2\pi)$. $\square$

Ejercicio 1.4. *Para* $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < 2\pi$ *compárense las funciones* $\arg_{\tau_j}$, $j = 1, 2$.
Solución. $\arg_{\tau_2} - \arg_{\tau_1} = 0$ *para* $\tau_2 \leq \arg_{\tau_2} z < \tau_1 + 2\pi$, $\arg_{\tau_2} - \arg_{\tau_1} = 2\pi$ *si* $\tau_1 \leq \arg z < \tau_2$.

Ejercicio 1.5. *Sean* τ_1, τ_2 *arbitrarios. Haciendo uso de los valores* $\langle \tau_j \rangle$ *compárense las funciones* $\arg_{\tau_j}$, $j = 1, 2$.

Hemos empleado el término argumento de z para designar un valor θ tal que $e^{i\theta} = z/|z|$. Luego hemos definido funciones $\theta = \theta(z)$ que, continuas en "dominios especiales", asignan a cada z en dichos dominios un valor θ que es un argumento de z. Esta última acepción puede extenderse a una noción ligeramente más amplia de función argumento.

Definición 1.30. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *un abierto conexo y* $g \in C(\Omega, \mathbb{R})$. *Se dice que* (g, Ω) *es una determinación (o una "rama") de la función argumento (en* Ω*) si*

$$e^{ig(z)} = z/|z|$$

para cada $z \in \Omega$.

Consecuencia inmediata de la continuidad y la conexidad en la definición es la siguiente propiedad.

Proposición 1.31. *Sean* $(g_1, \Omega_1), (g_2, \Omega_2)$ *determinaciones del argumento. Entonces:*

$$g_2 = g_1 + 2k\pi$$

para cierto entero k*, en cada componente conexa de la intersección* $\Omega_1 \cap \Omega_2$. *En particular,* g_1, g_2 *difieren en un múltiplo entero de* 2π *si* $\Omega_1 = \Omega_2$.

1.4. Raíces n-ésimas

Para $z \in \mathbb{C}$ la ecuación

$$w^n = z,$$

admite exactamente n soluciones distintas:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

Tales expresiones definen las n raíces $n$ésimas de z. Usando la identificación de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, $w_0, \ldots, w_{n-1}$ conforman un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$. De hecho, y de acuerdo a la definición que damos un poco más abajo:

$$\angle(w_k, w_{k+1}) = \frac{2\pi}{n}, \qquad k = 0, \ldots, n-1,$$

donde ponemos $w_n = w_0$.

Proposición 1.32. *Sea $f_k(z)$, $f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función que asigna a cada z su k-ésima raíz. Entonces f_k es continua en $\mathbb{C} \setminus \{x > 0\}$ siendo su conjunto imagen el sector $\{\frac{2k\pi}{n} \leq \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}\}$.*

Observación 1.6. Las raíces n-ésimas pueden indistintamente expresarse mediante cualquier determinación del argumento. Por ejemplo:

$$\zeta_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg_\tau z + 2k\pi}{n}}, \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

En partícular, se conoce como "rama principal" de la raíz n-ésima o función "parte principal" de la raíz n-ésima a la aplicación

$$f(z) = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}}.$$

1.5. Funciones complejas

Definición 1.33. *Una función compleja f de variable compleja es toda aplicación $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. A es su dominio, $f(A)$ su conjunto imagen.*

Con frecuencia representaremos tales funciones en forma abreviada como $w = f(z)$. Poniendo

$$f(z) = u + iv$$

es decir $u = \Re f$, $v = \Im f$, toda función compleja f equivale a una aplicación de $\mathbb{R}^2$ es sí mismo de la forma:

$$\begin{array}{rccl} F: & A \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)). \end{array}$$

No obstante y como norma general evitaremos en lo posible apelar a la forma real F de las funciones que usaremos en el curso. Esta política es por otra parte ventajosa para muchos de los cálculos que afrontaremos, en especial, aquellos en donde, por poner un ejemplo, el producto de complejos juega un papel relevante.

Ejemplos 1.7.

1) La función lineal afín:

$$f(z) = az + b, \qquad a, b \in \mathbb{C}.$$

2) Polinomios:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^k = a_0 z^n + \cdots + a_n, \qquad a_j \in \mathbb{C}.$$

3) Funciones (transformaciones) bilineales:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

4) Funciones racionales:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} z^k}{\sum_{l=0}^{m} b_{m-l} z^l} = \frac{a_0 z^n + \cdots + a_n}{b_0 z^m + \cdots + b_m}.$$

5) Ramas de la raíz n-ésima. Usando el argumento principal:

$$f_k(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

En el caso de la raíz cuadrada éstas son $f_0(z)$ y $f_1(z) = -f_0(z)$ donde

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \sqrt{|z|} e^{i \operatorname{Arg} z/2} \\ &= \sqrt{|z|} \left(\cos \operatorname{Arg} z/2 + i \operatorname{sen} \operatorname{Arg} z/2 \right) \\ &= \sqrt{|z|} \left(\sqrt{\frac{|z| + x}{2|z|}} + i \text{ signo } y \sqrt{\frac{|z| - x}{2|z|}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{|z| + x} + i \text{ signo } y \sqrt{|z| - x} \right). \end{aligned}$$

Las funciones complejas elementales al definir funciones del plano en sí mismo pueden interpretarse como transformaciones geométricas. Introducimos primero una definición.

Definición 1.34. *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ el ángulo orientado de z_1 a z_2 se define como:*

$$\angle(z_1, z_2) = \arg \frac{z_2}{z_1} \in [0, 2\pi).$$

Nuestra definición de ángulo orientado difiere de la euclídea convencional. Por definición

$$\angle(z_1, z_2) = \arg \frac{z_2}{z_1} = \langle t \rangle,$$

con $\dfrac{z_2}{z_1} = h(t) = h(\langle t\rangle)$, donde para cada $t \in \mathbb{R}$, $\langle t\rangle$ designa al único número real que satisface las relaciones $t = \langle t\rangle + 2k\pi$ y $\langle t\rangle \in [0, 2\pi)$. Como se tiene que

$$\langle -t\rangle = 2\pi - \langle t\rangle,$$

mientras $\dfrac{z_1}{z_2} = h(-t) = h(\langle -t\rangle)$ resulta que:

$$\angle(z_2, z_1) = 2\pi - \angle(z_1, z_2).$$

Como era de esperar $\angle(z_2, z_1)$ es el "opuesto" de $\angle(z_1, z_2)$.

Observaciones 1.8.

1) Se comprueba que:

$$\angle(z_1, z_2) = \arg z_2 - \arg z_1 \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi),$$

pudiéndose reemplazar en dicha expresión $\arg z$ por $\arg_\tau z$.

2) $\angle(1, z) = \arg z$, $\angle(z, 1) = 2\pi - \arg z$.

Definición 1.35. *Se dice que la aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es un giro de centro z_0 y ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ si 1) $f(z_0) = z_0$, 2) $|f(z) - z_0| = |z - z_0|$ y*

$$\angle(z - z_0, f(z) - z_0) = \theta,$$

para cada $z \neq z_0$.

Ejercicio 1.6. *Hallar la expresión de $f(z)$ en la definición precedente.*

Sean γ_1, γ_2 dos curvas de clase C^1 parametrizadas por sendas parametrizaciones $\varphi_j : [a, b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \varphi_j(t) = x_j(t) + iy_j(t)$, $j = 1, 2$, con vectores tangentes en $t \in [a, b]$ dados por $\varphi_j'(t) = x_j'(t) + iy_j'(t)$. La propia definición de curva C^1 requiere que $\varphi_j'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$ (ver también el Capítulo V).

Si dos curvas C^1 inciden en un punto z_0 se define el ángulo orientado de γ_1 a γ_2 en z_0 como:

$$\angle(\varphi_1'(t_{0,1}), \varphi_2'(t_{0,2})),$$

donde $z_0 = \varphi_j(t_{0,j})$, $j = 1, 2$. La no depende de las parametrizaciones.

Ejercicio 1.7. *Sean $\psi_j : [c, d] \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, parametrizaciones alternativas de las curvas γ_1, γ_2 es decir $\psi_j(s) = \varphi_j(h_j(s))$ con $h_j : [c, d] \to [a, b]$ de clase C^1, $h_j'(s) \neq 0$ para todo $s \in [c, d]$, $j = 1, 2$. Suponiendo que γ_1, γ_2 inciden en z_0 y que $t_{0,j} = h_j(s_{0,j})$, $j = 1, 2$, pruébese que la definición precedente de ángulo no depende de si se usan las parametrizaciones φ_j o ψ_j.*

La que sigue es una noción importante para la interpretación geométrica de las funciones complejas que son derivables (según veremos más tarde).

Definición 1.36. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ una función de clase C^1. Se dice que F es* conforme *si es inyectiva, el jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ no se anula en ningún punto y F preserva el ángulo orientado de las curvas incidentes, es decir:*

$$\angle(F(\gamma_1)), F(\gamma_2)) = \angle(\gamma_1, \gamma_2).$$

Ejemplos 1.9.

1. Traslaciones. La función $f(z) = z + a$, $a \in \mathbb{C}$ representa una traslación de vector $a \in \mathbb{C}$.

2. Homotecias. Para $a > 0$ la función $f(z) = az$ representa una homotecia de razón a (centro $z = 0$).

3. Giros. La función $f(z) = e^{i\theta}z$ constituye un giro de centro $z = 0$ y ángulo θ según comprobamos ahora. En efecto:

   $$|w| = |z|,$$

   para $w = e^{i\theta}z$ luego w dista lo mismo que z del origen. Por otro lado:

   $$\angle(z, w) = \angle(z, e^{i\theta}z) = \langle\theta\rangle$$

   que informa que el ángulo de z a w es $\langle\theta\rangle$, lo que significa que hemos dado un giro de θ grados alrededor del origen. Debe observarse la diferencia entre $\theta > 0$ y $\theta < 0$. Nótese que si $\theta > 0$:

   $$\angle(z, e^{-i\theta}z) = 2\pi - \langle\theta\rangle$$

   y el resultado es como si hubiésemos girado $-\theta$ alrededor del origen (ver el Ejercicio 1.8).

4. Movimientos rígidos. La funcion $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, comprende a los movimientos rígidos del plano (traslaciones y giros).

5. Si $a = |a|e^{i\theta}$ la función $f(z) = az$ representa un giro seguido de una homotecia de razón $|a|$. Por tanto la función $f(z) = az+b$, a, b, comprende a todas las semejanzas (giros, traslaciones y homotecias).

6. Simetría axial. La función conjugado $f(z) = \bar{z}$ representa una simetría axial con respecto al eje real. Obsérvese que esta transformación invierte la orientación en el sentido siguiente:

   $$\angle(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = 2\pi - \angle(z_1, z_2) = \angle(z_2, z_1).$$

7. Inversión. Una inversión de polo $z = 0$ y potencia $k > 0$ es la transformación $z \to w$ en la que w está en la misma semirrecta que 0 y z, cumpliendo $|z||w| = k$. Por tanto:

   $$w = \frac{k}{\bar{z}}.$$

Las inversiones transforman: rectas que pasan por el polo en si mismas, rectas que no pasan por el polo en circunferencias que pasan por el polo, circunferencias que pasan por el polo en rectas que no pasan por el polo y circunferencias que no pasan por el polo en circunferencias que tampoco pasan por el polo (Ejercicio 1.13). Por otro lado son involutivas en el sentido de aplicadas dos veces dan lugar a la identidad. Obsérvese finalmente que la función

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

equivale a aplicar una inversón de razón 1 seguida de una simetría axial.

8. Transformaciones bilineales $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Comprenden a todas las anteriores. Se estudian en la siguiente sección.

Ejercicio 1.8. *Hállense las ecuaciones reales de la transformación $w = e^{i\theta}z$ probando que definen una transformación ortogonal que preserva la orientación del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$. Constituye un giro de θ grados según la terminología euclídea.*

Ejercicio 1.9. *Hállense las funciones que representan las siguientes transformaciones geométricas:*

a) Homotecia de centro z_0 y razón $a > 0$.

b) Giro de centro z_0 y ángulo θ.

c) Simetría axial con respecto a la recta que pasa por un punto z_0 y tiene la dirección del complejo $e^{i\theta_0}$.

d) Inversión de polo z_0 y potencia $k > 0$.

Ejercicio 1.10. *Probar que*

$$\Im\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0, \qquad a, b \in \mathbb{C}, \quad b \neq 0,$$

define la ecuación general de una recta. Deducir que

$$\Re\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0, \qquad a, b \in \mathbb{C}, \quad b \neq 0,$$

también constituye la ecuación de la recta (ver el Ejercicio 22).

Ejercicio 1.11. *Deducir la ecuación de una circunferencia en versión compleja. Estúdiense las condiciones bajo las que:*

$$|z|^2 + 2\Re z\zeta + d = 0 \qquad (d, \zeta \in \mathbb{C})$$

o bien

$$|z|^2 + 2\Im z\zeta + d = 0 \qquad (d, \zeta \in \mathbb{C})$$

constituyen la ecuación de una circunferencia (véase el Ejercicio 24).

Ejercicio 1.12. *Pruébese que toda semejanza $f(z) = cz + d$, $c, d \in \mathbb{C}$ transforma rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.*

Ejercicio 1.13. *Pruébense las propiedades de las inversiones listadas en el apartado 7.*

1.6. Transformaciones bilineales. 1^a nota

También conocidas como transformaciones de Möbius. Están definidas por las funciones:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

donde, para obviar casos triviales, se supone que $\delta := ab - cd \neq 0$. Si $c = 0$ tenemos una semejanza luego si $c \neq 0$:

$$f(z) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z),$$

donde $f_1(z) = cz + d$, $f_2(z) = 1/z$, $f_3(z) = a_1 z + b_1$, $a_1 = -c^{-2}\delta$, $b_1 = ac^{-1}$. Como compendio de todas las transformaciones anteriores f aplica rectas o circunferencias en rectas o circunferencias. Veremos en el Capítulo IV que, como consecuencia de la derivabilidad, las transformaciones bilineales definen transformaciones conformes preservando el ángulo orientado entre curvas incidentes (en el Ejercicio 32 se propone una prueba directa de este hecho).

Bajo la condición $\delta \neq 0$–que siempre supondremos– el conjunto $\mathcal{M}$ de las transformaciones bilieales forman un grupo. Por ejemplo,

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - c}{-bz + a}.$$

Si denotamos por GL_2 el grupo de las matrices complejas e invertibles 2×2 la transformación $\varphi : GL_2 \to \mathcal{M}$ definida por $\varphi(A) = f$, con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es un homomorfismo de grupos (sobreyectivo). Además (Ejericicio 28) $\varphi(A) = \varphi(B)$ si y sólo si $A = \lambda B$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. La restricción de φ a las matrices A con $\det A = 1$ es todavía sobreyectiva (Ejercicio 29).

1.7. Apénice: una revisión de trigonometría

Se sabe que el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \\ u(t_0) = u_0, \qquad u'(t_0) = u_0', \end{cases} \qquad \left(' = \frac{d}{dt} \right) \tag{1.6}$$

admite, para $t_0, u_0, u_0' \in \mathbb{R}$ arbitrarios una única solución $u = u(t)$ que es de clase C^2 y está definida en $\mathbb{R}$. Más aún, si $u = f(t)$ es la solución correspondiente a $(t_0, u_0, u_0') = (0, 1, 0)$, y $u = g(t)$ es la solución asociada a $(t_0, u_0, u_0') = (0, 0, 1)$ entonces tal solución se puede representar en la forma:

$$u(t) = u_0 f(t - t_0) + u_0' g(t - t_0).$$

Estas afirmaciones son consecuencia inmediata de la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias. No obstante, con un poco de paciencia se puede dar una demostración directa de las mismas.

La primera idea clave es que toda solución cumple:

$$u'^2 + u^2 = \text{constante}.$$

De ahí se sigue la unicidad de soluciones de (1.6). La unicidad dice a su vez que la existencia se reduce a resolver los dos problemas particulares (1.6) que dan lugar a $f(t)$ y $g(t)$, a saber:

$$\begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = 1, \ u'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = 0, \ u'(0) = 1, \end{cases}$$

respectivamente.

Para determinar g se observa que:

$$g'^2 + g^2 = 1, \tag{1.7}$$

mientras $g(t)$ se define como la inversa de la función[1]:

$$G(u) = \int_0^u \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} \qquad -1 < u < 1,$$

en el intervalo $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ donde, por definición,

$$\pi := 2 \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}}. \tag{1.8}$$

A continuación, g se extiende al intervalo $\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$ mediante reflexión:

$$g(t) := g(\pi - t) \qquad \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2.$$

[1]Una interesante idea debida al matemático noruego Neils H. Abel. Éste la uso para presentar las funciones elítpicas como una generalización de las funciones circulares.

Finalmente, g se extiende a todo $\mathbb{R}$ como una función 2π-periódica. El resultado es una función C^2 que resuelve (1.6) para los datos $t_0 = 0$, $u_0 = 0$, $u_0' = 1$. Usando la ecuación se ve que g es de clase C^∞ y que todas sus derivadas satisfacen la misma ecuación diferencial. Esto completa la demostración anunciada.

Proposición 1.37. *Se satisfacen las siguientes propiedades.*

1. *g creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$ y decreciente en $[\pi/2, 3\pi/2]$.*
2. *$f' = -g$, $g' = f$, por tanto f también es C^∞ y 2π-periódica. En particular:*
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$
3. *$f^2 + g^2 = 1$*
4. *$f(-t) = f(t)$, $g(-t) = -g(t)$.*
5. *$f(t \pm s) = f(t)f(s) \mp g(t)g(s)$.*
6. *$g(t \pm s) = g(t)f(s) \pm f(f)g(s)$.*

Observación 1.10. Se siguen de la proposición todas las relaciones trigonométricas clásicas. Por ejemplo:

$$f(\frac{\pi}{2} - t) = g(t), \qquad g(\frac{\pi}{2} - t) = f(t).$$

También

$$f(t + \pi) = -f(t), \qquad g(t + \pi) = -g(t).$$

Por otra parte:

$$f(2t) = f(t)^2 - g(t)^2, \qquad g(2t) = 2f(t)g(t).$$

Y así sucesivamente.

Demostración de la Proposición 1.37. 1) se sigue de la definición. Obsérvese que $|g(t)| \leq 1$ y que $g' = \sqrt{1 - g^2}$ en $[-\pi/2, \pi/2]$.

Para 2) usamos $u = g'$ como candidato a solución de (1.6) con $(t_0, u_0, u_0') = (0, 1, 0)$. La unicidad de soluciones de (1.6) da $u = f$. Que $g(\pi/2) = 1$ se deduce de (1.8).

La relación 3) (y en particular $f(\pi/2) = 0$) se sigue de (1.7).

Para la primera de 5) basta observar que $u_1(t) = f(t+s)$ y $u_2(t) = f(t)f(s) - g(t)g(s)$ son soluciones del mismo problema (1.8). □

Refrescando el teorema de Taylor se prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.38. *Las funciones f y g son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. Más aún:*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} t^{2n}, \qquad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}, \tag{1.9}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

En virtud de todo lo expuesto se tiene la siguiente definición.

Definición 1.39. *La función $f(t)$ se deignará con la terminología clásica $f(t) = \cos t$, mientras denotaremos $g(t) = \operatorname{sen} t$.*

Las funciones coseno y seno se denominan funciones circulares, terminología que se explica porque tales funciones parametrizan el círculo ∂D.

Proposición 1.40. *Se define la aplicación:*

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \partial D \\ & t & \longmapsto & h(t) := \cos t + i \operatorname{sen} t. \end{array}$$

Entonces:

i) h satisface:

$$h(t+s) = h(t)h(s)$$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Además

$$h(t) = h(s)$$

si y sólo si $t = s + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

ii) h es sobreyectiva.

iii) La restricción de h a $[0, 2\pi)$ es biyectiva.

iv) $h : (0, 2\pi) \to \partial D \setminus \{1\}$ es un homeomorfismo.

v) La restricción de h a cualquier intervalo de la forma $[\tau, \tau + 2\pi)$ es biyectiva.

vi) Para todo $\tau \in \mathbb{R}$, $h : (\tau, \tau + 2\pi) \to \partial D \setminus \{h(\tau)\}$ es un homeomorfismo.

Demostración. i) sigue de la Proposición 1.37. Por otra parte si $h(t) = h(s)$ es porque $h(t - s) = 1$ de donde $t - s = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

En cuanto a ii), sean $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_4$ la intersección de ∂D con los cuatro cuadrantes cerrados. Las aplicaciones $g_j : \Gamma_1 \to \Gamma_j$, $j = 2, 3, 4$, $g_2(z) = iz$, $g_3(z) = -z$, $g_4(z) = -iz$ definen homeomorfismos. Asimismo, afirmamos que $h : J_1 \to \Gamma_1$, $J_1 = [0, \pi/2]$, es un homeomorfismo. Esto implica que las restricciones de h a los intervalos $J_1 = [\pi/2, \pi]$, $J_2 = [\pi, 3\pi/2]$, $J_3 = [3\pi/2, 2\pi]$ definen homeomorfismos sobre Γ_2, Γ_3 y Γ_4, respectivamente. En efecto,

$$\begin{array}{ll} h(t) = ih(t - \pi/2) & t \in J_2 \\ h(t) = -h(t - \pi) & t \in J_3 \\ h(t) = -ih(t - 3\pi/2) & t \in J_4, \end{array}$$

Lo que prueba la segunda afirmación. En particular, las restricciones de h a los intervalos $J_j' = J_j \setminus \{b_j\}$, $j = 1, \ldots, 4$, b_j el extremo superior de J_j, es biyectiva. Como $\partial D = \cup_j h(J_j')$ esto muestra que h es biyectiva de $[0, 2\pi)$ en ∂D. Esto es la prueba de iii).

Vamos con la primera de las afirmaciones precedentes. Tenemos que las funciones $f : J_1 = [0, \pi/2] \to [0, 1]$ y $F : [0, 1] \to \Gamma_1$ definida $x \mapsto (x, \sqrt{1 - x^2})$ son homeomorfismos. Como $h = F \circ f$ resulta que $h : J_1 \to \Gamma_1$ también es un homeomorfismo. Finalmente (iv)) como la restricción de h a los intervalos J_j es un homeorfismo sobre su imagen, se desprende fácilmente que la restricción de h a $(0, 2\pi)$ lo es. En efecto $z_n \to z$ en $\partial D \setminus \{1\}$ significa que $z_n \to z$ en alguno de los Γ_j salvo que $z \in G_j \cap G_l$ en cuyo caso el razonamiento para probar que $h^{-1}(z_n) \to h^{-1}(z)$ es similar.

Para v) y vi) ponemos $J = [0, 2\pi]$, $T : J + \{\tau\} \to J$ la función $s \to s - \tau$, $P : \partial D \to \partial D$ la aplicación $z \to h(\tau)z$. La restricción h_τ de h a $J + \{\tau\}$ se escribe $h_\tau = P \circ h \circ T$. Siendo P, T homeomorfismos se concluyen v) y vi) de forma inmediata. □

Más adelante, en el Capítulo III introduciremos la función exponencial como:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

y, entre otras cosas, no resulta difícil probar que la serie es convergente para todo $z \in \mathbb{C}$. Usando la función exponencial se prueba –vía las series (1.9)– la siguiente propiedad.

Proposición 1.41 (Fórmula de Euler). *Se tiene:*

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Basta sustituir $z = it$ en la expresión en serie para e^z. □

Capítulo 2

Continuidad y topología en $\mathbb{C}$

2.1. Convergencia y continuidad en $\mathbb{C}$

Se introdujo en el Capítulo I la distancia en $\mathbb{C}$ dada por:

$$\operatorname{dist}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Proposición 2.1. *El espacio métrico* $(\mathbb{C}, d)$ *es isométricamente homeomorfo a* $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *donde* d_2 *es la distancia euclídea.*

La proposición afirma que desde el punto de vista topológico, $\mathbb{C}$ es el mismo objeto que $\mathbb{R}^2$. Algunas de las propiedades que siguen son consecuencia inmediata de este hecho.

Recordemos en particular que:

$$\max\{|\Re z|, |\Im z|\} \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|.$$

Proposición 2.2. *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1) Si $\{z_n\}$ *es una sucesión en* $\mathbb{C}$ *entonces*

$$\lim z_n = z$$

si y sólo si

$$\lim \Re z_n = \Re z \qquad \lim \Im z_n = \Im z.$$

2) $\{z_n\}$ *es de Cauchy (véase la Sección 1.2) si y sólo si* $\{\Re z_n\}$, $\{\Im z_n\}$ *son de Cauchy.*

3) La suceción $\{z_1 + \cdots + z_n\}$ *es convergente si y sólo si lo son* $\{\Re z_1 + \cdots + \Re z_n\}$ *y* $\{\Im z_1 + \cdots + \Im z_n\}$ *con:*

$$\lim z_1 + \cdots + z_n = \lim \Re z_1 + \cdots + \Re z_n + i(\lim \Im z_1 + \cdots + \Im z_n).$$

4) Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$, entonces φ continua en t_0 si y sólo si φ_1, φ_2 son continuas en t_0. Más aún, si se define

$$\varphi'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h},$$

la derivada de φ en t_0, supuesto que el límite exista, entonces φ es derivable en t_0 si y sólo si φ_1, φ_2 son derivables en t_0 y

$$\varphi'(t_0) = \varphi_1'(t_0) + i\varphi_2'(t_0).$$

Ejemplos 2.1.

1. $\lim \frac{in}{n+i} = i$.
2. $\lim z^n = 0$ si $|z| < 1$ mientras z^n no converge si $|z| > 1$ pues $\lim |z|^n = \infty$. Si $|z| = 1$ y $z \neq 1$ la sucesión z^n nunca es convergente. En efecto, en ese caso:

$$|z^{n+1} - z^n| = |z - 1|,$$

y z^n no puede cumplir la condición de Cauchy. De hecho, se saben más cosas de esta aparentemente inofensiva sucesión. O bien el conjunto $\{z^n\}$ es finito o bien es infinito. El primer caso queda caracterizado por $z = e^{i\theta}$ con $\theta/2\pi \in \mathbb{Q}$. El segundo caso –en el que todos los valores de z^n son necesariamente distintos entre sí– corresponde a $\theta/2\pi$ irracional y se puede demostrar que $\{z^n\}$ es densa en ∂D.

Las definiciones de límite y continuidad de funciones son consecuencia de la topología de $\mathbb{C}$. Las detallamos por completitud.

Definición 2.3. *Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D'$ (D' el conjunto de puntos de acumulación de D) se dice que*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda$$

si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal para cada $0 < |z - z_0| < \delta$ se cumple $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

Las propiedades habituales del álgebra de límites no las enunciamos pormenorizadamente pero ya están implícitas en la Proposición 1.8.

Una propiedad conocida es la siguiente.

Proposición 2.4. *Si f admite límite λ cuando $z \to z_0$, f está acotada en un entorno reducido $\{0 < |z - z_0| < \delta\} \cap D$ de z_0. Si $\lambda \neq 0$ entonces f no se anula en un cierto entorno reducido de z_0.*

Definición 2.5. *Sea $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y supongamos que $D \subset D'$. Se dice que f es continua en z_0 si*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Si f es continua en todos los puntos de D se dirá que f es continua en D.

Típicamente los dominios D de nuestras funciones complejas f serán abiertos o adherencias de abiertos así que $D \subset D'$.

Si $f = u + iv$ y $F = (u, v)$ es la aplicación real $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asociada a f resulta obvio que:

Proposición 2.6. *f es continua en z_0 si y sólo si F es continua en z_0. Es decir si y sólo si u y v son continuas en z_0.*

Merece la pena destacar que:

Proposición 2.7. *f es continua en z_0 si y sólo si $f(z_n) \to f(z_0)$ cualquiera que sea la sucesión z_n que converja a z_0.*

Como ya se dijo, en funciones de variable compleja con frecuencia resulta desastroso apelar a las partes real e imaginaria de f para probar propiedades. A efectos de la continuidad –y como en el caso real– resulta de gran utilidad la siguiente propiedad.

Proposición 2.8. *Sean f, g funciones complejas continuas en z_0. Entonces:*

1) $\alpha f + \beta g$ es continua en z_0 para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ arbitrarios.

2) fg es continua en z_0.

3) $\dfrac{f}{g}$ es continua en z_0 si $g(z_0) \neq 0$.

4) Si h es una función compleja que es continua en $w_0 = f(z_0)$ entonces $h \circ f(z) = h(f(z))$ también es continua en z_0.

Ejemplos 2.2. Las funciones

1. $f(z) = az + b$
2. $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$
3. $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$
4. $f(z) = \dfrac{a_0 z^n + \cdots + a_n}{b_0 z^m + \cdots + b_m}$
5. $f(z) = \bar{z}$
6. $f(z) = |z|$

son continuas en sus dominios de definición,

7. $f(z) = \arg_\tau z$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \gamma_\tau$, $\gamma_\tau = \{te^{i\tau} : \theta \geq 0\}$,
8. $f(z) = \sqrt[n]{z}$ donde

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \mathrm{Arg}\ z/n},$$

designa la rama principal de la raíz n-ésima, es continua en $\mathbb{C} \setminus \{x < 0\}$ y lo mismo sucede con las restantes $n - 1$ ramas. Si usamos $\arg_\tau$ en la definición entonces las n ramas $f_1, \ldots, f_n$ son continuas en $\mathbb{C} \setminus \gamma_\tau$, ($\mathbb{C} \setminus \{x > 0\}$ si trabajamos con $\arg z$).

Recordemos que con $\sqrt[n]{z}$ se designa la rama principal de la raíz n-esima de z.

Ejemplo 2.3. Sea $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ derivable en t_0 con $\varphi(t_0)$, entonces $\dfrac{1}{\varphi}$ es derivable en t_0 con derivada

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)' = -\frac{\varphi'(t_0)}{\varphi(t_0)^2}.$$

En efecto

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{\frac{1}{\varphi(t_0+h)} - \frac{1}{\varphi(t_0)}\}$$
$$= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{\varphi(t_0+h)\varphi(t_0)} \frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h} = -\frac{\varphi'(t_0)}{\varphi(t_0)^2}.$$

La siguiente definición apenas tendrá relevancia dentro del presente curso.

Definición 2.9. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ abierto y $f = u + iv$ una función compleja definida en G. Se dice f es C^k en sentido real ($1 \le k \le \infty$) si $u, v \in C^k(G)$*

Ejemplos 2.4.

1. $f(z) = z^n = P(x,y) + iQ(x,y)$ donde P, Q son polinomios homogéneos de grado n. Por tanto f es C^∞ en sentido real y tanto polinomios $p(z)$ como cocientes de polinomios $p(z)/q(z)$ son funciones C^∞ en sentido real (en sus dominios de definición).
2. La función $\theta(x,y) = \arg_\tau(z)$ es C^∞ en sentido real en $\Omega \setminus \gamma_\tau$ y

$$\theta_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \theta_y = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

En particular $\sqrt[n]{z}$ es C^∞ en $\mathbb{C}^2 \setminus \{z \le 0\}$.

2.2. Series

Definición 2.10. *La sucesión z_n es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para $n, m \ge n_\varepsilon$.*

Definición 2.11. *Dada la sucesión z_n se dice que la serie $\sum_{n=1}^\infty z_n$ converge y tiene suma z si la sucesión $S_n = z_1 + \cdots + z_n$ es convergente y tiene límite z. La serie es divergente si S_n no es convergente.*

Teorema 2.12. *La serie $\sum_{n=1}^\infty z_n$ es convergente si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|\sum_{k=n}^{m} z_k| < \varepsilon$$

para $m \ge n \ge n_\varepsilon$. En particular, si $\sum_{n=1}^\infty z_n$ converge entonces $\lim z_n = 0$.

Proposición 2.13. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *es convergente si y sólo si las series* $\sum_{n=1}^{\infty} \Re z_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} \Im z_n$ *son convergentes. Además:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \Re z_n + \sum_{n=1}^{\infty} \Im z_n.$$

Proposición 2.14. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *es convergente entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *también converge y*

$$|\sum_{n=1}^{\infty} z_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

2.3. Conexidad

Los subconjuntos compactos y conexos de $\mathbb{C}$ son los de $\mathbb{R}^2$ con la topolgía usual. Merece la pena resaltar una propiedad útil de conexidad.

Definición 2.15. *Dados* $z, w \in \mathbb{C}$ *el segmento* $[z, w]$ *de extremos* z, w *se define como:*

$$[z, w] = \{tz + (1-t)w : t \in [0, 1]\}.$$

Una poligonal γ *de* $a \in \mathbb{C}$ *a* $b \in \mathbb{C}$ *es*

$$\gamma = \cup_{k=1}^{n} [z_k, w_k],$$

donde $z_k = w_{k-1}$*,* $2 \leq k \leq n$*,* $a = z_1$*,* $b = w_n$*. Se dice en este caso que* γ *conecta* a *con* b*.*

En el presente curso llamaremos dominio o región G a todo abierto conexo de $\mathbb{C}$. Se tiene la siguiente caracterización.

Proposición 2.16. *Un abierto* $G \subset \mathbb{C}$ *es conexo si y sólo si todo par de puntos de* G *se pueden conectar mediante una poligonal* $\gamma \subset \Gamma$*.*

La misma demostración permite probar que la poligonal γ en la proposición anterior puede elegirse con todos los segmentos paralelos a uno de los ejes.

Recordemos ahora que si $D \subset \mathbb{C}$ es un conjunto cualquiera, una componente conexa C de D es toda parte conexa maximal de D. Las componentes de D siempre son cerradas en D y la familia C_i de las componentes de D conforman una partición de D. Si D es abierto entonces se puede probar que sus componentes también son abiertas. Todas estas cuestiones forman parte de un curso de topología general y se recapitulan en [**?**] (ver [**?**]).

2.4. Compactificación de $\mathbb{C}$. Proyección de Steiner

A muchos efectos conviene introducir en $\mathbb{C}$ el punto del infinito. Esto se puede hacer por dos vías. Una analítica, topológica la otra. En éste último caso se trata de la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{C}$, en el primero de los límites infinitos o en el infinito que ahora introducimos.

Definición 2.17. *Se dice que:*

$$\lim z_n = \infty$$

si para todo M existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| > M$ para todo $n \geq m$. Análogamente:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty,$$

si para $M > 0$ arbitrario existe δ tal que $|f(z)| > M$ para $0 < |z - z_0| < \delta$. Finalmente:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w$$

si para $\varepsilon > 0$ arbitrario existe M con $|f(z) - w| < \varepsilon$ para $|z| > M$. Una mínima modificación de este último caso permite extender la definición al caso $w = \infty$.

Una primera vía para introducir el punto del infinito consiste en identificar cada $z \in \mathbb{C}$ con las sucesiones complejas z_n tales que $z_n \to z$ (ver [?]). Esta identificación preserva las operaciones algebraicas de $\mathbb{C}$. El punto del infinito ∞ es por definición la clase de las sucesiones z_n con $\lim z_n = \infty$. El cuerpo ampliado $\widehat{\mathbb{C}}$ consiste en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Se tiene la

Proposición 2.18. *Sean z_n, w_n sucesiones complejas tales que $\lim z_n = \infty$ y $\lim w_n = w$. Entonces*

1. $\lim z_n + w_n = \infty$, *incluso si* $\lim w_n = \infty$.
2. $\lim z_n w_n = \infty$ *si* $\lim w_n \neq 0$, $\lim w_n = \infty$ *incluido.*
3. $\lim \dfrac{w_n}{z_n} = 0$ *si* $z_n \neq 0$.
4. $\lim \dfrac{w_n}{u_n} = \infty$ *si* $u_n \neq 0$, $\lim u_n = 0$ *y* $w \neq 0$ *(incluyendo* $\lim w_n = \infty$*).*

Las propiedades precedentes se interpretan en $\widehat{\mathbb{C}}$ como $\infty + w = \infty$, $\infty\, w = \infty$ $(w \neq 0)$, $w/\infty = 0$ $(w \neq \infty)$, $w/0 = \infty$ $(w \neq 0)$.

Los siguientes ejemplos en nada difieren del caso de una variable real.

Ejemplos 2.5.

1. Sean $p(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$, $q(z) = b_0 z^m + \cdots + b_m$ polinomios. Entonces

$$\lim_{z \to \infty} \frac{p(z)}{q(z)} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} & n = m \\ 0 & n < m \\ \infty & n > m. \end{cases}$$

2. Para $p(z), q(z)$ como en el caso anterior, $q(z_0) = 0$, $p(z_0) \neq 0$ se tiene:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \infty.$$

Hablemos ahora de compactificaciones. El espacio $\mathbb{C}$ no es compacto: $\{D(0,n)\}$ no admite subrecubrimientos finitos. Una compactificación de un espacio topológico (X,T) es un espacio topológico compacto (X',T') que contiene a (X,T) en el sentido siguiente: existe $h : X \to X'$ continua e inyectiva tal que $h(X)$ es homeomorfo X y $\overline{h(X)} = X'$. Si $X' \setminus h(X) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ se dice que X se ha compactificado tras la adición de un número finito de puntos. Las compactificaciones por adición de un solo punto revisten particular interés. Se sabe [?] que todo espacio Hausdorff X localmente compacto admite una *única* compactificación X' por un solo punto denominada "compactificación de Alexandroff". Se construye así. Primero $X' = X \cup \{P_\infty\}$ donde P_∞ no es un elemento de X (por ejemplo $P_\infty = (0,0,1)$ en el caso de $\mathbb{C}$). Al tal P_∞ se le llama ∞, el "punto del infinito". La topología T' en X' se obtiene de la de X manteniendo los entornos de los puntos de X y tomando $\{(X \setminus K) \cup \{\infty\} : K \subset X \text{ compacto}\}$ como base de entornos de ∞.

Proposición 2.19. *Sea (X,T) localmente compacto y T_2. Entonces, el espacio (X',T') es compacto, T_2 y la inclusión $h(x) = x$, $h : X \to X'$ cumple las propiedades de compactificación señaladas más arriba.*

Demostración. En efecto X' es T_2 porque si $x \neq P_\infty$ y K es entorno compacto de x, $X' \setminus K$ es entono de P_∞.

Asimismo, si G' abierto en X', $G = G' \setminus P_\infty$ es abierto en X. Si además $P_\infty \in G'$ tomando $G = G' \setminus P_\infty$ resulta que $X' \setminus G' = X \setminus G$ y $X' \setminus G' \subset K$ para algún compacto. En efecto $(X \setminus K) \cup \{P_\infty\} \subset G'$ para algún compacto $K \subset X$. Por tanto $X' \setminus G'$ es compacto en X si G' es abierto y $P_\infty \in G'$.

Probamos que X' es compacto. Si $\{G'_i\}$ recubre X', $P_\infty \in G'_{i_0}$ para algún i_0. Así $\{G_i = G'_i \setminus \{P_\infty\} : i \neq i_0\}$ recubre $X \setminus G_{i_0}$ que es compacto. Tomando el correspondiente subrecubrimiento $\{G_{1_1}, \ldots, G_{i_N}\}$ resulta que $\{G'_{i_0}, G'_{1_1}, \ldots, G'_{i_N}\}$ también recubre X'. □

En el caso de $\mathbb{C}$ el espacio compacto resultante se llama la *esfera de Riemann* y se denota $\mathbb{C}_\infty$. A diferencia de la recta real $\mathbb{R}$ que admite compactificaciones por adición de un puno y por adición de dos puntos, es consecuencia de un teorema de K. D. Magill (1965) que la única compactificación (T_2) de $\mathbb{C}$ por adición de un número finito de puntos es la de Alexandroff [1]. La siguiente propiedad es inmediata.

Proposición 2.20. *Una sucesión $z_n \to \infty$ en $\mathbb{C}_\infty$ si y sólo si $z_n \to \infty$ de acuerdo a la Definición 1.17. Análogamente $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ en $\mathbb{C}_\infty$ si y sólo si $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ de acuerdo con la Definición 1.17. Lo mismo sucede con el caso $\lim_{z\to\infty} f(z) = w$.*

Observaciones 2.6.

a) Las aplicaciones bilineales

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

[1] Con más precisión, Magill caracteriza las compactificaciones Hausdorff por un número finito de puntos de espacios no compactos que también son Hausdorff.

$c \neq 0$ definen homeomorfismos de $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ en $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. Tales aplicaciones se extienden en forma única a homeomorfismos $\tilde{f}$ de $\mathbb{C}_\infty$. Basta hacer $\tilde{f} = f$ en $\mathbb{C}$ y

$$\tilde{f}(-\frac{c}{d}) = \infty, \qquad \tilde{f}(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Cuando una aplicación bilineal f se observe en $\mathbb{C}_\infty$ supondremos que se ha efectuado esta extensión y nos referiremos a ella como f (no usaremos $\tilde{f}$).

b) En el caso de semejanzas ($c = 0$)

$$f(z) = az + b,$$

la extensión $\tilde{f}$ consiste en hacer $\tilde{f}(\infty) = \infty$.

Que la compactificación de $\mathbb{C}$ se llama la esfera de Riemann se debe a la siguiente propiedad. Allí $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}$ y $N = (0,0,1) \in S_2$, designa el polo norte de S_2. Afirma que S^2 es una compactificación de $\mathbb{C}$ por un sólo punto y por tanto ha de ser homeomorfa a $\mathbb{C}_\infty$.

Teorema 2.21. *La aplicación*

$$\begin{array}{cccc} T: & S_2 \setminus N & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & P = (\xi, \eta, \zeta) & \longmapsto & z = x + iy \end{array},$$

definida como:

$$T(P) = \left(\frac{\xi}{1-\zeta}, \frac{\eta}{1-\zeta} \right) = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta},$$

es un homeomorfismo conforme, con inverso $h : \mathbb{C} \to S_2 \setminus N$ definido por:

$$h(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right).$$

Observación 2.7. La aplicación T se llama la proyección de Steiner.

Teorema 2.22. *$\mathbb{C}_\infty$ es homeomorfo a S_2.*

Demostración. La aplicación $h : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$ se extiende a $H : \mathbb{C}_\infty \to S^2$ tomando

$$H(\infty) = N.$$

Que H es un homeomorfismo se sigue de que H es continua en ∞. En efecto, una base de entornos de N es:

$$\{\mathcal{U} = \{x_3 > r\} \cap S^2 : r < 1\}.$$

Como

$$H^{-1}(\mathcal{U}) = \{z : |z| > \frac{1+r}{1-r}\} \cup \{\infty\},$$

es un entorno de ∞, H es continua en ∞.

Ahora H es continua y biyectiva. H es además cerrada: $C \subset \mathbb{C}_\infty$ cerrado implica C compacto y $H(C)$ es cerrado en S^2 porque es compacto. Por tanto H es un homeomorfismo.

$\square$

La siguiente propiedad habla de circunferencias en S_2 y de rectas y circunferencias en $\mathbb{C}$. Una circunferencia C en S_2 es la intersección de un plano π con S_2. Esto coincide con el conjunto de puntos $\{x \in S_2 : |x - x_0| = r\}$, con $x_0 \in S_2$. En efecto

$$\begin{cases} |x|^2 = 1 \\ |x - x_0|^2 = r^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|^2 = 1 \\ -2\langle x, x_0 \rangle = r^2 - |x_0|^2 - 1, \end{cases}$$

y π tiene $-2\langle x, x_0 \rangle = r^2 - |x_0|^2 - 1$ por ecuación.

Si el origen O y N pertenecen a π, C se denomina un meridiano, si π es paralelo al plano x, y, C se llama un paralelo.

Observación 2.8. Las rectas r de $\mathbb{C}$ se completan con el punto ∞ cuando se las observa en $\mathbb{C}_\infty$. Esto permite dar un tratamiento unificado a las propiedades del resto del capítulo.

Por ejemplo la propiedad: "$f(z) = \dfrac{1}{z}$ transforma rectas que pasan por $z = 0$ en rectas r' que también pasan por $z = 0$" se prueba en $\mathbb{C}_\infty$ añadiendo ∞ a las rectas. En efecto $f(0)$ es el punto ∞ de r' mientras la imagen $f(\infty)$ del punto ∞ de r es el punto $z = 0$ de r'.

Similarmente $f(z) = \dfrac{1}{z}$ transforma una circunferencia C que pasa por $z = 0$ en una recta pues a $0 \in C$ le asigna el punto ∞ de r.

Con más generalidad $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, $c \neq 0$, transforma rectas o circunferencias que pasan por $z_\infty = -\dfrac{d}{c}$ en rectas que contienen a $\infty = f(z_\infty)$. Aplica rectas r que no pasan por z_∞ en circunferencias que pasan por $w_\infty = \dfrac{a}{c}$ y circunferencias que no pasan por z_∞ en circunferencias.

Bajo este convenio todas las rectas comparten en punto ∞. Este hecho se hace patente cuando proyectamos las rectas de $\mathbb{C}_\infty$ en S^2 mediante H: tales proyecciones son las circunferencias de S^2 que pasan por el polo norte N.

Teorema 2.23. *T transforma circunferencias de S_2 que no pasan por N en circunferencias de $\mathbb{C}$ y circunferencias de S_2 que pasan por N en rectas de $\mathbb{C}_\infty$. Recíprocamente, h transforma circunferencias de $\mathbb{C}$ en circunferencias de S_2 y rectas de $\mathbb{C}_\infty$ en circunferencias de S_2 que pasan por N.*

Demostración. Si $A\xi + B\eta + C\zeta = D$ es el plano que define C en S_2, $T(C)$ tiene ecuación:

$$(C - D)|z|^2 + 2Ax + 2By = D + C.$$

Nótese que $N \in \pi$ si y sólo si $C = D$. La afirmaciones del teorema son ahora evidentes.

Para demostrar el recíproco tomamos $C_1 \subset \mathbb{C}$ una circunferencia y tres puntos $A, B, C \in C_1$. Si $A', B', C' \in S_2$ son sus imágenes, sólo pasa un plano π por tales puntos y C es la circunferencia que determinan en S_2. Ahora $T(C)$ es una circunferencia que contiene a A, B, C, luego $T(C) = C_1$. Por tanto $h(C_1) = C$.

Si r es una recta de $\mathbb{C}$, r y N determinan un plano π y $h(r)$ es por definición $\pi(\cap S_2 \setminus \{N\})$, una circunferencia por N. $\square$

Gracias a la proyección de Steiner se puede dotar a $\mathbb{C}_\infty$ de una métrica que describe su topología. A saber:

$$d_c(z_1, z_2) = |h(z_1) - h(z_2)| \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{\infty\}, \qquad d_c(z, \infty) = |h(z) - N|.$$

Se llama a d_c la métrica cordal (allí $|\cdot|$ es la distancia euclídea de $\mathbb{R}^3$). Para calcularla se tiene que si $P, P' \in S_2$ entonces

$$|P - P'|^2 = 2\{1 - \xi\xi' - \eta\eta' - \zeta\zeta'\}.$$

De ahí:

$$d_c(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2 + 1}\sqrt{|z_2|^2 + 1}} \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{\infty\},$$

$$d_c(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}}.$$

Ejercicio 2.1. *Ya se sabe que* $g : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ *definida como* $\frac{1}{z}$ *para* $z \neq 0, z \neq \infty$, $g(0) = \infty$, $g(\infty) = 0$ *es un homeomorfismo. La aplicación* g *induce en* S_2 *la aplicación* $\tilde{g} : S_2 \to S_2$ *definida por* $\tilde{g}(P) = (H \circ g \circ H^{-1})(P) = h(g(T(P)))$. *¿Qué aplicación es* $\tilde{g}$*?*

Ejercicio 2.2. *Los puntos de* S_2 *pueden expresarse en la forma:*

$$\xi = \cos\varphi \cos\phi, \qquad \eta = \cos\varphi \operatorname{sen}\phi, \qquad \zeta = \operatorname{sen}\varphi,$$

con $0 \leq \phi < 2\pi$ *(la longitud),* $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ *(la latitud). Pruébese que:*

$$T(\xi, \eta, \zeta) = \operatorname{tag}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{i\phi}.$$

Ejercicio 2.3. *Pruébese que* $d_c(z, \infty) = \lim_{z_1 \to \infty} d_c(z, z_1)$.

2.5. Transformaciones bilineales. 2^a nota

Designamos por

$$\mathcal{M} = \{f(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0\}$$

el conjunto de las transformaciones bilineales.

Cuando $f = \dfrac{az + b}{cz + d}$ y $c \neq 0$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \frac{a}{c}, \qquad \lim_{z \to -d/c} f(z) = \infty.$$

y como ya se dijo, f constituye un homeomorfismo de $\mathbb{C}_\infty$ cuando se definen $f(\infty) = a/c$, $f(-d/c) = \infty$. En el caso de las semejanzas $f = az + b$ se define $f(\infty) = \infty$.

Por tanto, en lo que sigue consideraremos siempre a todas las aplicaciones bilineales $f \in \mathcal{M}$ extendidas a aplicaciones de $\mathbb{C}_\infty$ en $\mathbb{C}_\infty$.

Hablamos ahora de los puntos fijos en $\mathbb{C}_\infty$ de una $f \in \mathcal{M}$. Si $c \neq 0$, $f(\infty) \neq \infty$ mientras $z \in \mathbb{C}$ es un punto fijo si

$$az + b = z(cz + d).$$

Por tanto f posee uno o dos puntos fijos en $\mathbb{C}_\infty$ (de hecho en $\mathbb{C}$). Por otra parte ∞ es punto fijo de f si y sólo si $c = 0$. El otro posible punto fijo saldría de resolver:

$$(d - a)z = b.$$

Si $d \neq a$ el punto fijo adicional es $z = \dfrac{b}{d - a}$.

Si $d = a$ pero $b \neq 0$ no hay más puntos fijos.

Finalmente, si $d = a$ y $b = 0$ nuestra aplicación

$$f(z) = \frac{az}{d} = z$$

es la identidad, que tiene a todos los puntos de $\mathbb{C}_\infty$ como puntos fijos.

Hemos demostrado por tanto lo siguiente.

Proposición 2.24. *La única $f \in \mathcal{M}$ con más de dos puntos fijos en $\mathbb{C}_\infty$ es la identidad $f(z) = z$.*

Para construir aplicaciones bilineales es importante la siguiente propiedad.

Proposición 2.25. *Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos y $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos, existe a lo más una f en $\mathcal{M}$ tal que $f(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Demostración. Si $f, g \in \mathcal{M}$ cumplen $f(z_i) = g(z_i)$ entonces $f^{-1} \circ g$ tiene tres puntos fijos y ha de ser la identidad. □

Una consecuencia importante es que se requieren tres condiciones para determinar un elemento $f \in \mathcal{M}$.

Para estudiar propiedades adicionales de $f \in \mathcal{M}$ introducimos la razón doble (z_1, z_2, z_3, z_4) de cuatro puntos distintos z_i de $\mathbb{C}_\infty$. Ésta se define como:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

cuando los $z_j \in \mathbb{C}$ mientras que si uno de los $z_i = \infty$ se toma como valor de la razón doble el del límite de (z_1, z_2, z_3, z_4) cuando $z_i \to \infty$. Por ejemplo:

$$(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

Algunas veces abreviaremos (z_1, z_2, z_3, z_4) como (z_i).

La aplicación

$$S(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$$

(abreviado $S(z) = (z, z_i)$) es el elemento de $\mathcal{M}$ que asigna a $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ la tríada $1, 0, \infty$.

Proposición 2.26. *Si $f \in \mathcal{M}$ y z_1, z_2, z_3 son puntos distintos de $\mathbb{C}_\infty$ entonces*

$$(z, z_i) = (f(z), f(z_i)) \tag{2.1}$$

para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$.

Demostración. Llamamos $S_1(w) = (w, f(z_i))$ y $S(z) = (z, z_i)$ y nos llevamos la sorpresa de que $S_1 \circ f$ y S asignan los mismos valores a los puntos z_i. □

Un problema pendiente es hallar la $f \in \mathcal{M}$ que cumple $f(z_i) = w_i$ para dos tríadas z_i y w_i de puntos distintos. Si S y S_1 son las aplicaciones precedentes la solución es evidentemente $f(z) = S_1^{-1}(S(z))$.

En la práctica $w = f(z)$ se calcula despejando w en la ecuación:

$$(w, w_i) = (z, z_i).$$

Ya hemos visto que rectas y circunferencias de $\mathbb{C}_\infty$ no son sino la imagen de circunferencias en S_2 por la proyección de Steiner. De hecho las rectas son las circunferencias de S_2 que pasan por el polo norte $N \in S_2$. Por tanto el término circunferencia también abarcará en lo que sigue a las rectas de $\mathbb{C}_\infty$ (rectas de $\mathbb{C}$ a las que se ha añadido el punto ∞).

Proposición 2.27. *Cuatro puntos distintos z_j, $1 \leq j \leq 4$, de $\mathbb{C}_\infty$ yacen en un circunferencia si y sólo si*

$$(z_j) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Demostración. En efecto si $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ sabemos que $S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ es una circunferencia C (incluyendo el caso de una recta de $\mathbb{C}_\infty$) pues $S^{-1} \in \mathcal{M}$. Así $z_1 \in C$ junto con los otros tres puntos.

Recíprocamente, si formamos la circunferencia C que pasa por z_2, z_3, z_4, S aplica este triplete en $1, 0, \infty$ y la imagen de C es $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si por hipótesis $z_1 \in C$ entonces $S(z_1) = (z_j) \in \mathbb{R}$. □

Observación 2.9. Sea C la circunferencia de $\mathbb{C}_\infty$ que pasa por los puntos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$. Es consecuencia de la propiedad que

$$\Im(z, z_1, z_2, z_3) > 0$$

representa los puntos de una de las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus C$ mientras

$$\Im(z, z_1, z_2, z_3) < 0$$

caracteriza los puntos de la otra componente de $\mathbb{C} \setminus C$.

Si C no es una recta, $\infty \notin C$ y pertenece a una de las dos componentes. Se llama componente exterior aquella a la que pertenece ∞.

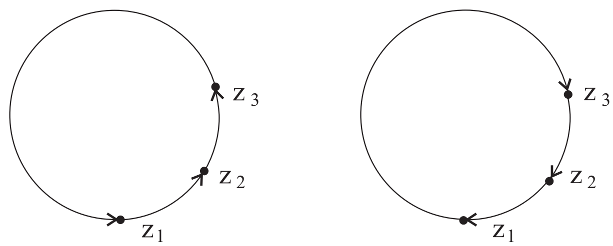

Figura 2.1: Orientaciones equivalentes a $\{z_1, z_2, z_3\}$ y orientaciones equivalentes a $\{z_2, z_1, z_3\}$.

Proposición 2.28. *Sea $f \in \mathcal{M}$, C la circunferencia que pasa por z_1, z_2, z_3, C' su imagen por f. Entonces f transforma las componentes C_1, C_2 de $\mathbb{C} \setminus C$ en las componentes C_1', C_2' de $\mathbb{C} \setminus C'$.*

Observación 2.10. La propiedad es consecuencia inmediata del hecho de que f es un homeomorfismo en $\mathbb{C}_\infty$.

Demostración. Si C es una circunferencia su ecuación se escribe:

$$\Im(z, z_1, z_2, z_3) = \Im(f(z), w_1, w_2, w_3) \qquad w_j = f(z_j).$$

Si C_1 es por ejemplo la componente $\Im(z, z_j) > 0$ entonces $f(C_1)$ es la componente $\Im(z, w_j) > 0$. □

En las construcciones con funciones bilineales es importante la noción de orientación.

Definición 2.29. *Dada una circunferencia C una orientación consiste en un triplete ordenado $\{z_1, z_2, z_3\}$ de puntos de C. El lado derecho C_+ (respectivamente, izquierdo C_-) de C relativo a $\{z_1, z_2, z_3\}$ consiste en la componente de $\mathbb{C} \setminus C$ caraterizada por*

$$\Im(z, z_j) > 0 \qquad (\Im(z, z_j) < 0).$$

Se dice que otra orientación $\{z_1', z_2', z_3'\}$ de C equivale a la anterior si sus lados derechos coinciden.

Las orientaciones cambian si se intercambian dos z_j entre sí. En particular, son invariantes frente a permutaciones circulares y $\{z_1, z_2, z_3\}$, $\{z_2, z_3, z_1\}$, $\{z_3, z_1, z_2\}$ representan la misma orientación. La orientación $\{z_1, z_2, z_3\}$ puede identificarse con el sentido de recorrido de C cuando se va de z_1 a z_3 pasando por z_2. En la Figura 1.1 se da una imagen geométrica.

Proposición 2.30. *Sea $\{z_1, z_2, z_3\}$ una orientación de $\mathbb{C}$. Entonces $\{z_2, z_1, z_3\}$, $\{z_1, z_3, z_2\}$ y $\{z_3, z_2, z_1\}$ constituyen orientaciones de C distintas de $\{z_1, z_2, z_3\}$.*

Demostración. Es consecuencia de las identidades:

$$(z, z_2, z_1, z_3) = 1 - (z, z_1, z_2, z_3)$$

y

$$(z, z_1, z_3, z_2) = \frac{1}{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

$\square$

Teorema 2.31. *Sean C una circunferencia, $\{z_1, z_2, z_3\} \subset C$, $C_\pm$ los correspondientes lados de C y f una aplicación bilineal. Si $C' = f(C)$, $w_i = f(z_i)$ y se considera en C' la orientación definida por $\{w_1, w_2, w_3\}$ entonces $f(C_-) = C'_-$ y $f(C_+) = C'_+$.*

Demostración. Consecuencia directa de la Proposición 1.26. $\square$

Proposición 2.32. *Sea C la recta $z = a + bt$, $a, b \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$. Para $z_j = a + t_j b$ con $t_1 < t_2 < t_3$. Entonces el lado izquierdo de C con respecto a $\{z_1, z_2, z_3\}$ es*

$$\Im(\frac{z-a}{b}) > 0,$$

es decir, el semiplano que queda a la izquierda de C cuando se recorre en sentido creciente de acuerdo a b.

Análogamente si C es $z = z_0 + re^{is}$, $z_j = z_0 + re^{is_j}$ con $0 \leq s_1 < s_2 < s_3 < 2\pi$ y se considera en C la orientación $\{z_1, z_2, z_3\}$ entonces el lado izquierdo C_- es la componente acotada de $\mathbb{C} \setminus C$ (es decir la región que queda a "mano" izquierda cuando se recorre C en sentido positivo).

2.6. El teorema fundamental del álgebra

Vamos a probar con métodos elementales que todo polinomio complejo

$$p(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$$

admite una raíz en $\mathbb{C}$.

La prueba se fracciona en los siguientes lemas.

Lema 2.33. *Dados un polinomio complejo $p(z)$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ existen $b_1, \ldots, b_n$ complejos tales que:*

$$p(z) = p(z_0) + b_1(z - z_0) + \cdots + b_n(z - z_0)^n = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} z^l.$$

Más aún:

$$b_k = \frac{1}{k!} \sum_{l=k}^{n} \frac{l!}{(l-k)!} a_{n-l} z_0^{l-k}.$$

Lema 2.34. *Si $p(z)$ es un polinomio complejo,*

$$\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty.$$

Lema 2.35. *Sea $p(z)$ un polinomio complejo. Entonces existe $z^* \in \mathbb{C}$ tal que:*

$$|p(z^*)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |p(z)|.$$

Finalmente:

Lema 2.36 (Lema de d'Alembert)**.** *Sea $p(z)$ un polinomio complejo y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) \neq 0$. Existe entonces $h \in \mathbb{C}$ tal que:*

$$|p(z_0 + h)| < |p(z_0)|.$$

Teorema 2.37 (Teorema fundamental del álgebra)**.** *Todo polinomio complejo admite al menos una raíz.*

Demostración. Por el lema 1.35 $|p(z)|$ alcanza el mínimo en un z^* quien, del lema de d'Alembert, tiene que ser una raíz de p. □

Capítulo 3

Series de potencias. Funciones analíticas

El estudio de las funciones de una variable compleja se puede abordar desde dos ópticas independientes que a la postre resultan ser equivalentes. Una, la de Weierstrass, basada en la teoría de las series de potencias. Otra, sustentada en la representación integral (la integral de Cauchy) de las funciones regulares y que se debe esencialmente a Riemann y Cauchy. En este capítulo nos vamos a ocupar del tratamiento de Weierstrass relegando el enfoque de Cauchy y Riemann para los dos siguientes capítulos.

3.1. Preliminares

Definición 3.1. *Sea D un abierto de $\mathbb{C}$ y $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones.*

a) La sucesión f_n converge uniformemente a una función $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe n_ε que sólo depende de ε tal que $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$ para $n \geq n_\varepsilon$ y todo $z \in D$.

b) f_n satisface la condición de Cauchy uniformemente en D si para todo $\varepsilon > 0$ existe n_ε que sólo depende de ε tal que $|f_n(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon$ para $n, m \geq n_\varepsilon$ y todo $z \in D$.

Proposición 3.2. *Una sucesión $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ converge uniformemente en D si y sólo si satisface la condición de Cauchy uniformemente en D.*

Proposición 3.3. *Sea f_n una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función f en D. Si todas las f_n son continuas en $z_0 \in D$ entonces f es continua en z_0. En particular, si todas las $f_n \in C(D, \mathbb{C})$ entonces $f \in C(D, \mathbb{C})$.*

Ejercicio 3.1. *Sean $D \subset \mathbb{C}$ un abierto, $z_0 \in D$, $f_n : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente en $D\backslash\{z_0\}$ a una función f. Supongamos* *además que para cada n existe:*

$$\lim_{z\to z_0} f_n(z) = l_n.$$

Entonces:

a) *Existe* $l = \lim l_n$.

b) *Existe* $\lim_{z\to z_0} f(z)$ *y además:*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l.$$

En otras palabras, el paso al límite cuando $z \to z_0$ permuta con el paso al límite en la sucesión de funciones:

$$\lim_{z\to z_0} \{\lim f_n\} = \lim\{\lim_{z\to z_0} f_n\}.$$

El siguiente resultado es clave para los objetivos del capítulo.

Teorema 3.4 (Teorema M de Weierstrass)**.** *Sea $f_n \in C(D,\mathbb{C})$ una sucesión de funciones tales que $|f_n(z)| \leq M_n$ para $z \in D$ donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es convergente. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en D y, por consiguiente, la función*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

es continua en D.

Ejercicio 3.2. *Probar que:*

a) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ *es continua en* $|z| < 1$.

b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+z}$ *es continua en* $\{\Re z \geq 0\}$.

Recapitulamos las definiciones de límite superior e inferior.

Definición 3.5. *Si a_n es una sucesión de números reales los límites superior e inferior $\overline{\lim}\, a_n$, $\underline{\lim}\, a_n$ se definen como:*

a) $\overline{\lim}\, a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\sup_{k\geq n} a_k\}$.

b) $\underline{\lim}\, a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\inf_{k\geq n} a_k\}$.

Siempre existen los límites superior o inferior de una sucesión, aunque posiblemente puedan valer ∞ o $-\infty$.

Proposición 3.6. *Sea $L = \overline{\lim}\, a_n$. Entonces:*

a) $-\infty < L < \infty$ *si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe n_ε tal que $a_n < L + \varepsilon$ para todo $n \geq \varepsilon$ mientras existen infinitos n tales que $a_n > L - \varepsilon$.*

b) $L = \infty$ *si y sólo si para cada M existen infinitos n tales que $a_n > M$.*

c) $L = -\infty$ si y sólo si para cada M existe n_M tal que $a_n < M$ para todo $n \geq n_M$.

Observación 3.1. Se dice que l es un valor de aglomeración de a_n si es el límite de alguna subsucesión suya $a_{n'}$. La propiedad que sigue relaciona los límites superiores con los valores de aglomeración. Nótese que $\underline{\lim}\, a_n$ y $\overline{\lim}\, a_n$ son valores de aglomeración de la sucesión.

Proposición 3.7. *Existen subsucesiones $a_{n'}$, $a_{n''}$ de una sucesión a_n tales que:*

$$\lim a_{n'} = \underline{\lim}\, a_n \qquad \lim a_{n''} = \overline{\lim}\, a_n.$$

Más aún, si $a_{n'''}$ es cualquier subsucesión convergente de a_n entonces se tiene:

$$\underline{\lim}\, a_n \leq \lim a_{n'''} \leq \overline{\lim}\, a_n.$$

Como es natural, la sucesión a_n converge a l si y sólo si:

$$\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n,$$

siendo l el valor común de tales límites.

3.2. Series de potencias

Definición 3.8. *Una serie (formal) de potencias[1] de $z - a$ se define como*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

donde $a_n, a \in \mathbb{C}$. Por simplicidad tomamos $a = 0$ en lo que sigue. $C[[z]]$ designa el conjunto de las series (formales) de potencias de z ($\mathbb{C}[z]$ designa los polinomios complejos en z) en el que se definen las operaciones:

a) Suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n z^n.$$

b) Producto por un escalar $c \in C$:

$$c \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n := \sum_{n=0}^{\infty} c a_n z^n.$$

c) Producto (de Cauchy):

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

[1] La serie de potencias puede también definirse como una serie funcional.

Es un ejercicio sencillo probar que $\mathbb{C}[[z]]$ es una álgebra conmutativa con elemento unidad y sin divisores de cero.

Nos ocupamos ahora del problema de la convergencia de las series de potencias de $z-a$. Es obvia la convergencia a a_0 de la serie en $z=a$.

Proposición 3.9. *Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ o bien converge solamente en $z=a$, o bien converge para todo $z \in \mathbb{C}$, o bien existe $\rho > 0$ tal que la serie converge en z si $|z-a| < \rho$ y diverge si $|z-a| > \rho$. Más aún, en los dos últimos casos la serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$ (respectivamente en $D(a,\rho)$) incluso uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{C}$ (respectivamente, $K \subset D(a,\rho)$).*

Demostración. Supongamos que la serie converge en $z_0 \neq a$ y diverge en algún $z_1 \in \mathbb{C}$ resulta entonces que

$$|a_n||z_0-a|^n \leq M,$$

para todo n. Se tiene entonces que

$$|a_n||z-a|^n \leq M\left(\frac{|z-a|}{|z_0-a|}\right)^n$$

y la serie converge absolutamente para todo z tal que $|z-a| < |z_0-a|$. Resulta así que:

$$\rho = \sup\{|z-a| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \text{ converge}\},$$

cumple $|z_0-a| \leq \rho \leq |z_1-a|$ y la serie diverge para $|z-a| > \rho$. □

La proposición dice que el conjunto de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ cuando no es trivial (es decir $\{a\}$) o todo el plano complejo $\mathbb{C}$ consiste en un disco abierto $D(a,\rho)$ junto con algunos puntos (quizás todos o quizás ninguno) de la circunferencia $|z-a| = \rho$.

Definición 3.10. *El radio de convergencia $0 \leq \rho \leq \infty$ de una serie de potencias se define como el número $\rho = 0$ si sólo converge en $z=a$, $\rho = \infty$ si converge para todo $z \in \mathbb{C}$ o finalmente, el valor ρ de la Proposición* **??**.

Observación 3.2. Se desprende de la proposición precedente que si $\rho > 0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ define una función continua en el círculo $D(a,\rho)$.

Ejemplos 3.3.

a) El radio de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es $\rho = 1$.

b) El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ es $\rho = \infty$.

c) El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ es $\rho = 0$.

La matemática nos obsequia en algunos ocasiones con resultados “redondos” y el que sigue es sin duda uno de ellos. Se recoge originalmente a la tesis de J. Hadamard (1865-1963).

Teorema 3.11 (Hadamard, 1892)**.** *El radio de convergencia $0 \leq \rho \leq \infty$ de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ se expresa en los siguientes términos:*

$$\rho = \frac{1}{\{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}\}}. \tag{3.1}$$

Observación 3.4. Como la expresión (**??**) se da en términos del límite superior, no se requiere ninguna condición extra sobre los coeficientes a_n de la serie.

Demostración del Teorema de Hadamard. Asumimos para abreviar que $a = 0$. Ponemos $L = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ y suponemos que $0 \leq L < \infty$. Probamos que la serie converge absolutamente si $\dfrac{1}{|z|} > L$. De la definición de límite superior existen $\theta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{|z|} \qquad n \geq n_0.$$

Por tanto

$$|a_n||z|^n < \left(\frac{|z|}{\theta}\right)^n \qquad n \geq n_0,$$

y la serie converge absolutamente. Luego si $L = 0$, $\rho = \infty$ y si $L < \infty$, $\dfrac{1}{L} \leq \rho$ (ρ el radio de convergencia).

Suponemos ahora $0 < L \leq \infty$ y demostramos que la serie diverge si $\dfrac{1}{|z|} < L$. En efecto, de la definición de límite superior se sigue que

$$\frac{1}{|z|} < \sqrt[n]{|a_n|},$$

para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Esto dice por ejemplo que $\overline{\lim}\, |a_n||z|^n \geq 1$ y la serie no puede converger. Por tanto, diverge para todo $z \neq 0$ si $L = \infty$ o diverge para $|z| > \dfrac{1}{L}$ si L es finito. En el primer caso $\rho = 0$, en el segundo $\rho \leq \dfrac{1}{L}$. La prueba ha terminado. □

Ejemplo 3.5. Supongamos $\lambda \in \mathbb{C}$. La serie binomial se define como:

$$f_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} z^n$$

donde

$$\binom{\lambda}{n} := \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}, \qquad \binom{\lambda}{0} := 1.$$

Fue introducida por Newton (coincide de hecho con el valor $(1+z)^\lambda$ cuando $\lambda \in \mathbb{N}$) y estudiada en detalle por Abel. Se demuestra –usando el Ejercicio **??** (v. también el Ejercicio **??**)– que tiene radio de convergencia la unidad.

La siguiente propiedad afirma que la serie de potencias obtenida formalmente tras derivar k veces una serie dada, tiene el mismo radio que la original.

Proposición 3.12. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia ρ. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ la serie:*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-a)^{n-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+k)!}{m!} a_{m+k} (z-a)^m$$

tiene radio de convergencia ρ.

Proposición 3.13. *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ series complejas absolutamente convergentes y definamos*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge absolutamente y

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Teorema 3.14. *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ series de potencias con radios positivos ρ_1, ρ_2. Entonces las series suma $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(z-a)^n$ y producto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ tienen radio de convergencia ρ_s y ρ_p, respectivamente, mayor o igual que $\mathrm{mín}\{\rho_1, \rho_2\}$ satisfaciéndose las igualdades:*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(z-a)^n$$
$$|z-a| < \mathrm{mín}\{\rho_1, \rho_2\}$$

y

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad |z-a| < \mathrm{mín}\{\rho_1, \rho_2\}.$$

Observaciones 3.6.

a) Para $|z| < \rho$ se puede calcular la potencia m-ésima de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y el resultado es de nuevo otra serie de potencias. En efecto:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a^{(m)}{}_n z^n \tag{3.2}$$

donde

$$a_n^{(m)} = \sum_{j_1+\cdots+j_m=n} a_{j_1} \dots a_{j_n}. \tag{3.3}$$

b) Un caso de interés se tiene cuando $a_0 = 0$. La serie "potencia m-ésima" comienza a partir del exponente m (los primeros $m-1$ términos son cero) y además en la formula (??) sólo intervienen coeficientes a_j con $j \leq n-1$ cuando $m \geq 2$.

Ejercicio 3.3. *Pruébese que el coeficiente $a_n^{(m)}$ de la potencia m-ésima se puede escribir como:*

$$a_n^{(m)} = \sum \frac{m!}{\alpha!} a_0^{\alpha_0} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

en donde $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ con los $\alpha_j \geq 0$ enteros, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$ y la suma está extendida a todos los α que cumplen:

$$|\alpha| := \alpha_0 + \cdots \alpha_n = m,$$

y además:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n = n.$$

Indicación: defínase α_j en la fórmula (??) como el número de veces que aparece a_j en un producto dado $a_{j_1} \ldots a_{j_n}$ con $j_1 + \cdots + j_m = n$.

3.3. Funciones analíticas

Las funciones analíticas constituían la única clase de funciones de curso legal durante el siglo XIX. Dominaron el cálculo antes de lo que hoy conocemos como Análisis Real, cuyo punto de partida fue la introducción de la integral de Lebesgue a comienzos del siglo XX. Una evidencia explícita del elevado estatus del que gozaban en la matemática de entonces es el papel preponderante que desempeñan tales funciones, en la sección de análisis de la célebre lista de problemas propuesta por David Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1900 ([?]).

Definición 3.15. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto. Se dice que una función $f : G \to \mathbb{C}$ es analítica si para todo $z_0 \in G$ existen $\rho > 0$ y una sucesión compleja $\{a_n\}$, que dependen de z_0, tales que:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad |z - z_0| < \rho.$$

Observación 3.7. Está implícito en la definición que f se representa en el entorno de cada punto por una serie de potencias con radio de convergencia positivo, por tanto son funciones continuas. Comprobaremos en el siguiente capítulo que de hecho son funciones infinitamente derivables.

Ejemplos 3.8.

1) Un polinomio $p(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$ es analítico en $\mathbb{C}$. En efecto, dado $a \in \mathbb{C}$ se puede escribir –según se vio– como $p(z) = b_0 + b_1(z-a) + \cdots + b_n(z-a)^n$.

2) La función $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. En efecto, para $a \in \mathbb{C}$ dado:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a} \frac{1}{\left\{1 - \dfrac{z-a}{1-a}\right\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-a)^{n+1}} (z-a)^n.$$

Nótese que el radio de convergencia de ésta última serie es $|a-1|$.

3) Funciones racionales. Si

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

es racional y $q(z)$ tiene raíces $a_1, \dots, a_l$ la función f es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$. A tal fin nótese que

$$f(z) = q_1(z) + \frac{A}{(z-a_1)} + \cdots + \frac{B}{(z-a_1)^{\alpha_1}} + \cdots + \frac{C}{(z-a_l)^{\alpha_l}},$$

donde las α_j son las multiplicidades de las raíces. Para desarrollar en serie de potencias de $(z-a)$ donde $a \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$ basta usar la idea del apartado 2). De hecho las funciones $\dfrac{1}{(z-a)^{\alpha_i}}$ son analíticas porque son potencias de funciones analíticas.

La siguiente proposición establece que las propias series de potencias con radio de convergencia positivo definen funciones analíticas en su disco (círculo) de convergencia. A la luz de los resultados de los Capítulos IV y V demostraremos en su momento que esto también es consecuencia de la derivabilidad de las series de potencias. La que sigue es, no obstante, una prueba directa que *evita dicha derivabilidad*.

Teorema 3.16. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia ρ. Entonces, para cada $z_0 \in D(a, \rho)$ la función:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

se puede representar en la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n,$$

con

$$b_n = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} a_m (z_0-a)^{m-n} = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m (z_0-a)^{m-n}$$

siendo la serie convergente en cada z cumpliendo $|z-z_0| < \rho - |z_0-a|$.

La prueba emplea algunos resultados básicos de series dobles.

Sea a_{nm} una sucesión doble de números *complejos*. Se dice ([?]) que la serie doble:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}$$

es convergente[2] y tiene suma $s \in \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe n_ε tal que para $\min\{M, N\} \geq n_\varepsilon$:

$$\left| \sum_{0\leq n\leq N, 0\leq m\leq M} a_{nm} - s \right| < \varepsilon.$$

Puede probarse que si a_{nm} es una sucesión doble de números *reales no negativos* b_{nm}, la serie doble:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm},$$

es convergente y tiene suma s si y sólo si

$$s = \sup \sum_{(n,m)\in F} b_{nm}$$

donde $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ denota un conjunto finito y el supremo se extiende a todas las partes finitas F de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Asimismo, un camino útil para establecer la convergencia de series dobles de términos no negativos es el de las series "iteradas"

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} \right\} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b_{nm} \right\}.$$

Para series dobles de términos no negativos la convergencia equivale a la de las iteradas y de hecho se tiene siempre la igualdad (de valor $+\infty$ en caso de divergencia de la serie)

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b_{nm} \right\}.$$

Finalmente, la suma s de una serie doble de términos no negativos $\sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm}$ se puede obtener como el límite de sumas finitas de términos con tal que el número total de términos sumados acabe abarcando todo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En términos más precisos:

$$s = \lim_{N\to\infty} \sum_{(n,m)\in F_N} b_{nm},$$

donde F_N es cualquier sucesión de partes finitas de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con la propiedad $F_N \subset F_{N+1}$ y $\cup_{N=0}^{\infty} F_N = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Se omiten los detalles por simplicidad.

[2] Podía haberse empleado la noción más restrictiva de familia sumable que ofrece la ventaja de que la convergencia equivale a la convergencia absoluta. Véanse detalles en [?].

Como en el caso de series simples una serie doble absolutamente convergente es también convergente y

$$|\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}| \leq \sum_{n,m=0}^{\infty} |a_{nm}|.$$

La prueba del siguiente resultado se omite por brevedad (cf. [**?**]).

Teorema 3.17. *Sea a_{nm} una sucesión doble de números complejos y supongamos que la serie*

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}$$

converge absolutamente.

Entonces:

a) Para n_0, m_0 arbitrarios las series parciales:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm_0} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_0 m}$$

convergen absolutamente.

b) Las series "iteradas"

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\right\} \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}\right\}$$

convergen absolutamente.

c) Se tienen las igualdades:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\right\} = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}\right\}.$$

Demostración del Teorema **??**. Dado z_0 consideramos los z tales que:

$$|z - z_0| < \rho - |z_0 - a|,$$

ρ el radio de convergencia de la serie. Como $|z - z_0| + |z_0 - a| < \rho$ se tiene que la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|z - z_0| + |z_0 - a|)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}|a_n||z - z_0|^m|z_0 - a|^{n-m} < \infty.$$

Esto quiere decir que la serie doble:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a_n(z - z_0)^m(z_0 - a)^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$$

es absolutamente convergente. El Teorema **??** autoriza a cambiar el orden de sumación para tener:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a_n(z-z_0)^m(z_0-a)^{n-m} =$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}a_n(z_0-a)^{n-m}\right)(z-z_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty}b_m(z-z_0)^m.$$

□

Para estimar el tamaño del conjunto de las funciones analíticas en un abierto $G \subset \mathbb{C}$ nada mejor que disponer de reglas que nos permitan generar funciones analíticas a partir de funciones analíticas conocidas. La siguiente propiedad es elemental.

Proposición 3.18. *Sean f, g analíticas en $G \subset \mathbb{C}$ abierto. Entonces $f+g$ y fg son analíticas en G.*

Dentro de la filosofía de fabricar nuevas funciones analíticas a partir de funciones conocidas el resultado que sigue también es natural. Su demostración es más delicada.

Proposición 3.19. *Si $f : G \to \mathbb{C}$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$, G, Ω abiertos son analíticas y $f(G) \subset \Omega$ entonces $g \circ f$ es analítica en G.*

Demostración. Suponemos que $z_0 \in G$, $f(z_0) = a_0 \in \Omega$. Hemos de probar que la composición $g \circ f$ se puede representar en la forma:

$$g \circ f(z) = g(f(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-z_0)^m,$$

siendo la serie convergente para $|z - z_0| < r$. Se sabe que

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

mientras $g(w) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(w-w_0)^m$ con $w_0 = a_0$, en los respectivos círculos de convergencia. Si $|f(z) - a_0| = |f(z) - w_0| < \rho_g$ (ρ_g el radio de la serie de g) podemos escribir:

$$g(f(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(f(z)-w_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right)^m.$$

El –importante– lema que sigue nos garantiza la posibilidad de reorganizar la serie para –preservando la convergencia– sacar factor común las potencias de $z - z_0$ y escribir, sumando en dichas potencias:

$$g(f(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-z_0)^m.$$

□

La proposición se sigue a su vez de la siguiente.

Lema 3.20. *Sean* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *series de potencias con radio de convergencia positivo de forma que*

$$a_0 = 0.$$

Entonces, la serie substitución:

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

tiene radio de convergencia $\rho > 0$. *Además:*

$$g(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

donde f *y* g *son las funciones representadas por las series* $\sum a_n z^n$ *y* $\sum b_n z^n$, *respectivamente.*

Demostración. Si ρ_a y ρ_b designan los radios de convergencia de las series $\sum a_n z^n$ y $\sum b_n z^n$ se tiene que

$$g(f(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (f(z))^m = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (\sum_{n \geq 1} a_n z^n)^m$$

está bien definida con tal que $|f(z)| < \rho_b$. Dicha serie es de hecho la serie iterada:

$$b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (\sum_{n \geq 1} a_n z^n)^m = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(m)} z^n \right\},$$

donde $a_n^(1) = a_n$ y los $a_n^{(m)} = a_n^{(m)}((a_i)_{1 \leq i \leq n-1})$ son, para $m > 2$, polinomios homogéneos de grado m y coeficientes enteros positivos en los a_i con $1 \leq i \leq n-1$. La cuestión fundamental es que podemos cambiar el orden se sumación en la última serie para tener:

$$b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(m)} z^n \right\} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{n} b_m a_n^{(m)} \right\} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

donde

$$c_0 = b_0 \qquad c_1 = b_1 a_1$$

y

$$c_n = \sum_{m=1}^{n} b_m a_n^{(m)} = b_1 a_n + P_n(b_2, \ldots, b_n; a_1, \ldots, a_{n-1})$$

donde P_n es un polinomio lineal en los b_k ($2 \leq k \leq n$),de grado n en los a_j ($1 \leq j \leq n$), cuyos coeficientes son *enteros positivos.*

Para justificar el cambio de orden nos basta con verificar que la serie doble:

$$b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(m)} z^n \right\} \tag{3.4}$$

es absolutamente convergente si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||z|^n < \rho_b.$$

En efecto, en tal caso, la serie doble de términos positivos:

$$b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} |b_m| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||z|^n \right)^m = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} |b_m| \sum_{n=m}^{\infty} \tilde{a}_n^{(m)} |z|^n$$

con $\tilde{a}_n^{(m)} = a_n^{(m)}((|a_i|)_{1\leq i\leq n-1})$, converge y mayora a la serie (**??**) pues:

$$|b_m a_n^{(m)} z^n| \leq |b_m| \tilde{a}_n^{(m)} |z|^n.$$

Nótese que los coeficientes $\tilde{a}_n^{(m)}$ son no negativos. Por tanto, hemos terminado. $\square$

3.4. Funciones exponencial y logaritmo

Definición 3.21. *Se define la función exponencial $f(z) = e^z$ como la serie:*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

La función exponencial se ha definido mediante una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $\rho = \infty$. Llamaremos *enteras* a este tipo de funciones.

Definición 3.22. *Se dice que una función compleja f es entera si*

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$$

donde la serie converge en todo $z \in \mathbb{C}$.

Proposición 3.23. *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1) $e^0 = 1$.

2) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

3) $e^z \neq 0$ *para todo* z*. Más aún* $e^{z^{-1}} = e^{-z}$.

4) $e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$.

La fórmula de Euler del Capítulo I está recogida en 4).

Proposición 3.24. *La función e^{iz} es periódica de periodo $2\pi i$. Más aún:*

$$e^{z'} = e^{z},$$

si y sólo si $z' = z + 2k\pi i$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Nótese que e^z es la extensión compleja de la función exponencial real la cual, según sabemos, se representa mediante el desarrollo:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

En el apéndice del Capítulo I se introdujeron asimismo las funciones reales $y(x) = \operatorname{sen} x$ y $y(x) = \cos x$ como las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ que satisfacen las condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ y $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Observamos que tales funciones se representan mediante los desarrollos en serie de potencias de x:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}.$$

La definición que sigue introduce las correspondientes funciones trigonométricas elementales, por el simple procedimiento de asignarle a x valores complejos.

Definición 3.25. *Se definen las funciones seno y coseno:*

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}.$$

Proposición 3.26. *Las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ son periódicas de periodo 2π. Se tienen además las relaciones:*

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z,$$

y

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Se satisfacen la mayoría de las propiedades elementales de las funciones trigométricas que se relegan a los problemas. Se sobrentienden asimismo las definiciones habituales de tag $z, \sec z$, etc.

El que la función e^z sea periódica implica que admite múltiples maneras de ser invertida. Esto ya se observó en el caso de la inversa de z^n. De hecho, se da la misma situación en el caso de una variable real con las funciones trigonométricas (arcoseno, arcotangente, etc.). Las inversas de la función exponencial se denominan "funciones logaritmo" cuyo estudio –idéntico al de la función argumento– iniciamos ahora.

Definición 3.27. *Se dice que w es un logaritmo de z si $e^w = z$.*

Para $z \neq 0$ dado todos los logaritmos de z son:

$$w = w_0 + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

donde w_0 es un logaritmo particular. Específicamente, si $z = |z|e^{i\theta}$ los logaritmos de z son $w = \log|z| + i\theta + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ahora bien, nos interesa el logaritmo como función de z y no como una mera "reata" de valores que dependen de z. Se trata entonces de invertir la función exponencial. Una consecuencia de nuestro estudio de la función argumento es la siguiente propiedad.

Proposición 3.28. *Para cada $\tau \in \mathbb{R}$ la apliciación $f(z) = e^z$:*

$$f : \{\tau \leq \Im z < \tau + 2\pi\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

es biyectiva, con inversa:

$$f^{-1}(z) = \log|z| + i \arg_\tau z.$$

Más aún:

$$f^{-1} : \Omega_\tau = \mathbb{C} \setminus \{te^{i\tau} : t \geq 0\} \longrightarrow \{\tau < \Im z < \tau + 2\pi\},$$

es continua.

Demostración. Llamamos $\mathcal{G} = \{\tau \leq \Im z < \tau + 2\pi\}$ y f es inyectiva pues:

$$e^{z'} = e^z \quad \Rightarrow \quad x = x' \quad \& \quad y' - y = 2k\pi,$$

con lo que $y' = y$. Para probar la sobreyectividad escribimos $g(z) = \log|z| + i \arg_\tau z$, cuyo dominio es $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \subset \mathcal{G}$ y

$$f(g(w)) = w.$$

De ahí mismo sale que $f^{-1}(z) = g(z)$. □

La función f^{-1} de la proposición se denomina:

$$\log_\tau z = \log|z| + i \arg_\tau z.$$

En particular, la elección de $\mathcal{G}_0 = \{0 \leq \Im z < 2\pi\}$ en la proposición da lugar a la función:

$$\log z = \log|z| + i \arg z,$$

que es continua en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \geq 0\}$.

Se llama función *logaritmo principal* a la inversa de e^z cuando en la proposición se toma $\mathcal{G}^*_{-\pi} = \{-\pi < \Im z \leq \pi\}$. Se la representa por:

$$\mathrm{Log}\ z = \log|z| + i\mathrm{Arg}\ z,$$

y define una función continua en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$.

El logaritmo principal satisface las propiedades elementales:

$$\text{Log } z_1 z_2 = \text{ Log } z_1 + \text{ Log } z_2 + 2k\pi i,$$

$$\text{Log } z^n = n \text{ Log } z + 2k\pi i,$$

y

$$\text{Log } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{ Log } z.$$

Como en el caso real, se usa el logaritmo principal para introducir la función potencial de exponente complejo:

$$z^\lambda = e^{\lambda \text{Log } z},$$

así como la función exponencial,

$$a^z = e^{z \text{Log } a}.$$

Hemos encontrado inversas g de la función exponencial que son continuas en ciertos dominios $\Omega \subset \mathbb{C}$. Por ejemplo: $g =$ Log z definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\Re z \leq 0\}$.

Resulta evidente que si el par (g, Ω) define una inversa de la exponencial entonces la familia $(g + 2k\pi i, \Omega)$, $k \in \mathbb{Z}$, comprende infinitas inversas de la exponencial.

Se suelen usar los términos "hoja", "rama" o "determinación" del logaritmo para referirse a todas estas funciones. Más generalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 3.29. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f \in C(G, \mathbb{C})$. Se dice que (g, Ω), $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $g \in C(\Omega, \mathbb{C})$, es una rama de inversa de f o una determinación de f^{-1} si $g(\Omega) \subset G$ y*

$$f(g(z)) = z. \tag{3.5}$$

Observación 3.9. Se desprende de (**??**) que $\Omega \subset f(G)$. No es difícil comprobar que $f : g(\Omega) \to \Omega$ es biyectiva, por tanto un homeomorfismo, de donde se tiene que $g(\Omega)$ también es un dominio.

Proposición 3.30. *Si (f, Ω) es una determinación del logaritmo entonces todas las demás determinaciones posibles (h, Ω) del logaritmo en Ω son de la forma:*

$$h(z) = f(z) + 2k\pi i,$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por otra parte no existen determinaciones (f, Ω) del logaritmo tales que Ω contenga un círculo perforado $\{z : 0 < |z| < r\}$.

Una consecuencia inmediata es que todas las determinaciones (ramas) g del logaritmo en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$ tienen la forma:

$$g_k(z) = \log |z| + i\text{Arg } z + 2k\pi i,$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$. Precisamente, llamamos logaritmo principal a la rama $k = 0$:

$$g_0(z) = \log |z| + i\mathrm{Arg}\ z.$$

Bajo la óptica de las ramas de inversa no está de más que caractericemos las determinaciones de la raíz n-ésima en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Proposición 3.31. *Si (f, Ω), $\Omega \subset \mathbb{C}$, es una rama de la raíz n-ésima entonces las otras ramas de la raíz n-ésima en Ω tienen la forma:*

$$f_k(z) = e^{\frac{2k\pi}{n} i} f(z) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Más aún ninguna de tales determinaciones es tal que $0 \in \Omega$.

Demostración. Si (f, Ω) y (g, Ω) son determinaciones $f(z)/g(z)$ es continua en $\Omega \setminus \{0\}$ –que sigue siendo un dominio– y $(f(z)/g(z))^n = 1$ en dicho dominio. En efecto, $f(z)^n = z$ significa que $f(z) \neq 0$ si $z \neq 0$.

En particular, f/g toma valores en el conjunto discreto $\{1, \zeta, \ldots, \zeta_{n-1}\}$ de las raíces n-ésimas de la unidad. Por tanto f/g es constante en $\Omega \setminus \{0\}$.

La última afirmación es consecuencia de que, por ejemplo, la función $\sqrt[n]{z}$ no es continua en un tal círculo perforado. □

Continuamos ahora con un análisis de la función seno. La función seno real $\operatorname{sen} x$ es biyectiva de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sobre su imagen $[-1, 1]$. Inspirándonos en ello comprobamos que $\operatorname{sen} z$ es biyectiva en la región $\mathcal{B}^*$ sobre su imagen $\mathbb{C}$ donde

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \{z = -\frac{\pi}{2} + it : t \geq 0\} \cup \{z = \frac{\pi}{2} + it : t \leq 0\},$$

y

$$\mathcal{B} = \{-\frac{\pi}{2} < \Re z < \frac{\pi}{2}\}.$$

Asimismo, $\operatorname{sen} z$ es biyectiva cuando la restringimos a $\mathcal{B}$ sobre su imagen $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{x^2 \geq 1\}$.

Probamos las afirmaciones. Primero la inyectividad, si $z, z' \in \mathcal{B}^*$, $z \neq z'$ y $\operatorname{sen} z' = \operatorname{sen} z$ entonces

$$e^{iz'} - e^{-iz'} = e^{iz} - e^{-iz},$$

Como $|\Re z' - \Re z| \leq \frac{\pi}{2}$ resulta $e^{iz'} \neq e^{iz}$ por tanto:

$$e^{i(z+z')} = -1,$$

de donde $z + z' = \pi + 2k\pi$. Si las partes reales son x, x' resulta que $x + x' = \pm\pi$. Al ser $x \neq x' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ estas identidades no son posibles. Luego $z = z'$.

Para demostrar la sobreyectividad escribimos:

$$\operatorname{sen} z = w,$$

para llegar a:

$$z = -i\ \mathrm{Log}\ \{iw \pm \sqrt{1 - w^2}\},$$

donde –por razones que vemos más abajo– tomamos el signo $+$ designando la expresión por $g(w)$. Resulta que $g(w) \in \mathcal{B}^*$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Justificado esto se concluye que $\operatorname{sen} z$ es biyectiva en $\mathcal{B}^*$ con inversa $g(z)$ definida en $\mathbb{C}$.

En la comprobación de $g(w) \in \mathcal{B}^*$ primero suponemos que $-1 \leq w \leq 1$ con lo que

$$g(w) = \text{Arg } (\sqrt{1-w^2} + iw) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Si hubiéramos elegido el signo $-$ más arriba no habríamos obtenido este resultado. Por otro lado si $|w| > 1$, w todavía real, resulta:

$$g(w) = \text{ signo } (w)\frac{\pi}{2} + i \log |w + \sqrt{w^2-1}|,$$

y $\log |w + \sqrt{w^2-1}|$ recorre $(0, \infty)$ (respectivamente, $(-\infty, 0)$) si $w > 1$ ($w < -1$).

Finalmente, consideramos $w = x + iy$ con $y \neq 0$ y probamos que

$$\Re\{iw \pm \sqrt{1-w^2}\} = -y + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|1-w^2| + (1-x^2+y^2)} > 0.$$

Esto equivale a:

$$\begin{gathered}
|1-w^2| + (1-x^2+y^2) > 2y^2, \\
(1-x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2 > (1-x^2-y^2)^2, \\
(1-x^2+y^2)^2 - (1-x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 > 0, \\
4(1-x^2)y^2 4x^2y^2 > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4y^2 > 0,
\end{gathered}$$

y la comprobación $g(\mathbb{C}) \subset \mathcal{B}^*$ queda terminada.

Definición 3.32. *La función arcoseno principal se define como:*

$$\text{Arcsen } z = -i \textit{ Log } \{iz \pm \sqrt{1-z^2}\}.$$

Es continua en $\mathbb{C} \setminus \{w^2 \geq 1\}$.

Observaciones 3.10.

a) Las funciones

$$f_k(z) = \text{Arcsen } z + 2k\pi,$$

toman valores en $\mathcal{B}^* + 2k\pi$ e invierten al seno (son ramas de inversa del seno cuando éste se observa con dominio $\mathbb{C}$).

b) Se sabe que

$$\operatorname{sen}(\pi - z) = \operatorname{sen} z,$$

por tanto la función

$$g(z) = \pi - \text{Arcsen } z,$$

que toma valores en $\mathcal{B}^* + \pi$ también invierte a la función seno. Lo mismo sucede con las funciones

$$g_k(z) = \pi - \text{Arcsen } z + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ejercicio 3.4. *Analizar las transformadas de las curvas coordenadas:*

$$\Gamma_1 = \{\Re z = x_0\} \cap \overline{\mathcal{B}} \qquad \Gamma_2 = \{Im z = y_0\} \cap \overline{\mathcal{B}},$$

por medio de la función seno, usando para ello la representación:

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + \cos x \operatorname{senh} y.$$

Pruébese que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Ejercicio 3.5. *Pruébense las siguientes propiedades:*

a) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$, $\operatorname{sen} z' = -\operatorname{sen} z$ *donde* $z' = 2k\pi - z$ *para un* $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\operatorname{sen}(\pi + z) = -\operatorname{sen} z$.

Conclúyase que $\operatorname{sen} z$ *no puede ser inyectiva en ninguna banda* $\mathcal{B} = \{\alpha < \Re z < \beta\}$ *cuyo ancho* $\beta - \alpha > \pi$.

Procedemos ahora con la función tag z siguiendo métodos similares a los del seno, primero observando la función real en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Se concluye que la función tangente también es biyectiva de $\mathcal{B}^{**} = \mathcal{B} \cup \{z = -\dfrac{\pi}{2} + it : t < 0\} \cup \{z = \dfrac{\pi}{2} + it : t > 0\}$ con valores en $\Omega \setminus \{\pm i\}$ y su restricción a $\mathcal{B}$ lo es sobre su conjunto imagen $\mathbb{C} \setminus \{i(-\infty, -1) \cup i(1, \infty)\}$.

En primer lugar

$$\text{tag } z = i\frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}},$$

en donde como $e^{2iz} \neq 1, \infty$ vemos que la imagen de tag z excluye los valores $\pm i$. Como composición de aplicaciones inyectivas, tag z es inyectiva en $\mathcal{B}$ mientras

$$\text{tag } z = i\frac{1+u}{1-u} \qquad z = \frac{\pi}{2} + ti \qquad u = e^{-2t},$$

con lo que tag z recorre $i(1, \infty)$ cuando $z = \frac{\pi}{2} + ti$ con $t > 0$.

Para estudiar la sobreyectividad escribimos tag $z = w$ para concluir:

$$z = g(w) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + iw}{1 - iw}\right).$$

Es muy sencillo ver que $g(\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}) \subset \mathcal{B}^{**}$ lo que concluye la comprobación de biyectividad.

Capítulo 4

Derivabilidad en $\mathbb{C}$

4.1. Derivabiliad

Definición 4.1. *Sea $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja, $G \subset \mathbb{C}$ abierto. Se dice que f es derivable en $z_0 \in G$ con derivada $f'(z_0)$ si*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

Proposición 4.2. *Sea $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja definida en $G \subset \mathbb{C}$ abierto de $\mathbb{C}$. Que f sea derivable en z_0 equivale a que exista $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que*

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + g(z), \tag{4.1}$$

donde $g(z) = o(|z - z_0|)$ cuando $z \to z_0$.

Observación 4.1. Otra forma equivalente de escribir la relación (**??**) es poner:

$$g(z) = h(z)(z - z_0),$$

donde h es una función que cumple $\lim_{z \to z_0} h(z) = 0$ ($h = o(1)$ cuando $z \to z_0$).

Por razones que se aclaran en el Capíulo V las funciones derivables en un dominio $G \subset \mathbb{C}$ se denominan funciones *holomorfas* en G.

Las propiedades siguientes se prueban exactamente como en el caso de una variable real.

Proposición 4.3. *Sean $f, g : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones complejas definidas en un abierto $G \subset \mathbb{C}$ y derivables en $z_0 \in G$. Entonces:*

a) f (y también g) es continua en z_0. Más aún

$$|f(z) - f(z_0)| \leq L|z - z_0|,$$

si $|z - z_0| \leq r$ para ciertas constantes L, r.

b) Para $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ la función $\lambda f + \mu g$ es derivable en z_0 con

$$(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0).$$

c) [Regla de Leibnitz] fg es derivable en z_0 y

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

d) Supuesto $g(z_0) \neq 0$ la función $\dfrac{f}{g}$ es derivable en z_0 y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Es también importante la propiedad siguiente.

Proposición 4.4 (Regla de la Cadena)**.** *Sean $f : G \to \mathbb{C}$, $g : \Omega \to \mathbb{C}$, G, Ω abiertos de $\mathbb{C}$, $f(z_0) = w_0$ con $z_0 \in G$, $w_0 \in \Omega$ y f y g derivables en z_0 y w_0, respectivamente. Entonces $g \circ f(z) = g(f(z))$ es derivable en z_0 y*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Demostración. Se tiene:

$$g(w) = g(w_0) + g'(w_0)(w - w_0) + g_1(w),$$

y

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + f_1(z),$$

con $g_1 = o(|w - w_1|)$ y $f_1 = o(|z - z_0|)$ cuando $w \to w_0$ y $z \to z_0$, respectivamente. Por substitución directa se tiene:

$$g(f(z)) = g(f(z_0)) + g'(w_0)f'(z_0)(z - z_0) + h(z),$$

con

$$h(z) = g'(w_0)f_1(z) + g_1(f(z)).$$

Como $h(z) = o(|z - z_0|)$ cuando $z \to z_0$ hemos terminado. □

Ejemplo 4.2. Los polinomios y las funciones racionales son derivables en sus dominios de definición. El cálculo de sus derivadas es idéntico al del caso real pues:

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

Proposición 4.5. *Sea $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación derivable en G, $f'(z_0) \neq 0$ y γ_1, γ_2 dos curvas C^1 (Cap. I) incidentes en z_0. Entonces el ángulo de γ_1 a γ_2 en z_0 coincide con el ángulo de $\gamma_1' = f(\gamma_1)$ a $\gamma_2' = f(\gamma_2)$ en $w_0 = f(z_0)$.*

Demostración. Si $\varphi_i(t)$, $t \in [a,b]$, $i = 1,2$, son las parametrizaciones de las curvas, $z_0 = \varphi_i(t_0)$ resulta:

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg\left(\frac{\varphi_2'(t_0)}{\varphi_1'(t_0)}\right) = \arg\left(\frac{f'(z_0)\varphi_2'(t_0)}{f'(z_0)\varphi_1'(t_0)}\right) = \angle(\gamma_1', \gamma_2'),$$

que es lo que se pretendía demostrar. □

Si una función f es derivable en un abierto $G \subset \mathbb{C}$ y su derivada f' es derivable en z_0 entonces $(f')'(z_0)$ se llama la derivada segunda de f en z_0 y escribimos $f''(z_0)$ en lugar de $(f')'(z_0)$. De manera análoga se introducen las derivadas de orden n. Una verdadera "gema" del análisis complejo es la propiedad que afirma que una función f que es derivable en un abierto G satisface a) que su derivada f' es una función continua en G, b) que admite derivadas de todos los órdenes en G, c) que es analítica en G (cf. Capítulo III). Todavía tardaremos lo suyo en esclarecer todo esto (los impacientes pueden acudir a los textos clásicos de la materia, [**?**] por ejemplo). La siguiente propiedad juega un papel fundamental en la prueba de este hecho.

Proposición 4.6. *Sea $\sum_0^\infty a_n(z-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$. Si representamos por $D = D(z,a)$ el círculo de convergencia y $f(z)$ la suma de la serie en D entonces f admite derivadas de todos los órdenes y*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^\infty n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}.$$

En particular

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n.$$

Demostración. Todo se reduce a probar que f es derivable en D y que su derivada vale:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^\infty n a_n (z-a)^{n-1}.$$

Como el segundo miembro posee el mismo radio de convergencia que la serie de partida, se le puede aplicar el resultado de derivabilidad para, tras repetir el proceso k veces, llegar a la conclusión deseada.

Haciendo $z = a$ en la serie derivada k veces se obtiene:

$$k! a_k = f^{(k)}(a).$$

Daremos dos demostraciones de la derivabilidad de f. La primera es directa, mientras la segunda hace uso del hecho de que las series de potencias definen funciones analíticas en su disco de convergencia (ver le Teorema **??** del Capítulo III).

A) *Primera demostración.* Probamos que f es derivable en cada disco $D(a,r)$ con $0 < r < \rho$.

Poniendo $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$ demostramos que:

$$f(z) - f(z_0) - f_1(z_0)(z-z_0) = o(|z-z_0|),$$

cuando $z \to z_0$. A tal fin es útil recordar que:

$$\sum n|a|_n r^{n-1} < \infty,$$

mientras escribimos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-a)^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z-a)^n = S_N(z) + f_N(z),$$

y

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n(z-a)^{n-1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1} = S'_N(z) + f_{1,N}(z).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) - f_1(z_0)(z-z_0) &= S_N(z) - S_N(z_0) - S'_N(z_0)(z-z_0) \\ &\quad + f_N(z) - f_N(z_0) - f_{1,N}(z_0)(z-z_0) = I + II. \end{aligned}$$

Nótese que:

$$II = \sum_{N+1}^{\infty} a_n \left((z-a)^n - (z_0-a)^n - n(z_0-a)^{n-1}(z-z_0)\right)$$

$$= (z-z_0)\sum_{N+1}^{\infty} a_n \left((z-a)^{n-1} + (z-a)^{n-2}(z_0-a) + \cdots (z_0-a)^{n-1} - n(z_0-a)^{n-1}\right),$$

de donde

$$|II| \leq \left(2\sum_{N+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}\right)|z-z_0| < \frac{\varepsilon}{2}|z-z_0|,$$

para $N \geq N_\varepsilon$. Por otra parte, tomando $N = N_\varepsilon$ en I resulta:

$$|I| \leq \frac{\varepsilon}{2}|z-z_0|,$$

si $|z-z_0| < \delta$. Por tanto $|\Delta f - f_1(z_0)\Delta z| = |I + II| \leq \varepsilon|\Delta z|$ si $|\Delta z| < \delta$, donde $\Delta z = z - z_0$. Esto prueba la derivabilidad de f en z_0.

B) *Segunda demostración.* Primero comprobamos que la derivada de f en $z = a$ es a_1. En efecto,

$$f(z) = f(a) + a_1(z-z_0) + (z-a)^2\sum_{n=2}^{\infty} a_n(z-a)^{n-2}.$$

Como:

$$f_2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-2}$$

es continua en D la derivabilidad se sigue de manera inmediata.

Tomamos ahora $z_0 \in D$ y recordamos que $f(z)$ se puede representar en la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n,$$

donde la serie converge en $|z - z_0| < \rho - |z_0 - a|$, $b_0 = f(z_0)$ y

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_0 - a)^{n-1},$$

(ver el Capítulo III). Por tanto, f es derivable en z_0 y su derivada es b_1. Eso es precisamente lo que teníamos que demostrar. $\square$

Observación 4.3. *Acabamos de probar que las series de potencias se pueden derivar término a término en su círculo de convergencia tantas veces como se quiera.*

Una consecuencia directa de esta proposición es la siguiente propiedad.

Proposición 4.7. *Sea f una función analítica en un abierto $G \subset \mathbb{C}$. Entonces f es infinitamente derivable en G y para cada $z_0 \in G$, f se representa en la forma:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n. \tag{4.2}$$

La expresión (**??**) se conoce como el desarrollo de Taylor de f en z_0.

Ejemplos 4.4.

a) *La función $f(z) = e^z$ es infinitamente derivable en $\mathbb{C}$ con derivada $f'(z) = e^z$.*

b) *Las funciones $f(z) = \cos z$ y $g(z) = \sin z$ son infinitamente derivables en $\mathbb{C}$ con derivadas $f'(z) = -\operatorname{sen} z$ y $g'(z) = \cos z$.*

c) [Raíces n-ésimas]. *Sea*

$$f(z) = \sqrt[n]{|z|}\, e^{\frac{\mathrm{Arg}\ z + 2k\pi}{n} i}$$

$0 \le k \le n-1$ una rama de la raíz n-ésima y $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{x \le 0\}$. Entonces f es derivable en z_0 y

$$f'(z_0) = \frac{1}{n f(z_0)^{n-1}}.$$

En la siguiente propiedad desenterramos el "esqueleto" real de una función derivable. Si $f : G \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, es una función compleja y G un abierto entonces f define al mismo tiempo la aplicación real $f_R : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f_R(x, y) = (u, v)$. Se recuerda que una aplicación $F : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable en $(x_0, y_0) \in G$ si existe $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal tal que:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + L(x - x_0, y - y_0) + \mathcal{G}(x, y), \tag{4.3}$$

donde $\mathcal{G}(x, y) = o(r)$ cuando $r \to 0$ con $r = |(x - x_0, y - y_0)|$. Si $F = (u(x, y), v(x, y))$ la matriz de L tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Usando la notación vectorial $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$, $\bar{h} = (h_1, h_2)$ la relación (**??**) se escribe equivalentemente como:

$$F(\bar{x}_0 + \bar{h}) = F(\bar{x}_0) + L\bar{h} + o(|\bar{h}|),$$

cuando $|\bar{h}| \to 0$.

Teorema 4.8. *Sean $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$, $f_R : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_R = (u, v)$ la apliación real asociada a f.*

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) f es derivable en z_0.

2) f_R es diferenciable en (x_0, y_0) y se satisfacen las siguientes relaciones (ecuaciones de Cauchy-Riemann):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}.$$

En particular se tiene que:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Demostración. $a) \Rightarrow b)$. Si f es derivable en z_0:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z),$$

con $f'(z_0) = \alpha + i\beta$, $g = g_1 + ig_2 = o(|z - z_0|)$ cuando $z \to z_0$. Llamando $F(x, y) = f_{\mathbb{R}}(x, y) = (u, v)$, $\mathcal{G} = (g_1, g_2)$, se tiene:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \mathcal{G}(x, y),$$

y F es diferenciable en (x_0, y_0) con

$$u_x = v_y = \alpha, \qquad u_y = -v_x = -\beta.$$

$b) \Rightarrow a)$. Se tiene:

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{21} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \mathcal{G}(x,y),$$

donde $\mathcal{G}(x,y) = (g_1, g_2) = o(|(x - x_0, y - y_0)|)$ cuando $(x,y) \to (x_0, y_0)$. Llamando $\lambda = a_{11} + ia_{12}$, $g(z) = g_1 + ig_2$ tal igualdad implica:

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + g(z),$$

y f es derivable en z_0 con derivada $f'(z_0) = \lambda$. □

Observación 4.5. Si f es derivable el determinante jacobiano de f_R vale:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z_0)|^2.$$

Ejemplo 4.6. La función

$$\text{Log } z = \log r + i\theta,$$

con $r = |z|$, $\theta = \text{Arg } z$ es derivable en $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$ pues $u = \log r$ y $v = \theta$ cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Además:

$$f'(z) = (\log r)_x + i\theta_x = \frac{x}{r^2} - i\frac{y}{r^2} = \frac{1}{z}.$$

Algunas de las propiedades que siguen hacen uso de la estructura real de una función derivable f.

Proposición 4.9. *Sea $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función derivable en un dominio G tal que $f' = 0$ en G. Entonces f es constante en G.*

Proposición 4.10. *Una función derivable en un dominio G, $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que sólo toma valores reales es necesariamente constante.*

Proposición 4.11. *Para una función derivable y no constante en un abierto G, $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, se tiene que $\bar{f}$ nunca es derivable en G. Por otro lado si se define $g(z) = \bar{f}(\bar{z})$ con $z \in \overline{G} = \{z : \bar{z} \in G\}$, g sí es derivable en $\overline{G}$.*

Los siguientes resultados guardan relación con el teorema de la función inversa. El primero viene a decir que las ramas de inversa de funciones derivables son ellas mismas derivables. El segundo afirma que las funciones con derivada no nula son localmente invertibles. Según se probará en su momento, en el caso de funciones de variable compleja $f'(z_0) \neq 0$ no sólo es condición suficiente para la invertibilidad local sino que es también condición necesaria para que f sea localmente inyectiva. Esto claramente no ocurre en el caso real (ejemplo $f(x) = x^3$ en un entorno de $x = 0$).

Proposición 4.12. *Sean $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función derivable en un abierto G, (g, Ω) una rama de inversa de f, $z_0 \in G$. Si $w_0 = f(z_0)$ y $f'(z_0) \neq 0$ entonces g es derivable en w_0 y*

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Demostración. Escribimos $(w \neq w_0)$:

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)},$$

donde $z = g(w)$, $z_0 = g(w_0)$. Basta entonces tomar límites cuando $w \to w_0$ y usar la continuidad de g. $\square$

Proposición 4.13. *Sea f una función derivable en un abierto $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$, $w_0 = f(z_0)$ y $f'(z_0) \neq 0$. Existen entonces entornos abiertos U de z_0, V de w_0 tales que $f : U \to V$ es un homeomorfismo, f^{-1} es derivable en V y*

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f(z))}.$$

Demostración. Aplicando el teorema de la función inversa a f_R obtenemos la existencia de U, V y que f_R^{-1} es C^1 en V desde el punto de vista real. Como en particular f^{-1} es un homeomorfismo entonces (f^{-1}, V) define una rama de inversa de f y hemos terminado. $\square$

Observación 4.7. Puede darse una prueba usando directamente la versión real del teorema. En efecto si $\lambda = f'(z_0)$ la diferencial $D(f_R^{-1})$ puede codificarse en $\mathbb{C}$ como la aplicación lineal asociada a λ^{-1}. Esto significa, obviamente, que f_R^{-1} cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Ejemplos 4.8.

a) Si (f, Ω) es cualquier rama (determinación) del logaritmo entonces:

$$f'(z) = \frac{1}{z}. \tag{4.4}$$

b) Si (f, Ω) es una rama de inversa de la tangente (una determinación de la arcotangente) entonces

$$f'(z) = \frac{1}{1 + z^2}. \tag{4.5}$$

c) Si (f, Ω) es una rama de inversa del seno (una determinación del arcoseno) entonces:

$$f'(z) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}},$$

donde el signo depende específicamente de cada rama. Si $f(z) = \operatorname{Arcsen}(z)$, $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z^2 \geq 1\}$ el signo es "más". Sin embargo para la rama $f(z) = \pi - \operatorname{Arcsen} z$ (que toma valores en $\frac{\pi}{2} < \Re z < \frac{3\pi}{2}$) el signo es obviamente "menos". Como puede observarse por inspección directa del caso real este no es un fenómeno nuevo desde el punto de vista complejo.

d) Si (g,Ω) es una rama de inversa de $f(z)=z^n$, es decir una determinación de la raíz n-ésima y si $z_0\in\Omega$:

$$g'(z_0)=\frac{1}{ng(z_0)^{n-1}}.$$

Algunos de los cálculos precedentes nos permiten hallar los desarrollos en serie de algunas funciones. Considerando que:

$$(\text{ Log }(1+z))'=\frac{1}{1+z}=1-z+z^2+\cdots+(-1)^n z^n+\cdots,$$

es fácil concluir que:

$$\text{Log }(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}.$$

Análogamente:

$$\text{Arctag } z=z-\frac{z^3}{3}+\cdots(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

Otra cuestión que nos planteamos en el capítulo anterior fue el desarrollo en serie de potencias de la función

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^n}.$$

A estos efectos se observa que:

$$\begin{aligned}(z-a)^{-n}&=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}[(z-a)^{-1}]^{(n-1)}=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}a^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a^{-k}z^k\right]^{(n-1)}\\&=\sum_{k=n-1}^{\infty}(-1)^n a^{-(k+1)}\frac{k(k-1)\dots(k-n+2)}{(n-1)!}z^{k-n+1}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+l}}\binom{n-1+l}{n-1}z^l.\end{aligned}$$

Dejamos al lector la tarea de encontrar los dominios de convergencia de las series implicadas.

4.2. Funciones armónicas

Supongamos que $f(z)=u+iv$ es derivable en un abierto $G\subset\mathbb{C}$. Entonces u,v admiten derivadas parciales de primer orden en Ω las cuales satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x=v_y \qquad\qquad u_y=-v_x.$$

Si se satisface además[1] que u y v admiten derivadas parciales de segundo orden en G entonces

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

El grupo $u_{xx} + u_{yy}$ se representa como Δu y se llama el laplaciano de u. La ecuación $\Delta u = 0$ es la ecuación de Laplace.

Definición 4.14. *Se dice que una función $u \in C^2(G)$ es armónica en G si*

$$\Delta u = 0,$$

en G.

Suponiendo que se es capaz de fabricar funciones armónicas u en un dominio G la pregunta natural es saber si existe otra función armónica v tal que $f(z) = u + iv$ es derivable en G, es decir, de suerte que u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Definición 4.15. *Si $u \in C^2(G)$ es armónica se dice que $v \in C^2(G)$ es armónica conjugada de v si $f(z) = u + iv$ es derivable en G.*

Teorema 4.16. *Sea G un abierto convexo, en particular $\mathbb{C}$ ó $D(a, r)$ para $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Si $u \in C^2(G)$ es armónica en G entonces existe una función armónica conjugada $v \in C^2(G)$. Además, todas las posibles funciones armónicas conjugadas de u en G difieren en una constante.*

Demostración. Consideramos el caso G convexo donde suponemos sin pérdida de generalidad que $0 \in \Gamma$. Para u dato hemos de resolver en v las ecuaciones:

$$v_x = P, \qquad v_y = Q,$$

donde $P = -u_y$, $Q = u_x$. Al ser u armónica la forma $\omega = Pdx + Qdy$ es cerrada y el lema de Poincaré ([**?**]) implica que $\omega = dv$ para alguna v que se comprueba inmediatamente que es armónica. En este caso resulta inmediato reproducir el argumento del lema de Poincaré, cosa que hacemos por completitud. Nótese que sólo usamos el hecho de que G es estrellado con respecto a $z = 0$. Definimos:

$$v(x, y) = \int_0^1 \{xP(tx, ty) + yQ(tx, ty)\}\ dt = \int_\Gamma P\ dx + Q\ dy,$$

$\Gamma = [0, z]$. Comprobamos que $v_x = P(x, y)$, en efecto:

$$\begin{aligned} v_x = \int_0^1 \{P(tx, ty) + xtP_x(tx, ty) + ytQ_x(tx, ty)\} \\ = \int_0^1 \{P(tx, ty) + t\frac{d}{dt}(P(tx, ty))\}\ dt \\ = \int_0^1 P(tx, ty)\ dt + P(x, y) - \int_0^1 P(tx, ty)\ dt \\ = P(x, y). \end{aligned}$$

Se prueba igualmente que $v_y = Q(x, y)$. □

[1] Es consecuencia de los resultados del capítulo siguiente que la mera deivabilidad de f ya implica que u, v son de clase C^∞ así que esta condición se cumple siempre.

Observación 4.9.

a) Una vez asegurado que $\omega = dv$, v puede definirse alternativamente como $v(z) = \int_{\Gamma(z_0,z)} Pdx + Qdy$ donde Γ es cualquier curva C^1 a trozos que conecta z_0 con z.

b) La construcción práctica de v procede como sigue. Primero integrar, por ejemplo en x para tener:

$$v(x,y) = \varphi(y) + \int_{x_0}^{x} P(t,y)\ ds.$$

Después derivar en y para, usando $P_y = Q_x$, concluir $\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)\ ds$. Se puede empezar integrando en y para llegar, gracias a a), al mismo resultado.

Ejemplo 4.10. *Hallar las funciones enteras f cuya parte real es $u = x^3 - 3xy$.*

La función $v = \Im f$ ha de cumplir:

$$\begin{aligned} v_x &= -u_y = 6xy \\ v_y &= \ \ u_x = 3x^2 - 3y^2, \end{aligned}$$

de donde, integrando la primera ecuación en x resulta:

$$v = 3x^2y + \varphi(y),$$

derivando con respecto a y y usando la segunda ecuación:

$$\varphi'(y) + 3x^2 = 3x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -y^3 + C \quad \Rightarrow v = 3x^2y - y^3 + C.$$

Por tanto las funciones buscadas son:

$$f(z) = z^3 + C,$$

con C una constante compleja.

4.3. Apéndice: diferenciabilidad de funciones de varias variables complejas

Supongamos que $f : G \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, G abierto de $\mathbb{C}^n$, es una función compleja, $f(z) = (f_k(z)) = (f_1(z), \ldots, f_m(z))$, $z = (z_j) = (z_1, \ldots, z_n)$. Se dice que f es derivable en z_0 si existe $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ $\mathbb{C}$-lineal tal que:

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + L(h) + g(h),$$

donde $g(h) = o(|h|)$ cuando $h \to 0$ en $\mathbb{C}^n$.

La función f induce una aplicación real:

$$f_R : \mathbb{R}^2 \times \overset{n)}{\cdots} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times \overset{m)}{\cdots} \times \mathbb{R}^2,$$

donde $f_R(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = (u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m)$, las u_k, v_k son funciones reales de $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ y se tiene que $f_k(z) = u_k(z) + iv_k(z)$ con $z = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$.

Con una demostración enteramente similar a la del Teorema **??** se establece sin esfuerzo el siguiente resultado.

Teorema 4.17. *Sea $f : G \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, G abierto, $z_0 \in G$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) f es diferenciable en z_0.

b) f_R es diferenciable –en sentido real– en z_0 y además (ecuaciones de Cauchy-Riemann):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_k}{\partial x_j} = \dfrac{\partial v_k}{\partial y_j} \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial y_j} = -\dfrac{\partial v_k}{\partial x_j} \end{cases}$$

para $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$.

CAPÍTULO 5

Integración compleja

5.1. Integral de Riemann compleja

Para su uso inmediato llamamos partición $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a,b]$ a toda sucesión de valores reales $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Designamos por $\mathcal{P}$ al conjunto de tales particiones. Para una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $P \in \mathcal{P}$ una suma de Riemann asociada consiste en la expresión:

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta t_i,$$

donde $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Definición 5.1. *Una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ es Riemann integrable (R-integrable) si existe $\zeta \in \mathbb{C}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}$ cumpliéndose:*

$$|s(P) - \zeta| < \varepsilon$$

para toda $P \in \mathcal{P}$, $P \supset P_\varepsilon$. Denotamos $\mathcal{R}[a,b]$ el conjunto de las funciones Riemann-integrables en $[a,b]$. Es costumbre asimismo escribir

$$\zeta = \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f = \int_I f,$$

donde $I = [a,b]$.

Proposición 5.2. *Una función acotada $f \in \mathcal{R}[a,b]$ si sólo si $\Re f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\Im f \in \mathcal{R}[a,b]$ y se cumple:*

$$\int_a^b f = \int_a^b \Re f + i \int_a^b \Im f.$$

Observación 5.1. *Una definición equivalente de función compleja $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ Riemann-integrable consiste en pedir que f_1 y f_2 sean Riemann-integrables.*

Se incluye a continuación una relación de propiedades básicas de la integral de Riemann. Remitimos al lector a la referencia [3].

Proposición 5.3 (Linealidad). *Sean $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Entonces $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}[a,b]$ y*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Proposición 5.4 (Aditividad en el intervalo de integración). *Sea f una función acotada en $[a,b]$ y $a < c < b$.*

a) Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ entonces $f \in \mathcal{R}[a,c]$, $f \in \mathcal{R}[c,b]$ y:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

b) Si $f \in \mathcal{R}[a,c]$ y $f \in \mathcal{R}[c,b]$ entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y se tiene la identidad precedente.

Para uso posterior adoptamos los convenios:

$$\int_a^a f = 0, \qquad \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Una definición relevante para lo que sigue es la siguiente.

Definición 5.5 (C^1 a trozos). *Se dice que una función $\alpha : [c,d] \to \mathbb{C}$ es C^1 a trozos si o bien es C^1 en $[c,d]$ o bien α es continua en $[c,d]$ y existe una partición P de $[c,d]$ tal que α es derivable con continuidad en cada intervalo (t_{k-1}, t_k) por separado, existiendo los límites laterales $\alpha'(t_k\pm)$ en cada uno de los puntos t_k ($\alpha'(a+)$ en t_0, $\alpha'(b-)$ en t_n).*

Observación 5.2. *Está implícita en la definición la existencia de las derivadas laterales de α en cada t_k coincidiendo tales derivadas con los límites laterales $\alpha'(t_k\pm)$.*

Proposición 5.6 (Cambio de variable). *Sean $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ monótona, C^1 a trozos, $\alpha([c,d]) = [a,b]$. Entonces $f \circ \alpha \in \mathcal{R}[c,d]$ y*

$$\int_{\alpha(c)}^{\alpha(d)} f(t)\, dt = \int_c^d f(\alpha(s))\alpha'(s)\, ds.$$

El siguiente resultado importante caracteriza la integrabilidad Riemann de las funciones acotadas.

Teorema 5.7 (Lebesgue). *Sea f acotada en $[a,b]$ y*

$$D = \{t \in [a,b] : f \textit{ no es continua en } t\}.$$

Entonces f es integrable Riemann en $[a,b]$ si y sólo si D es un conjunto con medida de Lebesgue cero.

Observación 5.3. *Nótese que los conjuntos numerables (sucesiones, pongamos por caso) son ejemplos de conjuntos con medida de Lebesgue cero.*

Proposición 5.8 (Valor absoluto)**.** *Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ entonces $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ y se tiene:*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Demostración. La integrabilidad se sigue de que el conjunto donde $|f|$ es discontinua es menor que aquél donde lo es f.

Merece la pena probar la estimación de $|\int_a^b f|$ usando el curioso argumento de [4]. Escribiendo:

$$\int_a^b f = Re^{i\theta},$$

$e^{-i\theta} f = g = g_1 + ig_2$ resulta:

$$\left| \int_a^b f \right| = R = \int_a^b g = \int_a^b g_1 \leq \int_a^b |g| = \int_a^b |f|.$$

□

El resultado siguiente se conoce como teorema fundamental del cálculo.

Teorema 5.9 (Teorema fundamental del cálculo)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces:*

1) Si para cada $t \in [a,b]$ ponemos,

$$F(t) = \int_a^t f(s)\ ds,$$

entonces F es derivable en $[a,b]$ con $F'(t) = f(t)$.

2) Si f es C^1 a trozos en $[a,b]$ entonces:

$$\int_{t_0}^{t_1} f' = f(t_1) - f(t_0),$$

para $t_0, t_1 \in [a,b]$ arbitrarios.

Una consecuencia importante es la siguiente propiedad.

Proposición 5.10. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de clase C^1 a trozos y $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable con derivada continua en un abierto G. Si $\gamma(t) \in G$ para todo t entonces:*

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt.$$

5.2. Integrales complejas

Una aplicación C^1 a trozos $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t se denomina una *parametrización* C^1 (omitiremos con frecuencia el calificativo "a trozos" para abreviar).

Dos parametrizaciones C^1, $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, se dicen equivalentes y escribiremos $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si existe una transformación (cambio de parámetro) C^1 $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ tal que $\varphi'(s) > 0$ y $\gamma_1(s) = \gamma_2(\varphi(s))$ para todo $s \in [a_1, b_1]$.

Llamamos curva *orientada* C^1 a una parametrización γ y todas sus parametrizaciones equivalentes. Más formalmente, la relación "$\gamma_1 \sim \gamma_2$" es de equivalencia entre las parametrizaciones y así una curva consiste en una clase de equivalencia. Si $z_0 = \gamma(a), z_1 = \gamma(b)$ decimos que γ es una "curva de z_0 hasta z_1" dando a entender que estamos recorriéndola en un sentido preciso. Con frecuencia identificaremos la curva γ con su órbita $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma(t),\ t \in [a,b]\}$, teniendo presente que en cálculos de integrales hay que asignarle "un sentido" a su recorrido.

Dada una curva orientada $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ su opuesta $-\gamma$ es la definida por la parametrización $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t)$ con dominio $[a_1, b_1] = [-b, -a]$. Si γ va de z_0 a z_1 entonces $-\gamma$ va de z_1 a z_0.

Suma de curvas. Dadas dos curvas orientadas con sendas parametrizaciones $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}, i = 1, 2$, se define la curva suma $\gamma_1 + \gamma_2$ mediante la parametrización $\gamma : [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & a_1 \leq t \leq b_1 \\ \gamma_2(a_2 + (t - b_1)) & b_1 < t \leq b_1 + (b_2 - a_2). \end{cases}$$

Esto significa que primero recorremos γ_1 y a continuación recorremos γ_2. La operación "suma de curvas" se introduce pensando en la integración compleja y por tanto no es necesario que $\gamma_1 + \gamma_2$ sea de nuevo una parametrización. No obstante y por claridad de ideas asumiremos por el momento que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. En este caso, $\gamma_1 + \gamma_2$ sí parametriza una curva C^1.

Curvas cerradas orientadas son aquellas que corresponden a parametrizaciones $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tales que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Si γ es una curva cerrada y $n \in \mathbb{N}$ escribiremos

$$n\gamma = \gamma + \overset{n)}{\cdots} + \gamma,$$

que equivale a recorrer n veces γ en el mismo sentido. Si $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, entonces $n\gamma$ se parametriza por $\psi(t) = e^{2\pi i t}$ con t ahora recorriendo el intervalo $[0,n]$. Análogamente $-n\gamma = n(-\gamma)$. En el ejemplo anterior $-\gamma(t) = e^{-2\pi i t}$, $t \in [-1, 0]$, aunque puede darse por una parametrización equivalente tomando $t \in [0,1]$. En este sentido $-n\gamma$ se parametriza por $\psi(t) = e^{-2\pi i t}$, $t \in [0,n]$.

Curvas de Jordan. Una curva cerrada continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tal que γ es inyectiva en $[a,b)$ se llama una curva (orientada) de Jordan. Si también representamos por γ su órbita $\{z = \gamma(t) : t \in [a,b]\}$ está claro que $\mathbb{C} \setminus \gamma$ posee una componente conexa no acotada. Esto es cierto para todas las curvas cerradas γ y la llamaremos la "componente exterior" $\mathcal{C}_e$ de γ. Además las restantes posibles componentes de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ han de ser acotadas. En el caso de curvas de Jordan γ se demuestra –y no es tarea sencilla– que $\mathbb{C}\setminus\gamma$ posee exactamente dos componentes cuya frontera común es γ, la componente exterior $\mathcal{C}_e$ y otra componente que en este caso se denomina la componente "interior" $\mathcal{C}_i$ de γ. Tal es el contenido del célebre teorema de la curva de Jordan (véanse [3], [19], [8]).

Definición 5.11. *Dada una parametrización C^1 a trozos*[1] *se define la variación total de γ:*

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \ dt.$$

Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ son parametrizaciones equivalentes $V(\gamma_1) = V(\gamma_2)$ (se deja como ejercicio). Tal cantidad se denomina la *longitud de arco* $\Lambda(\gamma)$ de la curva γ que definen.

Definición 5.12. *Si γ es una curva C^1 en un abierto $G \subset \mathbb{C}$ y $f : G \to \mathbb{C}$ es continua se define la integral (de línea) compleja de f sobre γ como:*

$$\int_\gamma f(z) \ dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \ dt.$$

Definimos asimismo:

$$\int_\gamma f(z) \ |dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)| \ dt.$$

Ejemplos 5.4.

1. $\int_\gamma \dfrac{dz}{z} = 2\pi i$, $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. $\int_\gamma \dfrac{dz}{z^n} = 0$, $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $n \geq 2$.

3. $\int_\gamma z^n \ dz = \dfrac{1}{n+1}[b^{n+1} - a^{n+1}]$, $\gamma = [a, b]$.

Proposición 5.13. *Consideremos f y g en las condiciones de la Definición 5.12. Entonces:*

1. *$\int_\gamma f$ no depende de la parametrización.*

2. $\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$.

3. $|\int f \ dz| \leq \int_\gamma |f| \ |dz| \leq \sup_\gamma |f| V(\gamma)$.

4. *Si γ_1, γ_2 son parametrizaciones C^1 en G y $\gamma_1 + \gamma_2$ es una parametrización C^1:*

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

[1] En lo que sigue sobrentendemos el calificativo a trozos.

Definición 5.14. *Una función continua $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida en un abierto $G \subset \mathbb{C}$, admite una primitiva si existe una función derivable F en G tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in G$.*

Proposición 5.15. *Si f admite una primitiva F en un abierto G y $\gamma \subset G$ es C^1 entonces:*

$$\int_\gamma f \ dz = F(z_1) - F(z_0),$$

donde $z_0 = \gamma(a), z_1 = \gamma(b)$. En particular, la integral es cero si γ es cerrada.

Observación 5.5. En $\mathbb{R}$ las funciones continuas siempre admiten una primitiva. Esto no es cierto en el caso complejo. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, sin embargo no admite primitiva alguna pues:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

donde $\gamma(s) = e^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$.

5.3. El teorema de Cauchy en círculos: consecuencias

Empezamos con un resultado auxiliar

Teorema 5.16. *Sea:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (s,t) & \longmapsto & \varphi(s,t) \end{array}$$

una aplicación continua tal que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ también es continua en $[a,b] \times [c,d]$. Entonces:

$$g(t) = \int_a^b \varphi(s,t) \ ds,$$

es derivable en $[c,d]$ con derivada,

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) \ ds.$$

Lema 5.17. *Sea $\gamma = \partial D(a,r)$ parametrizado por $\gamma(s) = a + re^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$. Entonces:*

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i,$$

para todo $z \in D(a,r)$.

Demostración. Probaremos más adelante que la integral no depende de $z \in D(a,r)$ (Teorema 5.37) y por tanto su valor ha de ser $2\pi i$, el que corresponde a $z = a$. No obstante deduciremos el resultado usando el Lema 5.16 y un argumento de continuidad.

Para $t \in [0,1]$ ponemos:

$$g(t) = \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a - t(z-a)}$$

que es continua y derivable en $[0,1]$ con derivada:

$$g'(t) = (z-a)\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - a - t(z-a))^2} = (z-a)\int_{\hat\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta^2},$$

con $\hat\gamma$ la curva cerrada $\hat\gamma(s) = re^{is} - t(z-a)$, $s \in [0, 2\pi]$. Por tanto $g'(t) = 0$, así $g(1) = g(0)$ y $g(0) = 2\pi i$. □

Observación 5.6. En el Ejercicio 15 se plantea otra demostración directa del lema precedente.

El resultado crucial es el que sigue.

Teorema 5.18 (Fórmula de Cauchy en círculos)**.** *Sea $f : G \to \mathbb{C}$ derivable con derivada continua*[2]*. Si $\overline{D(a,r)} \subset G$, $\gamma(s) = a + re^{is}$, $t \in [0,2\pi]$ parametriza $\partial D(a,r)$ entonces f se puede representar en la forma:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{5.1}$$

para $z \in D(a,r)$.

Demostración. En virtud del lema previo, hemos de probar que:

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Para $t \in [0,1]$ definimos:

$$g(t) = \int_\gamma \frac{f(t(\zeta - z) + z) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

que es continua y derivable en $[0,1]$ con:

$$g'(t) = \int_\gamma f'(t(\zeta - z) + z)\, d\zeta = \frac{1}{t}\int_{\hat\gamma} f'(\zeta_1)\, d\zeta_1,$$

donde $\hat\gamma(s) = z + t(\gamma(s) - z)$, $\gamma(s) = re^{is} + a$, define una curva cerrada. Por tanto $g'(t) = 0$. Ello significa que $g(0) = g(1) = 0$. □

[2]Esta hipótesis es innecesaria en virtud del teorema de Goursat (Teorema 5.51).

Lema 5.19. *Sea $\gamma \subset G$ una curva C^1 a trozos en un abierto $G \subset \mathbb{C}$ y f_n una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a f sobre g. Entonces:*

$$\lim \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

El siguiente teorema establece que las funciones derivables con continuidad son analíticas, en particular C^∞.

Teorema 5.20. *Sea $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, G abierto, una función derivable con derivada continua, mientras $D(a,r) \subset G$. Entonces:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{5.2}$$

para $z \in D(a,r)$ siendo la serie absolutamente convergente. Por tanto, f es analítica en G y (5.2) es el desarrollo de Taylor de f:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia los coeficientes a_n no dependen del radio r del disco $D(a,r)$. Más aún:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^{(n+1)}}\, dz \tag{5.3}$$

para cualquier $0 < R < r$ donde $|z-a| = R$ se recorre en sentido positivo.

Observación 5.7. Las identidades (5.1) y (5.3) se conocen como las fórmulas de Cauchy. Más adelante se extienden a curvas cerradas muchos más generales que la circunferencia.

Corolario 5.21. *Sea $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función derivable con derivada continua en un abierto $G \subset \mathbb{C}$, $a \in G$ y $\rho_0 = dist(a, \partial G)$. Entonces la serie de Taylor (5.2) de f en a tiene radio de convergencia $\rho \geq \rho_0$.*

Ejemplo 5.8. La función $f(z) = \text{Log}\,(1+z)$ es derivable en $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ con derivada continua. La serie de Taylor de f en $z = z_0 \in G$ es:

$$g(z) = \text{Log}\,(1+z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1+z_0)^{-n} (z-z_0)^n,$$

cuyo radio de convergencia es exactamente $|z_0+1|$. Sin embargo, para $\Re z_0 < -1$ la distancia de z_0 a la frontera de G es exactamente $|\Im z_0|$ que es estrictamente menor que $|z_0+1|$. Así pues $f(z)$ coincide con su serie de Taylor en $|z-z_0| < |\Im z_0|$ aunque ésta última converja en una región mayor.

Una cuestión planteada y resuelta "ad hoc" en el Capítulo III se vuelve a establecer ahora de manera más directa.

Corolario 5.22. *Si $f(z)$ es la suma de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$ en su disco de convergencia $D(b,\rho)$ entonces f es analítica en $D(b,\rho)$.*

Corolario 5.23. *Si f es derivable en $\mathbb{C}$ con derivada continua entonces:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

para $z \in \mathbb{C}$. En particular el radio de convergencia de la serie es $r = \infty$ y f es una función entera (Capítulo III).

Teorema 5.24 (Teorema de Cauchy en un círculo)**.** *Sea f derivable en un círculo $D(a,r)$ con derivada continua en $D(a,r)$. Si γ es una curva cerrada y C^1 a trozos en $D(a,r)$ se tiene que*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Corolario 5.25 (Estimaciones de Cauchy)**.** *Sea f una función derivable con derivada continua en un abierto $G \subset \mathbb{C}$. Si $D(a,R) \subset G$ y $M = \sup_{D(a,R)} |f|$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

Teorema 5.26 (Teorema de Liouville)**.** *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es entera y acotada entonces f es constante.*

Demostración. Sea $M = \sup |f|$ y $R > 0$ arbitrario. En virtud del Corolario 5.25 se tiene para $z \in \mathbb{C}$ fijado

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

Por tanto $f'(z) = 0$ y f es constante. □

El teorema de Liouville proporciona una prueba directa del Teorema Fundamental del Álgebra (véase el Capítulo II).

Corolario 5.27. *Si $p(z)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ entonces existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $p(a) = 0$.*

Demostración. Si fuese $p(z) \neq 0$ para todo z entonces $\dfrac{1}{p(z)}$ sería entera y acotada lo cual no es posible. □

5.4. Teoremas de Morera y de Goursat

Dados tres puntos $\{z_0, z_1, z_2\}$ el triángulo orientado T de vértices $\{z_0, z_1, z_2\}$ (cf. [23]), dados en ese orden, se define como la envolvente convexa de $\{z_0, z_1, z_2\}$:

$$T = \mathrm{Co}(\{z_0, z_1, z_2\}) = \{t_0 z_0 + t_1 z_1 + t_2 z_2 : t_j \in [0,1],\ t_0 + t_1 + t_2 = 1\}$$

El interior de T es:

$$\overset{\circ}{T} = \{t_0 z_0 + t_1 z_1 + t_2 z_2 : t_j \in (0,1),\ t_0 + t_1 + t_2 = 1\}$$

mientras su frontera es la "traza" de la poligonal $\gamma = [z_0, z_1, z_2, z_0]$ que se denomina ∂T. Nótese que se ha tomado una orientación en la frontera. Si f es continua en T entonces:

$$\int_{\partial T} f(z)\ dz = \int_{[z_0,z_1]} f(z)\ dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\ dz + \int_{[z_2,z_0]} f(z)\ dz.$$

Teorema 5.28 (Teorema de Morera)**.** *Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función continua en un abierto $G \subset \mathbb{C}$ con la propiedad de que:*

$$\int_{\partial T} f(z)\ dz = 0,$$

sobre todo triángulo $T \subset G$. Entonces f es holomorfa en G y su derivada f' es continua en G.

Demostración. Es suficiente con demostrar el teorema en cada disco $D(a,r) \subset G$. En un tal disco definimos

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\ d\zeta.$$

La función F es derivable en $D(a,r)$ y su derivada en $D(a,r)$ es f. Por tanto F es de clase C^∞ y $f = F'$ es derivable con continuidad en $D(a,r)$. □

Una consecuencia importante es el siguiente resultado.

Teorema 5.29 (Teorema de Goursat)**.** *Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función derivable en G. Entonces la derivada f' es una función continua en G.*

Demostración. Se reduce a demostrar que se satisfacen las condiciones del Teorema de Morera en cada disco $D(a,r) \subset G$ (cf. [7]). □

5.5. Ceros de las funciones holomorfas

Definición 5.30. *Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función derivable en una abierto $G \subset \mathbb{C}$. Se dice que $z = a$ de G es un cero de orden m de f si*

$$f(z) = (z-a)^m g(z),$$

donde g es derivable en G y $g(a) \neq 0$.

Observación 5.8. *Véase más abajo el Corolario 5.33 para una caracterización más razonable de los ceros de una función derivable.*

Teorema 5.31. *Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función derivable en un dominio $G \subset \mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $f \equiv 0$.

2. Existe $a \in G$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. El conjunto $\{z : f(z) = 0\}$ posee un punto de acumulación en G.

Corolario 5.32 (Principio de Prolongación Analítica)**.** *Sean f y g son dos funciones complejas derivables en un dominio $G \subset \mathbb{C}$. Si el conjunto:*

$$\{z \in G : f(z) = g(z)\}$$

admite un punto de acumulación en $\mathbb{C}$ entonces $f = g$ en G.

El resultado precedente asegura que la estructura de una función derivable en un dominio G queda estrictamente controlada por sus valores en un conjunto muy pequeño. En otras palabras, no hay sino una única manera de extender una función derivable desde un pequeño conjunto (v.g. una bola) hasta un dominio G que la contenga. Por esta razón se denomina "holomorfas" a las funciones derivables. El término procede de los vocablos griegos "holos" (todo, total) y "morphos" (forma) y viene a querer decir "de una pieza". Fue introducido por los matemáticos franceses Ch. Briot y J. C. Bouquet.

En lo que sigue usaremos ese apelativo para referirnos a las funciones derivables y por $H(G)$ denotaremos el conjunto de las funciones holomorfas en un abierto $G \subset \mathbb{C}$.

Corolario 5.33. *Sea $f \in H(G)$. El punto $z = a$ es un cero de orden m si y sólo si*

$$f^{(k)}(a) = 0 \qquad k = 0, \ldots, m-1, \qquad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Corolario 5.34. *Los ceros de una función holomorfa no nula son siempre ceros de orden m para algún $m \in \mathbb{N}$. En particular tales ceros son siempre aislados.*

5.6. Principio del módulo máximo

El siguiente resultado es de suma importancia especialmente en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales donde se le conoce como el principio del máximo ([14]).

Teorema 5.35. *Sea $f \in H(G)$ donde G es un dominio. Si existe $a \in G$ tal que $|f(z)| \leq |f(a)|$ para todo $z \in G$ entonces f es constante en G.*

La demostración se basa en la siguiente propiedad descubierta originalmente por Gauss en sus trabajos en teoría del potencial.

Teorema 5.36 (Propiedad de la Media)**.** *Sea $f \in H(G)$ y $\overline{D(a,r)} \subset G$. Entonces:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\ dt.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de la fórmula de Cauchy. □

Demostración del Teorema 5.35. Se define:

$$\mathcal{M} = \{z \in G : |f(z)| = M\}.$$

con $M = |f(a)|$. $\mathcal{M}$ es cerrado y no vacío. Como consecuencia de la propiedad de la media también es abierto y así $\mathcal{M} = G$. □

Como aplicación del teorema se obtiene una prueba del teorema fundamental del álgebra (véanse los ejercicios).

5.7. Índice de una curva

Sea $\gamma_1(t) = a + re^{2\pi ti}$, $t \in [0,n]$. La parametrización recorre n veces la circunferencia en sentido positivo alrededor de a, mientras $\gamma_2(t) = a + re^{-2\pi ti}$, $t \in [0,n]$, efectúa la misma operación pero en sentido negativo.

Nótese que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-a} = n \qquad\qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-a} = -n.$$

A fin de generalizar esta observación se tiene en primer lugar.

Proposición 5.37. *Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva C^1 a trozos y $a \notin \gamma$. Entonces la integral:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} \tag{5.4}$$

siempre toma valores enteros.

Definición 5.38. *El índice $n(\gamma, a)$ de una curva γ con respecto a un punto $a \notin \gamma$ se define como el valor de la integral* (5.4)*. También se conoce como número de vueltas de γ en torno al punto a.*

Observación 5.9*.* Puede probarse que –como en el caso del ejemplo preliminar– $n(\gamma, a)$ describe el número neto de circunvoluciones que efectúa γ alrededor de a (cf. [19]).

Las siguientes propiedades ayudan a "digerir" el concepo.

Proposición 5.39. *Sean γ_1, γ_2 curvas cerradas de clase C^1 a trozos.*

1. $n(-\gamma_1, a) = -n(\gamma_1, a)$.

2. Si γ_1 y γ_2 comparten un punto[3] *y por tanto $\gamma_1 + \gamma_2$ es de nuevo una curva cerrada, entonces:*

$$n(\gamma_1 + \gamma_2, a) = n(\gamma_1, a) + n(\gamma_2, a).$$

Si γ es una curva cerrada $\mathbb{C} \setminus \gamma$ posee a lo más una cantidad numerable de componentes $\mathcal{C}$ y sólo una de ellas es no acotada, la que designamos como la componente exterior $\mathcal{C}_e$ de γ.

Teorema 5.40. *Si γ es una curva cerrada C^1 a trozos, $n(\gamma, z)$ es constante sobre las componentes $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Además $n(\gamma, z)$ se anula sobre la componente $\mathcal{C}_e$.*

El siguiente resultado no es precisamente de los de demostración sencilla ([19]) salvo que se empleen herramientas adecuadas como el grado topológico (cf. [24]).

Teorema 5.41. *Si γ es una curva de Jordan C^1 entonces $n(\gamma, z) = \pm 1$ en la componente interior de γ.*

Como en el caso de $\gamma_1(t) = a + re^{it}$, $\gamma_2(t) = a + re^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$, las curvas de Jordan se clasifican en positivas o negativas de acuerdo con el signo de $n(\gamma, z)$ en la componente interior.

Comprobaremos que $n(\gamma, z)$ es invariante frente a homotopías siempre que el proceso de deformación no atraviese el punto z (cf. Sección 5.9. Esto contribuirá enormemente a conocer el índice de gran cantidad de curvas sencillas. Por ejemplo, todas las curvas poligonales convexas que se describen a favor de las agujas del reloj tienen índice 1 (medido desde la componente interior).

No obstante la siguiente versión más débil es lo suficiente versátil como para abarcar la mayoría de los ejemplos que consideramos.

Proposición 5.42. *Sean $\gamma_i : I \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, curvas cerradas C^1 definidas en $I = [0, 1]$, $\gamma_i(0) = \gamma_i(1)$, $i = 1, 2$. Supongamos que existe $\Gamma : I \times I \to \mathbb{C}$ continua con $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial s}$ continua tal que:*

a) $\Gamma(s, 0) = \gamma_1(s)$, $\Gamma(s, 1) = \gamma_2(s)$, $s \in I$.

b) $\Gamma(0, t) = \Gamma(1, t)$, $t \in I$.

Si $z \notin \Gamma(I \times I)$ entonces:

$$n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z).$$

Típicamente γ_1 es una curva de Jordan dentro de otra curva de Jordan γ_2 y es posible definir Γ como

$$\Gamma(s, t) = \gamma_1(s) + t(\gamma_2(s) - \gamma_1(s)).$$

Por este procedimiento se "ve" que las curvas γ_1 y γ_2 de la figura 5.1 tienen índices $+1$ y -1. La curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Se calculan así los índices de las diferentes componentes de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

[3] Esto no es imprescindible porque la integral de línea se puede definir de forma tal que sea aditiva en las curvas γ aunque no se corten entre sí.

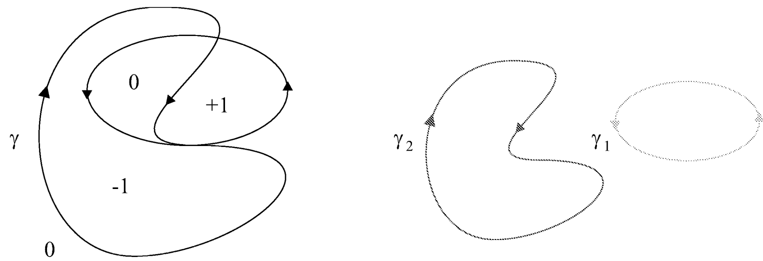

Figura 5.1: La curva γ es suma de γ_1 y γ_2. Obsérvense los distintos índices de las componentes.

5.8. Teorema de Cauchy: versión homológica

En ésta y la próxima sección tratamos de la cuestión siguiente. Si f es una función holomorfa $f \in H(G)$ ¿será cierto que:

$$\int_\gamma f = 0 \tag{5.5}$$

para γ una curva cerrada de clase C^1 en G? Análogamente ¿será cierto que:

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_g \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{5.6}$$

para todo $z \in G \setminus \gamma$?

Se ha respondido afirmativamente en el caso de la bola $D(a,r)$. Sin embargo, la geometría del dominio G (presencia de "agujeros") y la posición relativa de γ dentro de G son importantes. En efecto $1/z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sin embargo $\int_\gamma 1/z = 2\pi i$, $\gamma = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

En esta sección nos ocupamos del siguiente problema: dada una curva cerrada γ en un abierto G ¿qué condiciones debe cumplir para que se satisfagan las relaciones (5.5), (5.6) cualquiera que sea la función holomorfa $f \in H(G)$?

Introducimos la siguiente definición.

Definición 5.43. *Se dice que una curva cerrada y C^1 a trozos $\gamma \subset G$, $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, es homóloga a cero en G y escribimos $\gamma \approx 0$ si se tiene que:*

$$n(\gamma, z) = 0,$$

para todo $z \notin G$.

Observación 5.10. *Si γ hace válidas las propiedades* (5.5), (5.6) *para funciones holomorfas en G arbitrarias, entonces $\gamma \approx 0$. En efecto, basta tomar $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ con $a \notin G$ para concluir que γ tiene que ser homóloga a cero.*

El mejor ejemplo se da en la siguiente propiedad.

5.9. Teorema de Cauchy: versión homotópica

Los resultados de la siguiente sección se establecen de forma que su contenido sea totalmente independiente de la anterior. La única excepcción es el Corolario 5.59 que no se emplea en el desarrollo de la sección.

Definición 5.52. *Sean $\gamma_i : I \to \mathbb{C}$, $I = [0,1]$, $i = 0,1$, dos curvas cerradas C^1 a trozos en un abierto $G \subset \mathbb{C}$. Se dice que γ_0 y γ_1 son homotópias en G y se escribe $\gamma_0 \sim \gamma_1$ (en G) si existe una aplicación $H : I \times I \to \mathbb{C}$, $H = H(s,t)$ (una homotopía) con las siguientes propiedades:*

a) *H es continua.*

b) *$H(s,0) = \gamma_0(s)$, $H(s,1) = \gamma_1(s)$, $s \in I$.*

c) *$H(0,t) = H(1,t)$, $t \in I$.*

d) *$H(I \times I) \subset G$*

Observación 5.11. La definición de curvas cerradas homotópicas se extiende sin cambio alguno al contexto de curvas cerradas meramente continuas. Por su interés también presentamos la noción para arcos de curva C^1 no necesariamente cerradas.

Definición 5.53. *Sean $\gamma_i : I \to \mathbb{C}$, $I = [0,1]$, $i = 0,1$, dos curvas C^1 a trozos en un abierto $G \subset \mathbb{C}$ con los mismos extremos z_0, z_1, es decir, tales que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$ y $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$. Se dice que γ_0 y γ_1 son homotópias en G y se escribe $\gamma_0 \sim \gamma_1$ (en G) si existe una aplicación $H : I \times I \to \mathbb{C}$, $H = H(s,t)$ (una homotopía) con las siguientes propiedades:*

a) *H es continua.*

b) *$H(s,0) = \gamma_0(s)$, $H(s,1) = \gamma_1(s)$, $s \in I$.*

c) *$H(0,t) = z_0$ y $H(1,t) = z_1$ para todo $t \in I$.*

d) *$H(I \times I) \subset G$*

Definición 5.54. *Se dice que una curva cerrada C^1 a trozos (respectivamente, continua) γ en un abierto $G \subset \mathbb{C}$ es homotópica a cero en G y se escribe $\gamma \sim 0$ (en G) si $\gamma \sim \gamma_0$ donde γ_0 es una curva cerrada constante, es decir $\gamma_0(s) = z_0 \in G$ para todo $s \in I$. Un dominio G se dice* simplemente conexo *si toda curva continua y cerrada en G es homotópica a cero en G.*

Ejemplo 5.12. Si G es un abierto convexo o un abierto estrellado con respecto a un cierto punto $a \in G$ entonces todas las curvas cerradas γ de G son homotópicas a cero en G y por tanto G es simplemente conexo.

Ejemplo 5.13. Resulta claro, al menos intuitivamente, que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo (ver Observación 5.14).

Podemos enunciar ya la versión homotópica del Teorema de Cauchy.

Teorema 5.55 (Teorema de Cauchy). *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f \in H(G)$ y γ una curva cerrada C^1 a trozos en G. Si $\gamma \sim 0$ en G entonces:*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0.$$

Observación 5.14. $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo: $f = 1/z$ es holomorfa en G mientras que $\int_\gamma f = 2\pi i$ con $\gamma = \partial D$ (orientada positivamente).

El teorema es consecuencia del resultado más general siguiente.

Teorema 5.56. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f \in H(G)$ y γ_i, $i = 0, 1$ dos curvas cerradas C^1 a trozos en G. Si γ_0 y γ_1 son homotópicas en G entonces:*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\gamma_0} f(z)\ dz.$$

Demostración del Teorema de Cauchy. Si $\gamma \sim \{z_0\}$ donde $\{z_0\}$ representa un camino constante:

$$\int_\gamma f = \int_{\{z_0\}} f = 0.$$

□

Del Teorema 5.56 se deduce el siguiente.

Corolario 5.57. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f \in H(G)$ y γ_i, $i = 0, 1$ dos curvas C^1 a trozos en G definidas en $I = [0, 1]$ y con los mismos extremos, es decir $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ y $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Si γ_0 y γ_1 son homotópicas en G entonces:*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\gamma_0} f(z)\ dz.$$

Demostración. Se trata de construir una homotopía de curvas cerradas a partir de la homotopía dada H. Por simplicidad llamamos γ_t a la curva "intermedia" $\gamma_t(s) = H(s, t)$, $t \in I = [0, 1]$. Dos curvas cerradas son:

$$\tilde{\gamma}_0 = \gamma_0 + (-\gamma_0), \qquad \tilde{\gamma}_1 = \gamma_0 + (-\gamma_1).$$

Tales curvas son homotópicas en G por medio de la homotopía H_1 de curvas cerradas donde la curva cerrada intermedia $\tilde{\gamma}_t$ es:

$$\tilde{\gamma}_t = \gamma_0 + (-\gamma_t).$$

Como $\int_{\tilde{\gamma}_0} f = 0$ entonces:

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} f = \int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma_1} f = 0.$$

□

Lema 5.58. *Sea γ una curva de Jordan C^1 a trozos en un abierto G. Si $\gamma \sim 0$ en G entonces la componente interior $\mathcal{C}_i$ de γ está contenida en G. Alternativamente:*

$$\mathbb{C} \setminus G \subset \mathcal{C}_e,$$

con $\mathcal{C}_e$ la componente exterior de γ.

Demostración. Se sabe que $\mathbb{C} = \mathcal{C}_e \cup \gamma \cup \mathcal{C}_i$. Como $1/(z-z_0) \in H(G)$ si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ entonces

$$n(\gamma, z_0) = 0,$$

para todo $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$. Por tanto $\mathbb{C} \setminus G \subset \mathcal{C}_e$. □

El mismo argumento prueba el siguiente enunciado.

Corolario 5.59. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto y γ una curva cerrada C^1 a trozos en G. Si γ es homotópica a cero en G ($\gamma \sim 0$ en G) entonces γ es homóloga a cero en G ($\gamma \approx 0$ en G).*

Si una curva cerrada C^1 a trozos γ_1 se obtiene de otra γ_2 por "deformación contniua" y el proceso de deformación no incide en ningún momento en el punto $z \in \mathbb{C}$ el índice de ambas curvas con respecto a dicho punto es el mismo.

Corolario 5.60. *Sean γ_i, $i = 0, 1$ dos curvas cerradas C^1 a trozos en $\mathbb{C}$, γ_0 y γ_1 homotópicas en $\mathbb{C}$ mediante una homotopía $\Gamma : I \times I \to \mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{C}$ satisface que:*

$$z \notin \Gamma(I \times I)$$

entonces se tiene que:

$$n(\gamma_1, z) = n(\gamma_0, z).$$

Una de las consecuencias importantes del Teorema de Cauchy son las "fórmulas de Cauchy" que ahora establecemos.

Teorema 5.61 (Fórmulas de Cauchy)**.** *Sea G un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in H(G)$. Si $\gamma \subset G$ es una curva cerrada C^1 a trozos tal que $\gamma \sim 0$ en G entonces:*

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \tag{5.11}$$

para todo $z \in G \setminus \gamma$. Más aún, para todo $m \in \mathbb{N}$ las derivadas de orden m se representan en la forma:

$$n(\gamma, z) f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} \, d\zeta. \tag{5.12}$$

En particular, si γ es una curva de Jordan orientada positivamente y $z \in \mathcal{C}_i$, la componente interior de γ, se tienen:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \tag{5.13}$$

y

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} \, d\zeta. \tag{5.14}$$

Demostración. □

Proposición 5.62. *Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva cerrada C^1 a trozos y g una función continua en γ. Entonces*

$$f_m(z) := \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^m}\, dz$$

es derivable en $\mathbb{C} \setminus \gamma$ con derivada

$$f'_m(z) = m f_{m+1}(z).$$

En particular, si $f(z) = f_1(z)$ se tiene que:

$$f^{(m)}(z) = m! f_{m+1}(z).$$

Para concluir la sección se tienen los siguientes resultados.

Teorema 5.63. *Si $G \subset \mathbb{C}$ es un dominio (abierto y conexo) simplemente conexo y $f \in H(G)$ entonces f admite una primitiva en G.*

Teorema 5.64. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio (abierto y conexo) simplemente conexo y $f \in H(G)$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in G$. Entonces existe una rama $g(z)$ del $\log(f(z))$ definida en todo G, es decir:*

$$f(z) = e^{g(z)},$$

para todo $z \in G$. Más aún, si w_0 es tal que $f(z_0) = e^{w_0}$ es decir w_0 es un logaritmo de $f(z_0)$, se puede elegir la rama $g(z)$ tal que $g(z_0) = w_0$.

5.10. El principio del argumento

En la presente sección se prueba entre otros resultados el Principio del Argumento (ver también el Teorema 6.13). Mide éste el número exacto de ceros de una función holomorfa “dentro” de una curva dada en términos del número de vueltas, alrededor de cero, de la curva imagen.

Teorema 5.65 (Principio del Argumento)**.** *Sea f una función holomorfa en G, G abierto de $\mathbb{C}$, cuyos ceros en G son $b_1, \ldots, b_m$. Si γ es una curva cerrada C^1 a trozos de G que es homótopa (respectivamente, homóloga) a cero en G entonces:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, b_k)\beta_k$$

donde β_k designa la multiplicidad del cero b_k.

Si $\gamma \subset G$ es en particular una curva de Jordan orientada positivamente con interior $\mathcal{C}_i \subset G$ se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{b_k \in \mathcal{C}_i} \beta_k = Z,$$

donde Z es el número de ceros de f en $\mathcal{C}_i$ (contados con su orden de multiplicidad).

Observación 5.15. Si G es un dominio y $f \in H(G)$ es no nula entonces admite como mucho una sucesión $\{b_n\}$ de ceros distintos y en ese caso los b_n deben tender a la frontera ∂G de G. Sin embargo, cuando $\gamma \sim 0$ (respectivamente $\gamma \approx 0$) en G podemos escribir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{m=1}^{\infty} n(\gamma, b_m)\beta_m.$$

La razón es que todos los índices de la suma son cero salvo un número finito. Esto se aclara a continuación.

Lema 5.66. *Sea $\gamma \subset G$ una curva cerrada C^1 a trozos, homótopa (respectivamente, homóloga) a cero en G. Entonces existe un compacto $K \subset G$ tal que*

$$n(\gamma, z) = 0$$

para todo $z \in G\backslash K$. En particular, $n(\gamma, z) = 0$ si z está suficientemente próximo a la frontera.

Demostración. El conjunto:

$$\mathcal{A} := \{z \in G : n(\gamma, z) \neq 0\} \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_e$$

está acotado porque $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_e$ lo está ($\mathcal{C}_e$ contiene el complementario de un disco). Asimismo, $\overline{\mathcal{A}} \subset G$. De hecho, si $z_0 = \lim z_n$, $z_n \in \mathcal{A}$ y $z_0 \notin G$ entonces $z_0 \in \partial G$. Como $z_0 \notin \gamma$, $n(\gamma, z)$ es constante en un entorno de z_0. Como z_0 es límite de puntos de $\mathbb{C} \setminus G$ entonces $n(\gamma, z) = 0$ en un disco $D(z_0, r)$. Esto es incompatible con que $z_0 \in \overline{\mathcal{A}}$.

Por tanto se puede tomar $K = \overline{\mathcal{A}} \subset G$. □

Teorema 5.67 (Teorema de Rouché)**.** *Sean $f, g \in H(G)$, $\gamma \subset G$ una curva de Jordan C^1 a trozos con interior $\mathcal{C}_i \subset G$. Si*

$$|f(z) + g(z)| < |g(z)|$$

para todo $z \in \gamma$ entonces f y g poseen el mismo número de ceros en $\mathcal{C}_i$.

Observación 5.16. Del resultado precedente se siguen dos consecuencias directas. La primera el teorema fundamental del álgebra. En efecto si

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

es un polinomio cualquiera y $g(z) = -z^n$ está claro que

$$|f(z) + g(z)| < |g(z)|$$

si $|z| = R$ con R suficientemente grande. Como z^n tiene n ceros en $D(0, R)$ el polinomio f también los tiene.

La segunda, la continuidad de las raíces de un polinomio con respecto a sus coeficientes cuya descripción omitimos.

Teorema 5.68. *Sea $f \in H(G)$ y $a \in G$ tal que $f(a) = \alpha$. Si $f(z) - \alpha$ posee un cero de orden m en $z = a$ entonces existen $\varepsilon, \delta > 0$ tales que para todo ζ tal que:*

$$0 < |\zeta - \alpha| < \delta,$$

existen m raíces simples de la ecuación:

$$f(z) = \zeta$$

en la región:

$$0 < |z - a| < \varepsilon.$$

Una consecuencia inmediata es el siguiente resultado.

Teorema 5.69 (Teorema de la Aplicación Abierta)**.** *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f \in H(G)$ no constante. Entonces $f(G)$ es abierto en $\mathbb{C}$.*

Otra consecuencia sorprendente.

Teorema 5.70. *Sean $G \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f \in H(G)$ e inyectiva. Entonces $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in G$ y por lo tanto f^{-1} es holomorfa en $\Omega = f(G)$.*

CAPÍTULO 6

Singularidades de las funciones complejas

En el presente capítulo usaremos el siguiente resultado (ver Capítulo V): $f \in H(G)$, no idénticamente nula en un dominio $G \subset \mathbb{C}$, posee un cero en $z = a$ si y sólo si existe $m \in \mathbb{N}$ con $f^{(k)}(a) = 0$ para $0 \leq k \leq m-1$ y $f^{(m)}(a) \neq 0$. Esto equivale a la existencia de $g \in H(G)$ tal que $g(a) \neq 0$ con $f(z) = (z-a)^m g(z)$.

6.1. Singularidades aisladas

Definición 6.1. *Se dice que una función compleja f tiene en $z = a$ una singularidad aislada si $f \in H(D(a,r) \setminus \{a\})$ y f no es holomorfa en $D(a,r)$. La singularidad es evitable si existe $g \in H(D(a,r))$ con $g = f$ en $D(a,r) \setminus \{a\}$.*

Obsérvese que en el último caso sólo puede existir una única función $g \in H(D(a,r))$ que satisface $f = g$ en $D(a,r) \setminus \{a\}$.

Ejemplos 6.1.

a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$ *posee una singularidad evitable en* $z = 0$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ *y* $f(z) = e^{1/z}$ *poseen una singularidad en* $z = 0$ *que no es evitable.*

Teorema 6.2. *Sea $z = a$ una singularidad aislada de una función compleja f. La singularidad es evitable si y sólo si*

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0.$$

Observación 6.2. El resultado precedente no es válido en el caso real como muestra el ejemplo de la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definición 6.3. *Sea $z = a$ una singularidad aislada de f. Se dice que $z = a$ es un polo si*

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty.$$

Ejemplos 6.3.

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^m}$ *posee un polo en* $z = 0$.

b) *El punto* $z = 0$ *no es un polo de* $f(z) = e^{1/z}$ *pues ni siquiera posee límite cuando* $z \to 0$.

Teorema 6.4. *Sea* $f \in H(G \setminus \{a\})$ *donde* $a \in G$. *Se tiene que* $z = a$ *es un polo de* f *si y sólo si existen* $m \in \mathbb{N}$ *y* $g \in H(G)$ *únicos tales que*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m},$$

para $z \in G \setminus \{a\}$, *donde* g *es holomorfa en* G *con* $g(a) \neq 0$.

Observación 6.4. La función g del Teorema 6.4 se puede escribir en la forma:

$$g(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m g_m(z),$$

donde $g_m \in H(G)$. Los primeros m sumandos son los del desarrollo de Taylor cuyos coeficientes hemos nombrado de manera distinta a la habitual.

Por tanto:

$$g(z) = S(z) + g_m(z),$$

donde

$$S(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)}.$$

Definición 6.5. *Se llama orden del polo* $z = a$ *al entero* m *del Teorema 6.4, asimismo se dice que* $S(z)$ *es la parte singular de* f *en* $z = a$. *El coeficiente* a_{-1} *se denomina –por razones que se hacen claras más tarde– el residuo del polo. Se denota:*

$$a_1 = \text{Res } (f, a).$$

Proposición 6.6. *Si* $z = a$ *es un polo de* f *entonces:*

$$\text{Res } (f, a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} \left((z-a)^m f(z) \right).$$

Si el polo $z = a$ *es simple* ($m = 1$) *se tiene que:*

$$\text{Res } (f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

Proposición 6.7. *Sea* f *una función holomorfa en* $G \setminus \{a_1, \ldots, a_N\}$, $G \subset \mathbb{C}$ *un abierto y* $\{a_1, \ldots, a_N\} \subset G$. *Supongamos que cada uno de los* $z = a_j$ *es un polo de la función* f *de orden* m_j. *Entonces:*

a) f *se puede escribir en la forma:*

$$f(z) = S_1(z) + \cdots + S_n(z) + g(z),$$

$z \in G \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$ donde para cada $0 \leq j \leq N$

$$S_j(z) = \frac{a^{(j)}_{-m_j}}{(z-a_j)^{m_j}} + \cdots + \frac{a^{(j)}_{-1}}{(z-a_j)}$$

y g es holomorfa en G.

b) f admite asimismo la representación:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a_1)^{m_1} \dots (z-a_N)^{m_n}}.$$

$z \in G \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$, donde g (que no es la misma que en a)) es holomorfa en G.

Demostración. Probamos b), por ejemplo, usando inducción. Si f tiene $N+1$ polos $\{a_1, \dots, a_{N+1}\}$ en G, f tiene N polos en $G_1 = G \setminus \{a_{N+1}\}$ de donde

$$f(z) = S_1(z) + \cdots + S_n(z) + g(z),$$

con $g \in H(G_1)$. Como g tiene un polo en a_{N+1} entonces

$$g(z) = S_{N+1}(z) + \tilde{g}(z),$$

con $\tilde{g} \in H(G)$. Basta sustituir y hemos terminado. □

Introducimos ahora la noción de función meromorfa (cf. [23]).

Definición 6.8. *Se dice que una función compleja es* meromorfa *en una abierto G si es holomorfa en $G \setminus \{a_n\}$ donde todos los elementos de la sucesión $\{a_n\} \subset G$ son polos o singularidades evitables y $\{a_n\} \subset G$ carece de puntos de aglomeración en G.*

Ejemplos 6.5.

a) Toda función racional es meromorfa en $\mathbb{C}$.

b) Las funciones tag z, $\cot z$, $\sec z$, $\csc z$, $\tanh z$, $\coth z$ son todas meromorfas en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 6.1. *Pruébese que si $f \not\equiv 0$ es meromorfa en un dominio G entonces $1/f$ también lo es.*

6.2. Desarrollos de Laurent

Comenzamos con una definición.

Definición 6.9. *Se dice que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ converge (respectivamente, converge absolutamente) si convergen (convergen absolutamente) las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ escribiéndose:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

La misma convención se observa para la convergencia puntual y uniforme de series funcionales de este tipo.

Teorema 6.10. *Sea f una función holomorfa en el anillo*

$$A = A(a, R_1, R_2) = \{z : R_1 < |z-a| < R_2\} \qquad 0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty.$$

Entonces la función se puede representar mediante la serie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \tag{6.1}$$

para todo $z \in A$. Además:

1) La representación (6.1) *es única.*

2) Los coeficientes a_n de la serie se representan en la forma

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz,$$

donde $\gamma_r(s) = a + re^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$ y r es cualquier valor cumpliendo $R_1 < r < R_2$.

3) La serie converge absoluta y uniformemente sobre compactos de $A(a, R_1, R_2)$ (es decir, uniformemente en cada subanillo cerrado $\overline{A(a, r_1, r_2)}$ de $A(a, R_1, R_2)$, $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$).

Observación 6.6. Nótese que el enunciado contempla diversas clases de anillos degenerados. Por ejemplo, el “disco perforado” $D(a, R_2) \setminus \{a\}$ ($R_1 = 0$), el exterior de un disco $\mathbb{C} \setminus \overline{D(a, R_1)}$ ($R_2 = \infty$) e incluso $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($R_1 = 0$, $R_2 = \infty$).

Definición 6.11. *Si $z = a$ es una singularidad aislada de una función compleja f se define el desarrollo de Laurent de la función en $z = a$ al correspondiente a cualquier anillo $D(a, r) \setminus \{a\}$ donde la función esté definida y sea holomorfa.*

Observación 6.7. *Si $z = a$ es una singularidad aislada de f y* (6.1) *su desarrollo de Laurent, se suele designar a $g_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ la parte regular de f y a $g_-(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}$ la parte singular.*

Demostración del Teorema 6.10. Comenzamos probando 1) y 2). La convergencia de la serie (6.1) en A implica la de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{-n}$$

en A. Por tanto la primera converge absoluta y uniformemente sobre compactos de $|z-a| < R_2$ mientras la segunda converge absoluta y uniformemente sobre compactos de $|z-a| > R_1$ (en éste último caso véanse los desarrollos en serie de potencias en el infinito introducidos en el Capítulo III, Ejercicios).

Como (6.1) converge uniformemente en $\gamma_r(s) = a + re^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$, con $R_1 < r < R_2$ podemos multiplicar ambos miembros por $(z-a)^m$ y $m \in \mathbb{Z}$ e integrar en γ_r para concluir que:

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = 2\pi i a_n.$$

De aquí se concluye la unicidad del desarrollo y la forma de los coeficientes.

Probamos ahora la validez del desarrollo y de ahí 3). De la fórmula de Cauchy se tiene que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

para todo $z \in A$ tal que $r_1 < |z-a| < r_2$ y $r_1, r_2 \in (R_1, R_2)$ con $r_1 < r_2$.

Procediendo como en la demostración de la fórmula de Cauchy en discos se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz.$$

Razonando de la misma manera

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}$$

con

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} (z-a)^{n-1} f(z)\, dz, \qquad n \geq 1.$$

Para concluir, nótese que “a posteriori” puede tomarse $r_1 = r_2 = r \in (R_1, R_2)$ en la expresión integral de los coeficientes porque ésta no depende del valor de r. □

Proposición 6.12. *Sea $f \in H(G \setminus \{a_1, \ldots, a_N\})$ con $\{a_1, \ldots, a_N\} \subset G$. Entonces:*

$$f(z) = g_{1,-} + \cdots + g_{N,-}(z) + g(z),$$

donde $g \in H(G)$ y $g_{j,-}$ es la parte singular de f en $z = a_j$.

Demostración. Basta probar el caso $N = 1$ y después proceder por inducción como en el Corolario 6.7. Usando el desarrollo de Laurent en $z = a_1$:

$$f(z) = g_-(z) + g_+(z) \qquad 0 < |z - a_1| < r.$$

Nótese que $g_- \in H(\mathbb{C} \setminus \{a_1\})$, $g_+ \in H(D(a_1, r))$. La función:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) - g_-(z) & z \neq a_1 \\ g_+(a_1) & z = a_1, \end{cases}$$

es obviamente holomorfa en $G \setminus \{a_1\}$ mientras coincide con g_+ en $D(a_1, r)$, luego también es holomorfa en G. Así:

$$f(z) = g_-(z) + g(z).$$

□

Definición 6.13. *Se dice que una singularidad aislada $z = a$ de una función compleja f es esencial si no es una singularidad evitable ni un polo.*

El siguiente teorema clasifica las singularidades aisladas en términos del desarrollo de Laurent en tales singularidades.

Teorema 6.14. *Sea $z = a$ una singularidad aislada de una función comleja f y sea*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a),$$

el desarrollo de Laurent de f en la bola perforada $D(a, r) \setminus \{a\}$. Entonces,

a) $z = a$ es evitable si y sólo si $a_n = 0$ para $n \leq -1$.

b) $z = a$ es un polo de orden m si $a_{-m} \neq 0$ y $a_n = 0$ para todo $n \leq -m-1$.

c) $z = a$ es una singularidad esencial si y sólo si $a_n \neq 0$ para infinitos enteros negativos n.

Demostración. Las condiciones de a) y b) son claramente suficientes.

En el caso de la necesidad de a) se tiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

en $z \in D(a, r) \setminus \{a\}$ donde el segundo miembro corresponde al desarrollo de la extensión g de f en $D(a, r)$. Como el desarrollo (6.1) es único, hemos terminado.

Para la necesidad de b) nótese que:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \right)$$

donde el desarrollo entre paréntesis es el de la función holomorfa g de Teorema 6.4. Como el desarrollo de Laurent en $z = a$ es único hemos terminado.

□

Teorema 6.15 (Teorema de Casorati-Weierstrass)**.** *Sea $z = a$ una singularidad esencial de una función compleja f. Entonces $f(D(a, r) \setminus \{a\})$ es denso en $\mathbb{C}$ para cada $0 < r < r_0$ y cierto r_0 positivo.*

Demostración. Si $f(D(a,r)\setminus\{a\})$ no es denso en $\mathbb{C}$:

$$f(D(a,r)\setminus\{a\})\cap D(c,\varepsilon)=\emptyset,$$

para ciertos $c\in\mathbb{C}$, $\varepsilon>0$. Por tanto:

$$\lim_{z\to a}\frac{1}{(z-a)}(f(z)-c)=\infty.$$

Esto significa que $f(z)-c$ tiene un polo en $z=a$ con lo que $z=a$ es también un polo de f contra lo supuesto.

□

6.3. Teorema de los residuos

Teorema 6.16 (Teorema de los Residuos)**.** *Sea f una función holomorfa en $G\setminus\{a_1,\dots,a_m\}$, donde G es un abierto de $\mathbb{C}$ y $\{a_1,\dots,a_m\}\subset G$. Si γ es una curva cerrada C^1 a trozos de G que es homótopa (respectivamente, homóloga) a cero en G entonces:*

$$\int_\gamma f=2\pi i\sum_{k=1}^{m}n(\gamma,a_k)\mathrm{Res}\ (f,a_k)$$

Si γ es en particular una curva de Jordan orientada positivamente se tiene:

$$\int_\gamma f=2\pi i\sum_{a_k\in\mathcal{C}_i}\mathrm{Res}\ (f,a_k)$$

donde $\mathcal{C}_i$ es la componente interior de γ.

Demostración. Escribiendo

$$f(z)=g_{1,-}(z)+\cdots+g_{m,-}(z)+g(z),$$

e integrando sobre γ:

$$\int_\gamma f(z)=\int_\gamma g_{1,-}(z)+\cdots+\int_\gamma g_{m,-}(z)+\int_\gamma g(z),$$

resulta:

$$\int_\gamma g_{j,-}(z)=2\pi i\mathrm{Res}\ (f,a_j),\qquad \int_\gamma g(z)=0.$$

□

El siguiente resultado se conoce con frecuencia como el principio del argumento (ver también el Capítulo V).

Teorema 6.17. *Sea f una función holomorfa en $G\setminus\{a_1,\dots,a_p\}$, G abierto en $\mathbb{C}$, $\{a_1,\dots,a_p\}\subset G$, siendo cada a_i un polo de f. Sean $b_1,\dots,b_q$ los ceros f en G. Si γ es una curva cerrada C^1 a trozos de G que es homótopa (homóloga) a cero en G entonces:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{k=1}^{q} n(\gamma,b_k)\beta_k - \sum_{l=1}^{p} n(\gamma,a_l)\alpha_l$$

donde α_l y β_k son las multiplicidades de a_l y b_k, respectivamente.

Si γ es en particular una curva de Jordan orientada positivamente se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{b_k\in\mathcal{C}_i}\beta_k - \sum_{a_l\in\mathcal{C}_i}\alpha_l = Z-P,$$

donde $\mathcal{C}_i$ es la componente interior de γ, Z es el número de ceros en $\mathcal{C}_i$ y P es el número de polos en $\mathcal{C}_i$ (contados en ambos casos con sus órdenes de multiplicidad).

Demostración. Basta con escribir la función f en la forma:

$$f(z) = (z-a_1)^{-\alpha_1}\dots(z-a_p)^{-\alpha_p}(z-b_1)^{\beta_1}\dots(z-b_q)^{\beta_q}h(z),$$

donde $h\in H(G)$. □

Observación 6.8. A diferencia del resultado anterior donde las singularidades aisladas son arbitrarias en el principio del argumento éstas han de ser necesariamente polos (es decir se trata de funciones meromorfas en G).

Para las aplicaciones de la teoría de los residuos al cálculo de integrales impropias los siguientes lemas revisten gran interés.

Lema 6.18 (Lema de Jordan)**.** *Sea $\gamma_r = re^{is}$, $s\in[0,\pi]$. Entonces:*

$$\int_{\gamma_r} |e^{iz}||dz| < \pi,$$

para todo $r>0$.

Demostración. Se tiene:

$$\int_{\gamma_r}|e^{iz}||dz| = 2r\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\operatorname{sen}\theta}\,d\theta < 2r\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2r}{\pi}\theta}\,d\theta = \pi\int_0^r e^{-s}\,ds < \pi.$$

□

Lema 6.19. *Sea $z=a$ un polo simple de f y $\gamma_\varepsilon(s) = a+\varepsilon e^{is}$, $s\in[s_0,s_0+\phi]$, donde $\phi\in(0,2\pi)$. Entonces:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\gamma_\varepsilon} f = i\phi\ \mathrm{Res}\ (f,a).$$

Demostración. Se escribe:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f = a_{-1} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z-a} + \int_{\gamma_\varepsilon} g = \phi i a_{-1} + \int_{\gamma_\varepsilon} g,$$

y

$$\int_{\gamma_\varepsilon} g \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$. $\square$