Soluciones a los ejercicios del Capítulo I

1. Sea $S^1 = \{z : |z| = 1\}$. Probar que S^1 es un grupo respecto del producto.

   Solución. Si $z_1, z_2 \in S^1$ entonces $z_1 z_2^{-1} \in S^1$. Por tanto S^1 es un grupo respecto al producto. □

2. Probar que no es posible dotar a $\mathbb{C}$ de una relación de orden "$\leq$"que haga de $(\mathbb{C}, \leq)$ un cuerpo ordenado.

   Solución. Si $(K, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado con neutro para la suma 0, neutro para el producto 1, entonces se cumple que

$$x^2 > 0$$

   para cualquier $x \neq 0$. En particular $1 > 0$ y de los axiomas se deduce que $-1 < 0$. El cuerpo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ no puede ordenarse para dar un cuerpo ordenado porque $i^2 = -1$. □

3. Hallar las partes reales e imaginarias de:

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{z-a}{z+a} \qquad (a \in \mathbb{R}), \quad z^3, \quad \frac{3+5i}{7i+1}, \quad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6, \quad i^n, \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n \qquad 2 \leq n \leq 8.$$

4. Hallar $|z|$, $\bar{z}$ en cada uno de los casos siguientes:

$$-2+i, \quad -3, \quad (2+i)(4+i), \quad \frac{3-i}{\sqrt{2}+3i}, \quad \frac{i}{i+3}, \quad (1+i)^6, \quad i^{17}.$$

5. Probar que z es real si y sólo si $z = \bar{z}$.

6. Hallar x, y en las relaciones:

$$a)\ z = |z|, \qquad b)\ z = (\bar{z})^2, \qquad c)\ z = \sum_{k=0}^{100} i^k.$$

   Solución.

a) $x \geq 0$.

b) De $|z| = 1$ $(z \neq 0)$ y multiplicando por z^2 sale $z^3 = 1$.

c)

$$z = \frac{1-i^{101}}{1-i} = 1.$$

□

7. Probar (identidad del paralelogramo):

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Solución. Basta sumar las identidades:

$$|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\Re z\bar{w}.$$

□

8. Sea $R(z)$ una función racional de z de coeficientes reales. Probar que $\overline{R(z)} = R(\bar{z})$. Si $p(z)$ es un polinomio de coeficientes reales demostrar que z es raíz de p si y sólo si $\bar{z}$ es una raíz.

Solución. Se sigue de la identidad:

$$\overline{az+b} = \bar{a}\bar{z} + \bar{b}.$$

□

9. (Raíces cuadradas). Resolver en x, y la ecuación:

$$(x+iy)^2 = a + bi, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

probando que siempre admite dos soluciones. Para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ discutir la existencia de raíces de la ecuación de segundo grado:

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0.$$

Como aplicación hallar:

$$\sqrt{-8+6i},$$

y las soluciones de la ecuación:

$$z^2 + \sqrt{32}iz - 6i = 0.$$

10. Probar la validez de la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad a, b \in \mathbb{C}.$$

Hallar $\Re z, \Im z$ para $z = (a+bi)^6$.

Solución. La prueba del binomio de Newton es la que se ejecuta por inducción en un anillo conmutativo arbitrario.

Asimismo

$$(a+bi)^6 = a^6 + 6a^5bi - 15a^4b^2 - 20a^3b^3i + 15a^2b^4 + 6ab^5i - b^6.$$

□

11. Pruébense las siguientes fórmulas del ángulo múltiple:

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \operatorname{sen}^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \operatorname{sen}^4 \theta + \cdots ,$$

$$\operatorname{sen} n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \operatorname{sen} \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \operatorname{sen}^3 \theta + \cdots .$$

Solución. De la identidad de d'Moivre y el binomio de Newton:

$$\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \operatorname{sen}^2 \theta$$
$$+ \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \operatorname{sen}^4 \theta + \cdots + i \left(\binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \operatorname{sen} \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \operatorname{sen}^3 \theta + \cdots \right),$$

igualdad que proporciona las relaciones pedidas. □

12. Pruébese que $\text{máx}\{\Re z, \Im z\} \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|$. ¿Cuándo se da la igualdad?

13. Para $z = x + iy$ explicar la relación entre Arg z y arctag (y/x).

14. Pruébese que $2\text{Arg}\,(z+1) = \text{Arg}\,z$ en $|z| = 1$, $z \neq -1$.

Solución. Conviene hacer un dibujo para convencerse de la veracidad de la identidad. Por otro lado, de las hipótesis resulta:

$$\theta = 2(\text{Arg}\ z + 1) \in (-\pi, \pi).$$

Sólo hay que verificar que:

$$e^{i\theta} = z,$$

pues $|z| = 1$. Echando cuentas:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{|z+1|^2}((x+1)^2 - y^2 + 2i(x+1)y).$$

Se tiene $|z+1|^2 = 2(x+1)$ con

$$(x+1)^2 - y^2 = 2(x+1)^2 - 2(x+1) = 2x(x+1).$$

Basta sustituir para llegar a la identidad buscada. □

15. Hállense las ramas principales de $\sqrt{z}$ y de $\sqrt{1-z}$.

16. Halar un dominio G y funciones continuas f, g tales que $f(z)^2 = g(z)^2 = 1 - z^2$. Estudiar si el dominio G obtenido es maximal.

17. Resolver:

$$z^6 = 1, \qquad z^4 = -1, \qquad z^4 = -1 + \sqrt{3}i.$$

18. Probar que las raíces n-ésimas z de la unidad, $z \neq 1$, cumplen:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0.$$

Solución. Las raíces de la unidad cumplen:

$$z^n - 1 = 0.$$

Dividiendo por $z - 1$ resulta:

$$(z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1) = 0,$$

de donde se sigue el resultado. $\square$

19. Probar que en un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia $z = 1$, el producto de las $n-1$ diagonales que parten de un vértice dado (contando los lados adyacentes) es n.

Solución. Sea $\zeta_1 = e^{-i\theta}$ el vértice de referencia, $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$ los restantes vértices. El producto pedido es:

$$|\zeta_1 - \zeta_2| \ldots |\zeta_1 - \zeta_n| = |1 - z_2| \ldots |1 - z_n| = |(1 - z_2) \ldots (1 - z_n)|,$$

donde $z_2 = e^{i\theta}\zeta_2, \ldots, z_n = e^{i\theta}\zeta_n$. En otras palabras, hemos girado la circunferencia para llevarnos el vértice distinguido al 1. Así:

$$(1 - z_2) \ldots (1 - z_n) = 1 - (z_2 + \cdots + z_n) + \cdots + (-1)^{n-1} z_2 \cdots z_n.$$

Como los $z = z_j$, $2 \leq j \leq n$, resuelven la ecuación:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0,$$

las relaciones de Cardano-Vieta dan:

$$1 = -(z_2 + \cdots + z_n) = \cdots = (-1)^{n-1} z_2 \ldots z_n.$$

Por tanto

$$|(1 - z_2) \ldots (1 - z_n)| = n.$$

$\square$

20. Descríbanse los siguientes lugares geométricos:

a) $|z - i| \leq 1$

b) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = 1$

c) $|z - 2| > |z - 3|$

d) $|z| < 1, \quad \Im z > 0,$

e) $\dfrac{1}{z} = \bar{z}$

f) $|z|^2 = \Im z$

g) $|z^2 - 1| < 1.$

21. Pruébese que $|z-a| = |z-b|$ (respectivamente, $|z-a| > |z-b|$) es, para $a, b \in \mathbb{C}$, la ecuación general de una recta (respectivamente, de un semiplano).

Solución. Se trata de la mediatriz del segmento $\overline{ab}$.

□

22. Para $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, ¿qué objeto geométrico es

$$\Im\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0?$$

23. ¿Cuándo representa una recta del plano la ecuación:

$$az + b\bar{z} + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}?$$

Solución. La ecuación real de una recta es:

$$Ax + By + C = 0,$$

$A, B, C \in \mathbb{R}$. Haciendo $2x = z + \bar{z}$, $2y = -i(z - \bar{z})$ obtenemos:

$$(A - iB)z + (A + iB)\bar{z} + 2C = 0,$$

es decir

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + D = 0,$$

con $D = 2C$.

Como el sistema

$$\begin{cases} az + b\bar{z} + c = 0 \\ \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + D = 0, \end{cases}$$

posee infinitas soluciones habrá de ser

$$(a, b, c) = \lambda(\bar{\alpha}, \alpha, D),$$

para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Si $c \neq 0$ se puede tomar $D = 1$ y concluimos que

$$a = \lambda\bar{\alpha}, \quad b = \lambda\alpha, \quad c = \lambda.$$

Si $c = 0$ entonces:

$$a = \lambda\bar{\alpha}, \quad b = \lambda\alpha.$$

□

24. Supongamos a, c reales, $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{C}$. Pruébese que

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0,$$

es la ecuación de una circunferencia del plano.

Solución. Dividiendo por a y completando cuadrados resulta:

$$\left|z + \frac{b}{a}\right|^2 = \frac{|b|^2 - ac}{a^2},$$

que representa la ecuación de una circunferencia sólo si el segundo miembro es positivo.

□

25. (Cuaterniones de Hamilton). Definimos:

$$Q = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

representando los vectores de la base canónica $\{e_i\}$ como $\{1, i, j, k\}$ de forma que:

$$z = (a, b, c, d) = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k,$$

con " $\cdot$ " el producto de un escalar por un vector, símbolo que omitiremos en lo que sigue para escribir $a + bi + cj + dk$. Se consideran la suma habitual $+$ de vectores y el producto que se define a través de las relaciones:

$$1x = x, \quad x \in \{1, i, j, k\}, \qquad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k, \quad ki = j, \quad jk = i, \quad ji = -k, \quad ik = -j, \quad kj = -i.$$

El producto a z_1, z_2 se determina entonces usando formalmente las propiedades asociativa y distributiva.

a) Hállese la expresión del producto $(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k)$

b) Pruébese que $(Q, +, .)$ es un cuerpo no conmutativo. Se conoce a Q como los "cuaterniones". Para $z = a + bi + cj + dk$, a se define como la parte escalar del cuaternión z, $bi + cj + dk$ la parte vectorial.

c) Dése una interpretación geométrica de la parte escalar y la parte vectorial del producto

$$(bi + cj + dk)(b'i + c'j + d'k)$$

de dos cuaterniones sin parte escalar.

26. Pruébese que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-lineal entonces existe $\lambda = \alpha + \beta i$ tal que $f(z) = \lambda z$. Demuéstrese que f induce una aplicación lineal $f_R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ calculando su matriz A en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Solución. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ lineal se tiene

$$f(z) = f(z{,}1) = zf(1) = f(1)z = \lambda z,$$

donde $\lambda = f(1)$.

$\square$

27. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal de matriz $A = (a_{kl})$, $f_C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la correspondiente aplicación asociada. Dénse condiciones necesarias y suficientes para que f_C sea asimismo $\mathbb{C}$-lineal (ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Solución. Si f es $\mathbb{C}$-lineal entonces

$$w = f(z) = \lambda z.$$

Si $w = u + iv$, $z = x + iy$, $\lambda = \alpha + i\beta$ entonces su representación como aplicación $\mathbb{R}$-lineal es:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es $\mathbb{R}$-lineal con representación matricial

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

la condición necesaria y suficiente para que defina una aplicación $\mathbb{C}$-lineal es

$$a_{11} = a_{22}, \qquad a_{21} = -a_{12},$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. □

28. Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $T_1(z) = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ las correspondientes aplicaciones bilineales asociadas. Pruébese que $T = T_1$ si y sólo si $A_1 = \lambda A$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Solución. Sean:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad g(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}.$$

Si $f = g$ se tiene

$$(az+b)(c_1 z + d_1) = (a_1 z + b_1)(cz+d).$$

De ahí se deduce que:

$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{d}{c} = \frac{d_1}{c_1}, \quad ac_1 = a_1 c.$$

Por tanto:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{d_1}{d},$$

donde hemos supuesto que a, b, c, d son no nulos. Se cumple ademá que si un denominador es cero el numerador también lo es.

Por ejemplo, $a = 0$ implica $c = 0$ si $a_1 \neq 0$ y esto no puede ser pues $ad - bc \neq 0$. Los demás casos se comprueban igual.

El recíproco es inmediato.

□

29. Sean

$$SL_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \det\, A = 1 \right\},$$

$$\mathcal{M} = \{T(z) = \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc \neq 0\},$$

con $\varphi : SL_2 \to \mathcal{M}$, la aplicación natural $A \mapsto T$. Pruébese que φ es sobreyectivo.

30. Una curva $C \subset \mathbb{C}$ de clase C^1 se define como $C = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ donde $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es C^1 y $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t. Si $z_0 = \gamma(t_0)$, $v = \gamma'(t_0) \neq 0$ se dice que $v \in \mathbb{C}$ es el vector tangente a C en z_0 correspondiente a la parametrización γ.

Si C_1, C_2 inciden en z_0, con vectores tangentes $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ asociados a sendas parametrizaciones γ_1, γ_2, se dice que C_1, C_2 se cortan con ángulo:

$$\theta = \angle(v_1, v_2) = \arg \frac{v_2}{v_1}.$$

a) Pruébese que si $f(z) = az + b$, y las curvas C_1, C_2 inciden en z_0 con ángulo θ, entonces las curvas $C_i' = f(C_i)$, $i = 1, 2$, inciden en $f(z_0)$ con ángulo θ.

b) Pruébese que si $f(z) = a\bar{z} + b$, C_1, C_2 inciden en z_0 con ángulo θ, ahora las curvas $C_i' = f(C_i)$, $i = 1, 2$, inciden en $f(z_0)$ con ángulo $2\pi - \theta$.

31. Se considera la función $f(z) = z^2 = u + iv$. Pruébese que para cada par de constantes c_1, c_2, $c_1 c_2 \neq 0$, las curvas:

$$u(x,y) = c_1, \qquad v(x,y) = c_2,$$

se cortan ortogonalmente. Pruébese por otra parte que $\gamma(t)$ es C^1 se tiene $(f \circ \gamma)'(t) = 2\gamma(t)\gamma'(t)$. Demuétrese que f preserva el ángulo entre curvas incidentes en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. ¿Qué sucede en $z = 0$?

Solución. Si las curvas inciden en z_0 los vectores normales son:

$$\nabla u(z_0), \quad \nabla v(z_0).$$

Tales vectores son ortogonales.

Por otro lado se tiene que $\hat{\gamma}(t) = (f \circ \gamma)(t) = \gamma(t)^2$ luego:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h)^2 - \gamma(t)^2}{h} = \lim_{h \to 0} (\gamma(t+h) - \gamma(t)) \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = 2\gamma(t)\gamma'(t).$$

Si las curvas $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ inciden, $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$. El carácter conforme de f es consecuencia de la relación:

$$\frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)} = \frac{\hat{\gamma}_2'(t_2)}{\hat{\gamma}_1'(t_1)}.$$

□

32. (♣) Sean $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrización C^1. Pruébese que $T(\gamma(t))$ es también una parametrización C^1 tal que:

$$(T \circ \gamma)'(t) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \gamma'(t).$$

Demuéstrese que si C_1, C_2 se cortan en z_0 con un ángulo θ entonces $T(C_1), T(C_2)$ también se cortan en $T(z_0)$ formando ángulo θ.

Solución. Poniendo $\hat{\gamma}(t) = T(\gamma(t))$ resulta:

$$\hat{\gamma}(t) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \frac{1}{c\gamma(t) + d}.$$

Usando las ideas del Capítulo 2 para calcular $(1/\gamma)'$ resulta que

$$\left(\frac{1}{c\gamma + d} \right)' = -\frac{c\gamma'}{(c\gamma + d)^2}.$$

De aquí es ya evidente que si $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ son curvas incidentes con $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ entonces

$$\frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)} = \frac{\hat{\gamma}_2'(t_2)}{\hat{\gamma}_1'(t_1)}.$$

Esto implica el carácter conforme de T. $\square$

Soluciones a los ejercicios del Capítulo II

1. Hallar las aplicaciones de Möbius que transforman:

a) $1, i, -1$ en $-1, i, 1$.

b) $-i, 0, i$ en $0, i, 2i$.

c) $-i, i, 2i$ en $\infty, 0, \frac{1}{3}$.

Solución.

a) De
$$(w, -1, i, 1) = (z, 1, i, -1)$$
resulta:
$$w = -\frac{1}{z}.$$

b) De
$$(w, 0, i, 2i) = (z, -i, 0, i)$$
se tiene:
$$w = z + i.$$

c) Ponemos
$$(z, -i, i, 2i) = (w, \infty, 0, \frac{1}{3}),$$
y obtenemos:
$$w = \frac{z-i}{z+i}.$$

□

2. Hallar los puntos fijos de las aplicaciones:
$$T(z) = \frac{z-1}{z+1}, \qquad T(z) = \frac{z}{z+1}.$$

Solución.

En el primer caso $z = \pm i$, en el segundo caso $z = 0$.

□

3. Pruébese que si cuatro puntos distintos $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ son colineales o yacen en una circunferencia entonces (z_1, z_2, z_3, z_4) es real (el recíproco es cierto, según se vio en teoría).

Solución. En el caso de una recta $z_j = a + t_j b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $t_1, \dots, t_4 \in \mathbb{R}$. Entonces:
$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathbb{R}.$$

Para una circunferencia $z_j = z_0 + re^{i\theta_j}$, $1 \leq j \leq 4$. Poniendo $\zeta_j = e^{i\theta_j}$ se tiene:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4),$$

ahora:

$$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = (\frac{1}{\zeta_1}, \frac{1}{\zeta_2}, \frac{1}{\zeta_3}, \frac{1}{\zeta_4}) = (\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \bar{\zeta}_3, \bar{\zeta}_4) = \overline{(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)}.$$

Esto prueba que $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ es real. □

4. Hallar las imágenes de la circunferencia unidad $\{|z| = 1\}$ bajo las transformaciones:

$$w = \frac{1}{z}, \quad w = \frac{1}{z-1}, \quad w = \frac{1}{z-2}.$$

Solución. En los tres casos la recta real es invariante: $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ($\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$).

La circunferencia $\partial D = \{|z| = 1\}$ es ortogonal a $\mathbb{R}_\infty$. Luego $f(\partial D)$ es ortogonal a $\mathbb{R}_\infty$.

Si $f = \dfrac{1}{z}$, $f(\partial D) = \partial D$.

Si $f = \dfrac{1}{z-1}$, $f(\partial D)$ es la recta ortogonal a $\mathbb{R}_\infty$ en $z = -1/2$.

Si $f = \dfrac{1}{z-2}$, $f(\partial D)$ es la circunferencia ortogonal a $\mathbb{R}_\infty$ en $z = -1/3$ y $z = -1$.

□

5. Hallar la imagen de $\{\Im z > 0\}$ bajo $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc < 0$.

Solución.

En primer lugar $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ($\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$).

Hace falta saber entonces en qué semiplano está $f(i)$. Pero:

$$f(i) = \frac{bd + ac + i(ad - bc)}{|ci + d|^2}.$$

Luego $f(\{\Im z > 0\}) = \{\Im z < 0\}$.

□

6. Determinar una aplicación bilineal T que transforme $\{\Re z > 0\}$ en $\{|z| < 1\}$. Misma cuestión transformando $\{\Re z < 0\}$ en $\{|z| > 1\}$.

Solución. En el primer caso $\{\Re z > 0\}$ es el lado izquierdo de $\Re z = 0$ con la orientación $\{i, 0, -i\}$, $D = \{|z| < 1\}$ es el lado izquierdo de ∂D respecto de $\{1, i, -1\}$. Basta encontrar la f que asocia ordenadamente una orientación con otra:

$$(w, 1, i, -1) = (z, i, 0, -i),$$

es decir,

$$w = i\frac{1-z}{1+z}.$$

Esta aplicación resuelve también la segunda cuestión. □

7. Calcular una aplicación bilineal T que transforme:

$$\{|z| < 1, \Im z > 0\},$$

en

$$\{\Re z > 0, \Im z > 0\}.$$

Solución.

Formamos la aplicación f que transforma ordenadamente $\{-1, 0, 1\}$ en $\{0, 1, \infty\}$.

Orientando $\mathbb{R}_\infty$ con $\{-1, 0, 1\}$ su lado izquierdo es $\{\Im z > 0\}$. Entonces $f(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ y el lado izquierdo de $f(\mathbb{R}_\infty)$ con respecto a la orientación $\{0, 1, \infty\}$ es $\{\Im z > 0\}$. Por ello $f(\{\Im z > 0\}) = \{\Im z > 0\}$.

Por otra parte $f(\partial D)$ es una recta, pasa por cero y es ortogonal a $f(\mathbb{R}_\infty)$. Con esos datos $f(\partial D) = \{\Re z = 0\}$. Asimismo 0 está en la componente interior a ∂D, como $f(0) = 1$ se tiene que $f(D) = \{\Re z > 0\}$.

Por tanto f resuelve el problema pues

$$f(D \cap \{\Im z > 0\}) = f(D) \cap f(\{\Im z > 0\}) = \{\Re z > 0\} \cap \{\Im z > 0\}.$$

Finalmente,

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

$\square$

8. (♣) Hállese una transformación bilineal que aplique: 1) la circunferencia $|z - 4i| < 2$ en el semiplano $\Im w > \Re w$, 2) el centro de la circunferencia en el punto -4, 3) el punto $2i$ de la circunferencia en el origen.

Solución. Vamos a resolver el ejericio de dos formas distintas.

A) Llamamos r a la recta $\Im w = \Re w$. La idea es transformar la circunferencia en r con dos parámetros libres que nos permitan ajustar la condición $f(4i) = 4$. Tomamos $w = f(z)$ con:

$$(w, 0, \infty, a + ia) = (z, 2i, 4i + 2e^{i\theta}, 6i).$$

Es decir:

$$\frac{2i}{i + e^{i\theta}} \frac{z - 4i - 2e^{i\theta}}{z - 6i} = \frac{a + ia}{a + ia - w}.$$

Ha de ser $w = -4$ para $z = 4i$ luego:

$$\frac{2e^{i\theta}}{i + e^{i\theta}} = \frac{a + ia}{a + ia - w},$$

$$\frac{i + e^{i\theta}}{2e^{i\theta}} = 1 - \frac{w}{a + ia},$$

$$\frac{i + e^{i\theta}}{2e^{i\theta}} = 1 - \frac{4}{a + ia},$$

$$\frac{4}{a(1+i)} = 1 - \frac{i+e^{i\theta}}{2e^{i\theta}},$$
$$\frac{1}{a} = \frac{1}{8}(1+i)(e^{i\theta}-i)e^{-i\theta}.$$

Ahora:
$$(1+i)(e^{i\theta}-i)e^{-i\theta} = 1+\cos\theta - \operatorname{sen}\theta + i(1-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta),$$

y debe ser:
$$1-\cos\theta-\operatorname{sen}\theta = 0,$$

luego nos vales $\theta = 0$.

En ese caso:
$$\frac{1}{a} = \frac{1}{8}(1+i)(1-i),$$

y $a = 4$. Así:
$$f(2i) = 0, \quad f(4i+2) = \infty, \quad f(6i) = 4(1+i).$$

Nótese que $f(4i) = -4$ ya garantiza que el interior de la circunferencia se transforma en el semiplano deseado.

B) La segunda solución se apoya en la noción de simétría con respecto a una circunferencia. Si C es la circunferencia
$$\Im(z, z_1, z_2, z_3) = 0,$$

y $z \in \mathbb{C}$, su simétrico respecto a C se define como el único z^* tal que:
$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

Se demuestra que si C es una recta entonces z^* es el simétrico de z con respecto a la recta, y que si C es $|z-z_0| = r$ entonces:
$$z^* - z_0 = r\frac{z-z_0}{|z-z_0|^2}.$$

Véase el libro de Conway ([1]). Es evidente que si f es cualquier transformación bilineal, $(f(z))^* = f(z^*)$ donde el primer simétrico se considera con respecto a la circunferencia transformada $f(C)$.

Para resolver el ejercicio observamos que si C es la circunferencia $|z-4i| = 2$ entonces:
$$(4i)^* = \infty,$$

mientras que el simétrico $(-4)^*$ de -4 respecto de r es:
$$(-4)^* = -4i.$$

Por tanto, la solución de nuestro problema es:
$$(w, 0, -4, -4i) = (z, 2i, 4i, \infty).$$

$\square$

9. Sea $S^2 = \{(\xi,\eta,\zeta) : \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1\}$, $T : S^2 \to \mathbb{C}_\infty$ la proyección de Steiner:

$$\Re T = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad \Im T = \frac{\eta}{1-\zeta} \qquad P \neq N,$$

$T(N) = \infty$. Demuéstrese que si C es una circunferencia en $\mathbb{C}_\infty$ entonces $T^{-1}(C)$ también es una circunferencia en S^2.

Solución.

Véase la parte de teoría.

$\square$

10. Pruébese que la proyección de Steiner $T : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ define un homeomorfismo.

Solución.

Véase la parte de teoría.

$\square$

11. ¿Qué transformación de la esfera S^2 asigna $T^{-1}(1/z)$ a $T^{-1}(z)$?

Solución.

Se trata de la aplicación:

$$(\xi,\eta,\zeta) \mapsto (\xi',\eta',\zeta')$$

con

$$\xi' = \xi, \qquad (\eta',\zeta') = -(\eta,\zeta).$$

Es decir, una rotación de ángulo π alrededor del eje x_1 de la esfera.

Nota. Más generalmente, puede probarse que toda rotación R de la esfera S^2 se representa en la forma $R = H \circ f \circ H^{-1}$ para una cierta transformación de Möbius $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, siendo H la proyección de Steiner.

$\square$

12. Hallar las imágenes inversas T^{-1} de los conjuntos: 1) $\Im z > 0$, 2) $\Im z < 0$, 3) $\Re z > 0$, 4) $\Re z < 0$, 5) $|z| < 1$, 6) $|z| > 1$.

Solución.

1) Hemisferio $x_2 > 0$.

2) Hemisferio $x_2 < 0$.

3) Hemisferio $x_1 > 0$.

4) Hemisferio $x_1 < 0$.

5) Hemisferio $x_3 < 0$.

6) Hemisferio $x_3 > 0$.

$\square$

13. Se define la distancia cordal d_c en $\mathbb{C}_\infty$ como:

$$d_c(z,z') = |T^{-1}(z) - T^{-1}(z')|, \qquad d_c(z,\infty) = |T^{-1}(z) - N|,$$

con $N = (0,0,1)$. Probar que:

$$d_c(z,z') = \begin{cases} \dfrac{|z-z'|}{(1+|z|^2)^{1/2}(1+|z'|^2)^{1/2}} & z, z' \in \mathbb{C} \\ \dfrac{1}{(1+|z|^2)^{1/2}} & z \in \mathbb{C}, z' = \infty. \end{cases}$$

Demostrar que $d_c(z,\infty) = \text{lím}_{z'\to\infty} d_c(z,z')$.

Solución. Consultar la parte de teoría. □

- *Continuidad, sucesiones, series*

14. Probar que los únicos automorfismos continuos de $\mathbb{C}$ son $f(z) = z$ y $f(z) = \bar{z}$.

Solución.

Usamos primero la aditividad. Como:

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2),$$

se tiene:

$$f(nz) = nf(z), \qquad f(-nz) = -nf(z), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

También:

$$nf(\frac{1}{n}) = f(z) \Rightarrow f(\frac{1}{n}z) = \frac{1}{n}f(z),$$

luego:

$$f(-\frac{1}{n}z) = -\frac{1}{n}z, \qquad f(qz) = qf(z),$$

con q un racional cualquiera. Usando la continuidad concluimos que $f(tz) = tf(z)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ pues $t = \text{lím}\, q_n$, $q_n \in \mathbb{Q}$ y

$$f(tz) = f(\text{lím}\, q_n z) = \text{lím}\, q_n f(z) = tf(z).$$

Ahora interviene la propiedad multiplicativa:

$$f(z_1 z_2) = f(z_1)f(z_2).$$

Lo primero que ocurre es que $f(1) = 1$ y

$$f(i)^2 = f(i^2) = f(-1) = -1 \Rightarrow f(i) = \pm i.$$

Finalmente

$$f(z) = f(x+iy) = x + yf(i).$$

Si $f(i) = i$, $f(z) = z$, si $f(i) = -i$, $f(z) = \bar{z}$.

Nota. Puede probarse que la continuidad es imprescindible para que una función aditiva sea lineal. Ejemplos de funciones aditivas que no son lineales fueron obtenidos por G. K. Hamel a principios del siglo XX. En su construcción hizo uso de la noción de base de un espacio vectorial de dimensión infinita.

$\square$

15. Se consideran las funciones $f, g : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ abierto. Si f, g continuas en $z_0 \in G$ pruébese que $\lambda f + \mu g$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, fg y f/g (en éste último caso añadiendo $g(z_0) \neq 0$) también son continuas en z_0. Si $h : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω abierto, $w_0 = f(z_0) \in \Omega$ y h es continua en w_0 demuéstrese que $h(f(z))$ es continua en z_0.

Solución. Copiar directamente la demostración del caso real.

$\square$

16. Probar que $|z|$ es Lipschitziana en $\mathbb{C}$ de constante 1.

Solución. En efecto:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

$\square$

17. Sea $f(z) = z^n$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Demostrar que u, v son polinomios homogéneos de grado n en x, y. Conclúyase de ahí que si $p(z)$ es un polinomio de grado n, $p(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces u, v son polinomios en x, y de grado n.

Solución. Si $z^n = u(x, y) + iv(x, y)$ está claro que u, v son polinomios en x, y de grado n. La homogeneidad sale de:

$$u(tx, ty) + iv(tx, ty) = (tz)^n = t^n z^n = t^n u(x, y) + it^n v(x, y),$$

luego $u(tx, ty) = t^n u(x, y)$ y $v(tx, ty) = t^n v(x, y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

$\square$

18. Sean $p(z), q(z)$ polinomios complejos, grado $q \leq$ grado p. El algoritmo de la división asegura la existencia de polinomios únicos $c(z), r(z)$, grado $r <$ grado q tales que:

$$p(z) = c(z)q(z) + r(z).$$

Úsese el teorema fundamental del álgebra para probar que si $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ es un polinomio complejo de grado $n \geq 1$ entonces existen $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$ y enteros $m_1, \ldots, m_s$, $m_1 + \cdots + m_s = n$ tales que:

$$p(z) = (z - a_1)^{m_1} \ldots (z - a_s)^{m_s}. \tag{1}$$

Conclúyase que la descomposición (1) es única.

19. [Polinomio de Taylor de un polinomio] Sea $p(z)$ un polinomio de grado n, $z, h \in \mathbb{C}$. Demostrar que:

$$p(z + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k!} h^k,$$

para coefcientes c_k que deben expresarse en función de z.

Solución.

Si

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = \sum_{l=0}^{n} a_l z^l,$$

entonces:

$$\begin{aligned} p(z+h) = \sum_{l=0}^{n} a_l (z+h)^l &= \sum_{l=0}^{n} a_l \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} h^k z^{l-k} \\ &= \sum_{k=n}^{n} \frac{h^k}{k!} \sum_{l=k}^{n} l(l-1)\dots(l-k+1) a_l z^{l-k} = \sum_{k=0}^{n} c_k h^k, \end{aligned}$$

donde:

$$c_k = \frac{1}{k!} \sum_{l=k}^{n} l(l-1)\dots(l-k+1) a_l z^{l-k}.$$

$\square$

20. Sea $p(z)$ un polinomio. Demuéstrese que $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$.

Solución.

Tomamos $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$ y se tiene:

$$|p(z)| \geq |a_0||z|^n - (|a_1||z|^{n-1} + \cdots + |a_n|),$$

de donde resulta evidente que $|p(z)| \to \infty$ cuando $|z| \to \infty$.

$\square$

21. Sea $f(z)$ una función racional, $z = a$ un cero del denominador. Pruébese la existencia de $\lambda \in \mathbb{C}$ y de $n \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ tales que:

$$f(z) \sim \lambda (z-a)^n \qquad z \to a.$$

Solución. Si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ y $z = a$ es un cero del denominador entonces

$$f(z) = \frac{(z-a)^k p_1(z)}{(z-a)^l q_1(z)},$$

con $p_1(a)$, $q_1(a)$ no nulos. Por tanto:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{\lambda (z-a)^n} = 1,$$

con $\lambda = \frac{p_1(a)}{q_1(a)}$, $n = k - l$.

$\square$

22. Demuéstrese que las funciones racionales $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ definen funciones continuas de $\mathbb{C}_\infty$ en $\mathbb{C}_\infty$.

Solución. La función f no está definida en los ceros de q. Para obtener una función continua en $\mathbb{C}_\infty$ definimos f en un cero ζ de q como

$$f(\zeta) = \lambda = \lim_{z\to\zeta} \frac{p(z)}{q(z)}.$$

En el peor de los casos $\lambda = \infty$ que es un elemento de $\mathbb{C}_\infty$. $\square$

23. Estudiar los límites:

$$a)\ \lim_{z\to i} 2z^2 - iz^3 + z\mathrm{Arg}\ \bar{z}, \quad b)\ \lim_{z\to i} \frac{z^4+1}{z+i}, \quad c)\ \lim_{z\to -i} \frac{z^4-1}{z+i}, \quad d)\ \lim_{z\to 2i} \frac{z^2-iz+2}{z^2+4},$$

$$e)\ \lim_{z\to 1} \frac{\sqrt{z}-1}{z-1}, \quad f)\ \lim_{z\to 0} \frac{e^z + z\ \mathrm{Log}\ z}{1-z^2\mathrm{Arg}\ z}, \quad d)\ \lim_{z\to 0} e^{-1/z^2}.$$

Solución. a) $-3 - i\frac{\pi}{2}$, , b) $-i$, c) $-4i$, d) $\frac{3}{4}$, e) $\frac{1}{2}$. En el caso de f) el límite es 1 pues:

$$\lim_{z\to 0} z\ \mathrm{Log}\ z = \lim_{z\to 0} z^2\mathrm{Arg}\ z = 0.$$

En el caso d) el límte no existe. Poniendo $\theta = \mathrm{Arg}\ z$ resulta:

$$e^{-1/z^2} = e^{\cos 2\theta/\rho^2} e^{-i\,\mathrm{sen}\, 2\theta/\rho^2},$$

y el límite cuando $\rho \longrightarrow 0+$ depende de θ. $\square$

24. Hallar el límite de $z_n = n(\sqrt[n]{z} - 1)$.

Solución.

Si $z = \rho e^{i\theta}$ con $\theta = \mathrm{Arg}\ z$ entonces:

$$z_n = n(\rho^{1/n}\cos\frac{\theta}{n} - 1) + in\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{n} = n\left(\rho^{1/n}(1 + \frac{a_n}{n^2}) - 1\right) + in\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{n},$$

donde a_n está acotada. Así:

$$\lim z_n = \lim n(\rho^{1/n} - 1) + i\theta = \lim n\left(\frac{\log\rho}{n} + \frac{b_n}{n}\right) + i\theta,$$

donde $\lim b_n = 0$. Por tanto:

$$\lim z_n = \log\rho + i\theta.$$

$\square$

25. Se sabe que la serie $\sum z_n$ converge con $|\text{Arg } z_n| \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Demostrar la convergencia de $\sum |z_n|$.

Solución. Poniendo $z_n = x_n + iy_n$, $\theta_n = \text{Arg } z_n$ se tiene que:

$$|\frac{y_n}{x_n}| = |\text{tag } \theta_n| \leq \text{tag } \alpha,$$

luego:

$$|z_n| \leq \{\sqrt{1 + \text{tag }^2\alpha}\}x_n = (\sec\alpha)x_n.$$

Como la serie $\sum x_n$ converge, la serie $\sum |z_n|$ también converge.

□

26. [Fórmula de sumación por partes]. Fijando $A_n = a_1 + \cdots + a_n$, probar que:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_{m-1}b_m.$$

Solución. Nótese que $a_k = A_k - A_{k-1}$ por tanto:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1}$$

$$= A_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) - A_{m-1}b_m$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_{m-1}b_m.$$

□

27. Supóngase que la sucesión $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ está acotada y que b_n es decreciente con $\lim b_n = 0$. Pruébese que la serie $\sum a_n b_n$ es convergente.

Solución. De acuerdo a la fórmula de sumación por partes

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |A_k|(b_k - b_{k+1}) + |A_n|b_n + |A_{m-1}|b_m \leq M(b_m - b_n + b_n + b_m) = 2Mb_m,$$

donde M es una cota de A_n. Como $b_n \to 0$ la serie es convergente porque cumple la condición de Cauchy. □

28. Demostrar que (criterio de Gauss):

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n}),$$

con $a_n > 0$, $a < -1$, implica la convergencia de $\sum a_n$. Como aplicación establézcase la convergencia de la serie hipergeométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{(n+1)!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)},$$

en el régimen $\Re(\alpha+\beta-\gamma) < 0$.

Solución.

Se sabe que:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + (a + o(1))\frac{1}{n} < 1 - \frac{1+\varepsilon}{n},$$

para $n \geq n_0$. Luego:

$$na_n < ((n-1) - \varepsilon)a_{n-1}).$$

Tomando $n > m \geq n_0$ resulta:

$$\begin{aligned} na_n &< (n-1)a_{n-1} - \varepsilon a_{n-1} \\ (n-1)a_{n-1} &< (n-2)a_{n-2} - \varepsilon a_{n-2} \\ &\vdots \\ (m+1)a_{(m+1)} &< ma_m - \varepsilon a_m, \end{aligned}$$

y sumando:

$$na_n < ma_m - \varepsilon \sum_{k=m}^{n} a_k,$$

es decir:

$$\varepsilon \sum_{k=m}^{n} a_k < ma_m.$$

Por tanto las sumas parciales de la serie están acotadas y la serie converge.

En cuanto a la serie geométrica llamamos:

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{(n+1)!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)},$$

y

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}.$$

Para estudiar la convergencia absoluta escribimos:

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} - 1 = \frac{|\alpha+n||\beta+n| - (n+1)|\gamma+n|}{(n+1)|\gamma+n|} \\ = \frac{|n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta| - |n^2 + (\gamma+1)n + \gamma|}{(n+1)|\gamma+n|}, \end{aligned}$$

de donde:

$$n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}-1\right)=b_nc_n\ n\{|1+\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{\alpha\beta}{n^2}|-|1+\frac{\gamma+1}{n}+\frac{\gamma}{n^2}|\}$$

con

$$b_n=\frac{n}{|\gamma+n|},\qquad c_n=\frac{n}{n+1}.$$

Ahora observamos que:

$$|z_1+1|-|z_2+1|=\frac{2\Re(z_1-z_2)+|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1+1|+|z_2+1|}.$$

Por tanto

$$\lim n\{|1+\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{\alpha\beta}{n^2}|-|1+\frac{\gamma+1}{n}+\frac{\gamma}{n^2}|\}=\Re(\alpha+\beta-\gamma-1),$$

y

$$\lim n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}-1\right)=\Re(\alpha+\beta-\gamma-1).$$

□

29. Estudiar la convergencia de las series:

$$a)\ \sum\frac{n}{(2i)^n},\quad b)\ \sum\frac{n!}{(in)^n},\quad c)\ \sum e^{in},$$

$$d)\ \sum\frac{e^{in}}{n},\quad e)\ \sum\frac{e^{\pi i/n}}{n},\quad f)\ \sum\frac{\cos in}{2^n}.$$

Solución.

Las series a), b) y f) son absolutamente convergentes. En el segundo caso se usa la estimación de Stirling,

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

para probar que:

$$\sum\left|\frac{n!}{(in)^n}\right|\leq M\sum\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}<\infty.$$

Las series c) y e) son divergentes. En el segundo caso porque su parte real:

$$\sum\frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n},$$

es claramente divergente.

La serie d) converge como muestra el criterio de Abel (Ejercicio 27).

□

Referencias

[1] CONWAY J. B., *Functions of one complex variable*, Springer, New York, 19**.

Soluciones a los ejercicios del Capítulo III

1. Estudiar la convergencia de las siguientes funciones en los dominios indicados:

a) $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^k$ en $\{|z| < 1\}$.

b) $f(z) = \sum \dfrac{1}{k^2 + z}$ en $\{\Re z > 0\}$.

Solución.

a) Para $|z| \leq r < 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|z^k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} kr^k,$$

y la última serie es claramente convergente. Por tanto la serie converge uniformemente en cada disco cerrado $\overline{D(0,r)}$ con $r < 1$.

b) En $\Re z \geq 0$ se tiene:

$$\frac{1}{|z+k^2|} \leq \frac{1}{\Re\{z+k^2\}} = \frac{1}{\Re z + k^2} \leq \frac{1}{k^2},$$

de donde se concluye la convergencia uniforme de la serie en $\Re z \geq 0$. □

2. Sea $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones uniformemente continuas en D, un abierto de $\mathbb{C}$, $f = \lim f_n$ uniformemente en D. Probar que f es también uniformemente continua en D. Supóngase además que las f_n son Lischitzianas de constante L_n con $\sup L_n < \infty$. Demostrar que f es Lipschitz en D. Estudiar qué sucede si se suprime la condición sobre las L_n.

3. Sea a_n una sucesión con $\lim a_n = l$. Probar que $\lim \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = l$. ¿Qué sucede si $l = \pm\infty$? Aprovéchese el resultado para probar que si a_n es una sucesión de términos positivos con:

$$\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = l,$$

entonces $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$.

Solución. El resultado sobre el límite de la media aritmética implica claramente la fórmula final. En efecto:

$$c_n = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1},$$

luego

$$\lim \log c_n = \log(\lim \frac{a_n}{a_{n-1}}),$$

de donde se deduce la fórmula para el límite de la raíz n-ésima.

En el caso del límite de la media aritmética ponemos:

$$\begin{aligned}|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-l| &\leq \frac{|l-a_1|+\cdots+|l-a_{n_\varepsilon-1}|}{n}+\frac{|l-a_{n_\varepsilon}|+\cdots+|l-a_n|}{n}\\ &\leq \frac{|l-a_1|+\cdots+|l-a_{n_\varepsilon-1}|}{n}+\frac{n-n_\varepsilon}{n}\frac{\varepsilon}{2}\leq \frac{|l-a_1|+\cdots+|l-a_{n_\varepsilon-1}|}{n}+\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

si suponemos que $|a_n-l|\leq \frac{\varepsilon}{2}$ para $n\geq n_\varepsilon$ y tomamos arriba $n>n_\varepsilon$. Consecuentemente, la diferencia anterior es menor que ε si n se toma suficientemente grande como para que el primer término sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. □

4. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias para la que existe:

$$\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=R.$$

Calcúlese su radio de convergencia.

Solución. El radio de convergencia es, evidentemente, R (teorema de Hadamard).

□

5. Calcular los valores de aglomeración de las sucesiones: a) $z_n=n^{-1}+(-1)^n$, b) $z_n=2^{-n}+(-1)^n+i^n$, c) $z_n=[2+\cos(n\pi)]e^{2n\pi i/5}$, d) $z_n=\operatorname{sen}(n\pi/2)+i\cos(n\pi/6)$, e) $z_n=n\operatorname{sen}(n\pi/2)+i\cos(n\pi/6)$.

Solución.

a) $\{\pm 1\}$, b) $\{0,2,-1\pm i\}$, c) $\{3,e^{2\pi i/5},3e^{4\pi i/5},e^{6\pi i/5},3e^{8\pi i/5}\}$,

d) La sucesión $\cos(n\pi/6)$ toma 6 valores distintos correspondientes a $n=\dot{6}+k$ con $k\in\{0,\ldots,5\}$, es decir $n=6m+k$. En efecto:

$$\cos(n\pi/6)=\cos(3m\pi+\frac{k\pi}{2})=\cos(m\pi)\cos(\frac{k\pi}{2})=(-1)^m\cos(\frac{k\pi}{2}).$$

Se concluye que:

$$z_n=(-1)^m(\cos\frac{k\pi}{2}+i\cos\frac{k\pi}{6}),\qquad k\in\{0,\ldots,5\}$$

y los valores de aglomeración son:

$$\lambda_k^{\pm}=\pm(\cos\frac{k\pi}{2}+i\cos\frac{k\pi}{6}),\qquad k\in\{0,\ldots,5\}.$$

e) La sucesión tiene la forma:

$$z_n=(-1)^m((6m+k)\cos\frac{k\pi}{2}+i\cos\frac{k\pi}{6}),\qquad k\in\{0,\ldots,5\},$$

para $n=6m+k$. Los valores de aglomeración son entonces:

$$\{\pm i\cos\frac{k\pi}{6}:k=1,3,5\}\cup\{\infty\}.$$

□

6. Probar que $\underline{\lim}\, a_n, \overline{\lim}\, a_n$ son valores de aglomeración de a_n. Comprobar asimismo que la convergencia de a equivale a la igualdad de tales límites (N. B. estamos incluyendo en "convergencia" los casos $a_n \to \pm\infty$).

7. Sean a_n, b_n son sucesiones tales que $\lim a_n = a > 0$. Probar que $\underline{\lim}\, a_n b_n = a\, \underline{\lim}\, b_n$, $\overline{\lim}\, a_n b_n = a\, \overline{\lim}\, b_n$.

8. Sea $z = e^{i\theta}$ donde $\dfrac{\theta}{\pi}$ es racional. Estúdiense los valores de aglomeración de z^n.

   Solución. Si
$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{q},$$
   con $(p, q) = 1$ entonces la órbita de la sucesión es finita:
$$\{z_n : n \in \mathbb{N}\} = \{e^{i\frac{2k\pi}{q}} : k = 0, \ldots, q-1\}$$
   Por tanto tales puntos son sus valores de aglomeración (se toman infinitas veces cada uno). □

9. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias de radio r. Demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$ la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{n-k}$ también tiene radio de convergencia r.

   Solución. Como:
$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{n-k} = \frac{1}{z^k} \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$$
   para $z \neq 0$ y el radio de convergencia de $\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n$ es r, el radio de $\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{n-k}$ también es r. □

10. Hallar el radio de convergencia de las series:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n.$$
    Solución. En el orden del enunciado los radios de convergencia son: 1) $\rho = \infty$, 2) $\rho = \infty$, 3) $\rho = e$, 4) $\rho = \infty$.

    □

11. Se sabe que el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $r > 0$. Hallar el radio de convergencia de las series:
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^p a_n z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n.$$
    Solución. 1) r, 2) r, 3) r^2. □

12. Hallar el radio de convergencia de cada una de las siguientes series:

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n, \quad a \in \mathbb{C} \qquad c)\quad \sum_{n=0}^{\infty} k^n z^n, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n, \quad a \in \mathbb{C}, \qquad d)\quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$$

Solución. a) $|a|^{-1}$, b) $\rho = \infty, 1, 0$ dependiendo de si $|a| < 1$, $|a| = 1$ o $|a| > 1$, respectivamente.

c) $\rho = |k|^{-1}$, d) $\rho = 1$.

□

13. Usar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y el producto de series para calcular la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$

Solución. Se tiene:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} z^n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

luego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

□

14. Demostrar que el radio de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)},$$

es 1, discutiendo la convergencia de la serie en los valores $z = 1, -1, i$.

Solución. El radio de convergencia es claramente 1 (Hadamard).

Como $n(n+1)$ es un número par, $(-1)^{n(n+1)} = 1$ y la serie converge en $z = \pm 1$.

Se tiene además que $(-1)^n i^{n(n+1)} = (-1)^k$ si $n = 2k$, $(-1)^n i^{n(n+1)} = (-1)^{k+1}$ si $n = 2k-1$ luego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} i^{n(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1},$$

y las dos últimas series son convergentes en virtud de criterio de Abel (Capítulo II). □

15. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ se introduce la serie binomial:

$$1 + \lambda z + \cdots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} z^n + \cdots .$$

Pruébese que tiene radio de convergencia 1. Llamamos $f_\lambda(z)$ a la función definida por la serie en $|z| < 1$

a) Determinar f_λ para $\lambda \in \mathbb{N}$.

b) Calcular $f_{-1}(z)$.

c) Calcular $f_{-n}(z)$, $n \in \mathbb{N}$.

d) Probar que $f_{-n}(z) = (1+z)^{-n}$. A tal fin comprúebese que:

$$(1+z)^n f_{-n}(z) = 1,$$

para todo $z \neq -1$.

Solución. Es evidente que el radio de convergencia es 1 (Hadamard).

Por otra parte:

$$f_n(z) = (1+z)^n,$$

mientras:

$$f_{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}.$$

lo cual da respuesta a las cuestiones a), b).

Para dar respuesta a las cuestiones c) y d) probamos por inducción la identidad siguiente:

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\dots(\alpha+\beta-n+1) = \binom{n}{0}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) + \dots + \binom{n}{k}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+k+1) + \dots + \binom{n}{n}\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1). \tag{0.1}$$

La igualdad implica que:

$$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\dots(\alpha+\beta-n+1)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+k+1)}{k!(n-k)!} + \dots + \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{n!}.$$

El segundo miembro es el coeficiente de z^n en el producto de las series f_α y f_β, mientras el primer miembro es el coeficiente de z^n en la serie $f_{\alpha+\beta}$. Por tanto se concluye que

$$f_{\alpha+\beta} = f_\alpha f_\beta. \tag{0.2}$$

De aquí:

$$f_n = (f_{-1})^n = (1+z)^{-n}.$$

La fórmula (0.2), probada en esta manera intrínseca, reviste gran interés. Por ejemplo:

$$(f_{\frac{1}{2}})^2 = 1+z,$$

y $f_{\frac{1}{2}}$ define una representación analítica directa de la raíz cuadrada de $1+z$ en $|z|<1$.

La identidad (0.1) se prueba por inducción. Llamando I_n al primer miembro:

$$I_n = \alpha I_{n-1} + \beta I_{n-1}.$$

Conviene escribir el primer sumando como:

$$\begin{aligned}\alpha I_{n-1} &= \alpha(\{\alpha-1\}+\beta)\dots(\{\alpha-1\}+\beta-(n-2))\\ &= \alpha\binom{n-1}{0}(\alpha-1)\dots(\alpha-1-(n-2))+\dots+\\ &\alpha\binom{n-1}{k}(\alpha-1)\dots(\alpha-1-(k-1))\beta(\beta-1)\dots(\beta-(n-1-k-1))+\dots+\\ &\alpha\binom{n-1}{0}\beta(\beta-1)\dots(\beta-(n-2)),\end{aligned}$$

en cuyo desarrollo hemos usado la hipótesis de inducción.

En cuanto al segundo ponemos:

$$\begin{aligned}\beta I_{n-1} &= \beta(\alpha+\{\beta-1\})\dots(\alpha+\{\beta-1\}-(n-2))\\ &= \beta\binom{n-1}{0}\alpha\dots(\alpha-(n-2))+\dots+\\ &\beta\binom{n-1}{l}\alpha\dots(\alpha-(l-1))(\beta-1)\dots(\beta-1-(n-1-l-1))+\dots+\\ &\beta\binom{n-1}{0}(\beta-1)\dots(\beta-1-(n-2)).\end{aligned}$$

Al efectuar la suma $\alpha I_{n-1}+\beta I_{n-1}$ el término de índice k en el primer sumando se agrupa con el término de índice $k+1$ del segundo sumando para dar:

$$\begin{aligned}&\left(\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k+1}\right)\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)\beta(\beta-1)\dots(\beta-(n-k-2))\\ &= \binom{n}{k+1}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+k+2)).\end{aligned}$$

Procediendo con todos los términos concluimos que:

$$\alpha I_{n-1}+\beta I_{n-1} = I_n,$$

que es lo que se buscaba. □

16. Desarrollar $\operatorname{senh} z$, $\cosh z$ en serie de potencias de z.

Solución.

Basta observar que

$$\operatorname{senh} z = i\operatorname{sen}(-iz) \qquad \cosh z = \cos(-iz).$$

□

17. Compruébese que:

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$$
$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y.$$

18. Usando la definición de las funciones $\operatorname{sen} z, \cos z$ pruébense las relaciones clásicas:

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1, \qquad \cos(-z) = \cos(z), \qquad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z,$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \operatorname{sen} z, \qquad \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - z) = \cos z,$$
$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w, \quad \operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w,$$
$$1 + \operatorname{tag}\,^2 z = \sec^2 z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z.$$

19. Demostrar que los ceros de las funciones $\cos z, \operatorname{sen} z$ coinciden con los de sus restricciones al eje real.

Solución. Si $\operatorname{sen} z = 0$ es porque:

$$e^{2iz} = 1 \qquad \Rightarrow \quad 2z = 2k\pi \qquad \Rightarrow \quad z = k\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$, que son los ceros de $\operatorname{sen} x$ como función real. El caso del coseno se trata de la misma forma.

□

20. Determínese el mayor dominio G donde $\operatorname{Log}(z^3 + 1)$ es continua.

Solución. La función Log es discontinua en $\{z \leq 0\}$ por lo que $f(z) = \operatorname{Log}(z^3 + 1)$ es discontinua en los puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$z^3 + 1 \in \{w \leq 0\}.$$

Se comprueba que tales puntos son los del segmento $(-\infty, 1]$ y sus rotaciones de ángulo $\frac{2\pi}{3}$, es decir:

$$(-\infty, 1] \cup e^{\frac{2\pi}{3}i}(-\infty, 1] \cup e^{\frac{4\pi}{3}i}(-\infty, 1].$$

□

21. Probar que la restricción $f(z)$ de $\operatorname{tag} z$ a $G^* = \{-\frac{\pi}{2} < \Re z \leq \frac{\pi}{2}, z \neq \frac{\pi}{2}\}$ es biyectiva sobre su imagen $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Demostrar que:

$$g(z) := f^{-1}(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right).$$

Pruébese que dicha función es continua en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ti : t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$. Se denomina al par (g, Ω) la “rama” principal de la función arcotangente $g(z) = \operatorname{Arctag} z$.

Solución. La tangente cumple:

$$\operatorname{tag}(z + \pi) = \operatorname{tag} z,$$

luego tag z no puede ser inyectiva en bandas $a \leq \Re z \leq a + l$ si $l \geq \pi$.

La aplicación e^{2iz} es biyectiva de G^* en $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0\}$. La aplicación

$$h(\zeta) = i\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}$$

es biyectiva de $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0\}$ en $\Omega^* =: \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, luego tag z lo es de G^* en Ω^*.

Además

$$\text{tag}\,(\frac{\pi}{2} - ti) = -\text{tag}\,(\frac{\pi}{2} + ti),$$

pues

$$\text{tag}\,(\frac{\pi}{2} - ti) = -\text{tag}\,(-\frac{\pi}{2} + ti) = -\text{tag}\,(\frac{\pi}{2} + ti).$$

Ya se probó (véase la parte de teoría) que tag $(\frac{\pi}{2} + i(0, \infty)) = i(1, \infty)$.

La función

$$\frac{1}{2i}\,\text{Log}\,\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$$

invierte a la tangente en $\Omega^* = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

Es discontinua en los z tales que

$$\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \leq 0,$$

es decir $T^{-1}((-\infty, 0])$ donde $T(z) = 1 + iz/1 - iz$. Resulta que

$$T^{-1}(z) = -i\frac{z - 1}{z + 1},$$

y que

$$T^{-1}((-\infty, 0]) = i(-\infty, -1) \cup i[1, \infty).$$

Por tanto (g, Ω) con $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i(-\infty, -1) \cup i[1, \infty)\}$ define una rama de inverso de la tangente. □

22. Demostrar que la función:

$$g(z) = -i\,\text{Log}\,(\sqrt{1 - z^2} + iz),$$

es continua en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \leq -1, z \geq 1\}$ y cumple $\text{sen}(g(z)) = z$. Se la conoce como la "rama" principal de la función arcoseno: $f(z) = \text{Arcsen}\, z$.

Solución. Nos centramos en la continuidad de g pues las otras cuestiones han sido ya tratadas en la teoría. Ahora $\sqrt{1 - z^2}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ y ya hemos visto que $\Re(\sqrt{1 - z^2} + iz) > 0$ para $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, de donde concluimos la continuidad.

□

23. Determinar una función continua g definida en $G := \mathbb{C} \setminus \{x \leq -1, x \geq 1\}$ tal que $\cos(g(z)) = z$ en G. *Indicación.* Úsese la función Arcsen z.

Solución. Como

$$\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \operatorname{sen} z,$$

entonces

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsen } z) = \operatorname{sen} \text{Arcsen } z = z.$$

Luego:

$$g(z) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsen } z.$$

□

24. Dada $f(z) = \sec z$, pruébese que $g(z) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsen}\left(\frac{1}{z}\right)$ es continua en $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ y que $\sec(g(z)) = z$ para todo $z \in G$.

Solución. Como $z \mapsto \frac{1}{z}$ aplica $[-1, 1]$ en $\mathbb{R}_\infty \setminus (-1, 1)$ entonces $\operatorname{arc\,sen} \frac{1}{z}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ y claramente:

$$\sec(\text{Arcsen } \frac{1}{z}) = z.$$

□

25. Pruébese que todo polinomio $p(z)$ define una función entera. Hallar su desarrollo en serie de potencias de $z - z_0$.

Solución. Basta usar la fórmula de Taylor para polinomios (Capítulo II) para desarrollar $p(z)$ como una suma finita de potencias de $z - z_0$.

□

26. Demuéstrese que los polinomios complejos son sobreyectivos. ¿Y las funciones racionales? ¿y las enteras?

Solución. Que los polinomios complejos son sobreyectivos es consecuencia del teorema fundamental del álgebra. Por la misma razón si una función racional toma la forma:

$$r(z) = \frac{a_0 z^n + \cdots + a_n}{b_0 z^m + \cdots + b_m} \qquad a_0 b_0 \neq 0,$$

entonces sólo excluye el valor a_0/b_0 cuando $n = m$, en los restantes casos es sobreyectiva.

Las funciones enteras pueden no ser sobreyectivas como muestra el ejemplo de la exponencial e^z que excluye el valor 0. No obstante, es consecuencia de un teorema de Picard que una función entera excluye a lo sumo un valor complejo.

□

27. Estúdiese la sobreyectividad de las funciones seno y coseno (véase el Ejercicio 22).

28. Pruébese que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$ en $|z| < r$ entonces $a_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Haciendo $z = 0$ sale $a_0 = 0$. Entonces

$$f(z) = zf_1(z), \qquad f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}.$$

Al ser $f_1(z) = 0$ para todo $z \neq 0$ resulta, por continuidad, $f_1(0) = 0$, luego $a_1 = 0$. Se procede de esta forma para concluir que todos los coeficientes $a_n = 0$.

□

29. Calcular el desarrollo en serie de potencias de $z - z_0$ de la función:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con $z_0 \neq -d/c$, $c \neq 0$.

Solución. Podemos escribir

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{az_0 + b}{c}\left(\frac{1}{z - z_0}\right).$$

Basta entonces con representar la última fracción en serie de potencias de $z - z_1$ para $z_1 \neq z_0$. Esto es sencillo pues:

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_1 + z_1 - z_0} = \frac{1}{z_1 - z_0}\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_1}{z_0 - z_1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z_1 - z_0)^{n+1}}(z - z_1)^n,$$

siendo la serie convergente en $|z - z_1| < |z - z_0|$.

□

30. Usando la descomposición en fracciones simples demuéstrese que toda función racional $f(z)$ es analítica en su dominio de definición G. Dado un $z_0 \in G$ ¿qué mide el radio de convergencia de su desarrollo en serie de potencias de $z - z_0$?

Solución. Usando la descomposición en fracciones simples escribimos la función como la suma de un polinomio y términos de la forma:

$$\frac{a}{(z - z_0)^n}.$$

Estas fracciones son –como consecuencia del ejercicio anterior– analíticas en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Por tanto la función es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_M\}$ donde $\{z_1, \ldots, z_M\}$ designa el conjunto de ceros del denominador. □

31. Desarrollar en serie de potencias las funciones:

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2}, \qquad g(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}, \qquad h(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^3},$$

en cada uno de los puntos a de sus dominios de definición (que son el mismo).

Solución. Véanse los ejercicios anteriores.

□

32. Supóngase que $f(z)$ es analítica en un dominio G. Definiendo $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ en el dominio $z \in \overline{G} := \{z : \bar{z} \in G\}$ demostrar que g también es analítica.

Solución. Si $z_0 \in \overline{G}$ entonces $\bar{z}_0 \in G$ y como f es analítica, entonces:

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta - \bar{z}_0)^n,$$

para $|\zeta - \bar{z}_0| < r$. Por tanto:

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\bar{z} - \bar{z}_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n(z - z_0)^n,$$

para $|z - z_0| < r$, y hemos terminado.

$\square$

33. Supongamos que $f(z)$ es analítica y no constante en un dominio G. Demostrar que $\overline{f(z)}$ no puede ser analítica en G.

Solución. Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

y

$$\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

resulta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n$$

es real para $|z - z_0|$ pequeño. Tomando $z - z_0 = \lambda t$ con t real resulta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\lambda^n t^n$$

es real para $|t|$ pequeño, lo que significa que los números

$$(a_n + b_n)\lambda^n \in \mathbb{R}$$

para $n \geq 1$ y $|\lambda| = 1$. Esto obliga a $a_n + b_n = 0$ para todo $n \geq 1$.
Como

$$\frac{f(z) - \overline{f(z)}}{i}$$

es real, un argumento similar prueba que:

$$\frac{a_n - b_n}{i}\lambda^n = 0,$$

para todo $n \geq 1$ y $|\lambda| = 1$. Por tanto $a_n - b_n = 0$ para $n \geq 1$ y con la conclusión anterior se llega a que:

$$f(z) = a_0,$$

en $D(z_0, r)$ y f es localmente constante. Por otro lado el conjunto:

$$\{z \in G : f(z) = a_0\},$$

es abierto y cerrado en G con lo que coincide con G y f es constante. Como esto va contra lo supuesto, $\overline{f(z)}$ no puede ser analítica. □

34. Una serie de potencias formal en $z = \infty$ se define como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

$a_n \in \mathbb{C}$. Se define el radio de convergencia r de la serie como

$$r = \text{ínf}\{|z| : \text{la serie converge en } z,\ z \neq 0\},$$

poniendo $r = 0$ si la serie diverge en todo z. Obténgase una expresión –al estilo Hadamard– del radio de convergencia de la serie, probando que ésta constituye una función continua en $|z| > r$, con límite finito en el infinito.

Solución. La serie converge en un punto $z \neq 0$ si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \tag{0.3}$$

converge en $\zeta = \dfrac{1}{z}$. Por tanto la cantidad ínf $|z|$ donde la serie converge es ínf $\dfrac{1}{|\zeta|} = \dfrac{1}{\sup|\zeta|}$ con los ζ variando de forma que la serie (0.3) converge. El radio de convergencia es así:

$$r = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}.$$

□

35. Se dice que un dominio G contiene al punto del infinito si $G \supset \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ para algún disco de $\mathbb{C}$. Diremos que $f : G \to \mathbb{C}$ es analítica en $G \cup \{\infty\}$ si es analítica en G (Definición **??**) y se representa por una serie de potencias en $z = \infty$ en un entorno $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ de dicho punto. Pruébese que f es analítica en $G \cup \{\infty\}$ si y sólo si $g(z) = f(1/z)$ es analítica en $\Omega = \{\dfrac{1}{z} : z \in g\}$ y además admite una extensión analítica a un cierto disco $D(0, R)$.

Pruébese que toda función racional $f(z)$ acotada cuando $z \to \infty$ es analítica en el infinito.

Solución. Como $\frac{1}{z}$ es analítica, g en analítica en Ω por ser composición de funciones analícticas. Por otra parte, si f es la suma de una serie en el infinito,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

donde la serie converge para $|z| > r$. Por tanto:

$$g(z) = f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

es convergente en $|z| < r^{-1}$ y la serie del segundo miembro define la extensión analítica de g a la bola $D(0, r^{-1})$. Luego g es analítica en $\Omega \cup \{0\}$.

Si

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

con p, q polinomios, está acotada cuando $z \to \infty$ es porque el grado de p es menor o igual que el grado de q y f se escribe –tras posible división polinómica– como la suma de una constante compleja, más términos de la forma (fracciones simples):

$$\frac{a}{(z - z_j)^m}.$$

Éstos se representan con desarrollos en $z = \infty$. Basta hacer $\zeta = \dfrac{1}{z}$ para tener:

$$\frac{a}{(z - z_j)^m} = \frac{a\zeta^m}{(1 - z_j\zeta)^m} = a\left(\sum_{k=0}^{\infty} z_j^k \zeta^{k+1}\right)^m$$

que define una serie de potencias en $\dfrac{1}{z}$, convergente para $|z| > |z_j|$.

$\square$

36. Hallar el desarrollo de $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ en serie de potencias de $1/z$ ($c \neq 0$).

    Solución. Siguiendo las instrucciones del ejercicio anterior:

$$f(z) = \frac{b\zeta + a}{d\zeta + c} = \frac{b}{d} + \frac{\delta}{c}\frac{1}{1 + \frac{d}{c}\zeta} = \frac{b}{d} + \frac{\delta}{c}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{d}{c}\right)^n \frac{1}{z^n}\right).$$

    La serie converge si $|z| > \frac{d}{c}$. $\square$

Complementos

1. Demuéstrese que:

$$\operatorname{sen} z \sim z, \qquad \cos z - 1 \sim -\frac{z^2}{2}, \qquad \operatorname{tag} z \sim z, \qquad e^z - 1 \sim z, \qquad \operatorname{Log}(1 + z) \sim z$$

    cuando $z \to 0$. A tal efecto resulta de utilidad el Ejercicio 9.

    Solución. Se tiene que:

$$\operatorname{sen} z = z + z^3\left(\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k-4}}{(2k-1)!}\right) = z + z^3 g(z),$$

donde g es continua en $z = 0$. De ahí está claro que:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1.$$

Análogamente:

$$\cos z - 1 = -\frac{z^2}{2} + z^4 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-4}}{2k!} = -\frac{z^2}{2} + z^4 h(z),$$

donde de nuevo h es continua en $z = 0$ y por tanto:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{-\frac{z^2}{2}} = 1.$$

Finalmente:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{tag} z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\cos z} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1.$$

En los dos casos restantes se procede de idéntica manera. En particular, si

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1,$$

y llamamos $w = e^z - 1$, $z = \operatorname{Log}(w + 1)$ y concluimos:

$$\lim_{w \to 0} \frac{w}{\operatorname{Log}(w + 1)} = 1.$$

$\square$

Soluciones a los ejercicios del Capítulo IV

1. ¿En qué puntos es derivable la función $f(z) = |z|^2$?

   Solución. Siendo $f = x^2 + y^2$ y $v = 0$ la función sólo es derivable en $z = 0$.

   $\square$

2. Estudiar la validez de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$ para la función $f(z) = \sqrt{|xy|}$. ¿Es derivable en el origen?, ¿es derivable en algún otro punto?

   Solución. Siendo $v = 0$ la función f es diferenciable desde el punto de vista real en $xy \neq 0$ pero no lo es allí como función compleja.

   Por otra parte u_x no existe en los puntos $(0, y)$, $y \neq 0$, u_y tampoco existe en los puntos $(x, 0)$, $x \neq 0$.

   Finalmente $u_x = u_y = 0$ en $(0, 0)$ –luego se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en el origen– sin embargo, para $\lambda = 0$:

   $$f(z) - f(0) - \lambda z = \sqrt{|xy|} = r\sqrt{\frac{1}{2}|\operatorname{sen} 2\theta|}.$$

   Como no es cierto que $r^{-1}|f(z) - f(0) - \lambda z| \to 0$ cuando $r \to 0$ la función no es diferenciable desde el punto de vista real.

   Conclusión: f no es derivable en punto alguno.

   $\square$

3. Estudiar la diferenciabilidad de la función $f(z) = x^2 + iy^2$.

   Solución. La función es derivable en $\{x = y\}$.

   Nótese que esta función no es derivable en ningún abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ por tanto carece de todo interés.

   $\square$

4. Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones:

   a) tag z, *b*) cotang z, *c*) sec z, *d*) cosec z, *e*) arctag z,

   f) arcsen z, *g*) arccosen z, *h*) arcsec z, *i*) arccosec z,

   en donde para las funciones circulares inversas "arc" se toman las ramas principales (ver los Ejercicios del Capítulo III).

   Solución. Las derivadas de las funciones tag z, cotang z, sec z y cosec z coinciden con las de las correspondientes funciones reales, con la variable independiente tomando valores en $\mathbb{C}$.

   Se ha probado en el presente capítulo que todas las ramas de inversa g de la tangente ("ramas de la arcotangente") tienen derivada:

   $$g' = \frac{1}{1 + z^2}.$$

En el caso de las funciones arcoseno $g(z)$ $(z \in \Omega)$ se ha de cumplir que:

$$g'(z) = \pm \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

En el caso de la función Arcsen z se tiene:

$$\text{Arcsen}\,'z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

como se comprueba usando la identidad (Capítulo III):

$$\text{Arcsen}\ z = -i\ \text{Log}\ \{iz + \sqrt{1-z^2}\}.$$

Usando los ejercicios del Cap. III se tiene que:

$$\text{Arccos}\ z = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsen}\ z,$$

de donde

$$\text{Arccos}\,'z = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Asimismo:

$$\text{Arcsec}\ z = \text{Arccos}\ \left(\frac{1}{z}\right), \qquad \text{Arcosecp}\ z = \text{Arcsen}\ \left(\frac{1}{z}\right),$$

luego:

$$\text{Arcsec}'\ z = -\frac{1}{z^2\sqrt{1-z^{-2}}}, \qquad \text{Arcosecp}'\ z = \frac{1}{z^2\sqrt{1-z^{-2}}}.$$

□

5. Compruébense las siguientes relaciones:

$$a)\ \text{Argch}\ z = \ \text{Log}\ (z + \sqrt{z^2-1}), \qquad b)\ \text{Argsh}\ z = \ \text{Log}\ (z + \sqrt{z^2+1}),$$

$$c)\ \text{Argth}\ z = \frac{1}{2}\ \text{Log}\ \frac{z+1}{z-1},$$

donde se ha usado la rama principal de la raíz cuadrada. Calcúlense las derivadas de dichas funciones.

Solución. Este ejercicio nos sirve para introducir las ramas principales de las inversas de las funciones hiperbólicas.

Comenzamos con Argsh z. Se tiene:

$$\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen} iz.$$

Así:

$$w = \operatorname{senh} z \quad \Leftrightarrow w = -i \operatorname{sen} iz \quad \Leftrightarrow z = -i\text{Arcsen}\ iw.$$

Por tanto:

$$z = -\text{ Log }(-w + \sqrt{1+w^2}) = \text{ Log }(w + \sqrt{1+w^2}),$$

donde se ha usado que $\text{ Log }\dfrac{1}{z} = -\text{ Log }z$. Así,

$$\text{Argsh } z = \text{ Log }(z + \sqrt{1+z^2}),$$

y su dominio de holomorfía es $\Omega \setminus \{\pm ti : t \geq 1\}$. Por tanto:

$$\text{Argsh }' z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Para Argth z se razona igual:

$$\tanh z = w \quad \Leftrightarrow w = -i\text{tag } iz \quad \Leftrightarrow z = -i\text{Arctag } iw,$$

por tanto:

$$z = -\frac{1}{2}\text{ Log }\left(\frac{1-w}{1+w}\right) = \frac{1}{2}\text{ Log }\left(\frac{1+w}{1-w}\right).$$

De aquí:

$$\text{Argth } z = \frac{1}{2}\text{ Log }\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

y su dominio de holomorfía es $\mathbb{C} \setminus \{z \leq -1, z \geq 1\}$. Usando la fórmula precedente o razonando como en el caso de la arcotangente se concluye que:

$$\text{Argth }' z = \frac{1}{1-z^2}.$$

Nos ocupamos finalmente del coseno hiperbólico. Conviene aquí proceder como en el caso real. A saber:

$$w = \cosh z \quad \Leftrightarrow e^2 z - 2we^z + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad e^z = w \pm \sqrt{w^2-1}.$$

La elección de la función "argumento principal del cosh" consiste en tomar el signo "+", como en el caso de la correspondiente función real. Así:

$$g(z) = \text{ Log }(z + \sqrt{z^2-1}),$$

es la extensión compleja de la función Argch x, $x \in \mathbb{R}$. La función $\sqrt{z^2-1}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{\Re z = 0\} \cup [-1,1]$ que no es conexo. Como $\cosh x \in (1,\infty)$ para $x > 0$, tomamos como dominio de g el conjunto:

$$\Omega = \{\Re z > 0\} \setminus [0,1].$$

La función g es holomorfa en Ω porque $\Re(z + \sqrt{z^2-1}) > 0$ en Ω. Además, esto implica que:

$$g(\Omega) \subset \{|\Im z| < \frac{\pi}{2}\}.$$

Como (g, Ω) es una rama de inversa de $\cosh z$ es entonces inyectiva. Además es abierta porque:

$$g'(z) \neq 0$$

en Ω y podemos aplicar el teorema de la función inversa. Por tanto $G = g(\Omega)$ es un dominio. Con esto se alcanzan en principio los objetivos del apartado a) si añadimos adem'as que:

$$\text{Argch}\,' z = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

No obstante se puede dar más información sobre $G = g(\Omega)$. Por un lado que:

$$g(\Omega) = G \subset \{|\Im z| < \frac{\pi}{2}\} \cap \{\Re z > 0\}.$$

Esto es consecuencia de que

$$|z + \sqrt{z^2 - 1}| \neq 1$$

en Ω. De hecho tal cantidad siempre es mayor que la unidad. En efecto,

$$|z + \sqrt{z^2 - 1}|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow |z|^2 + |z^2 - 1| + 2\Re\sqrt{z^2 - 1}\bar{z} = 1,$$

es decir,

$$|z^2 - 1|^2 + 4(\Re\sqrt{z^2 - 1}\bar{z})^2 + 4|z^2 - 1|\Re\sqrt{z^2 - 1}\bar{z} = (1 - |z|^2)^2,$$

de donde

$$2(|z|^2 - \Re z^2) + 4(\Re\sqrt{z^2 - 1}\bar{z})^2 + 4|z^2 - 1|\Re\sqrt{z^2 - 1}\bar{z} = 0,$$

$$2y^2 + 4(\Re\sqrt{z^2 - 1}\bar{z})^2 + 4|z^2 - 1|\Re\sqrt{z^2 - 1}\bar{z} = 0.$$

Como la expresión original es invariante frente a conjugación podemos suponer que $y > 0$ ya que si $y = 0$, z es real y entonces $|z + \sqrt{z^2 - 1}| > 1$. Como los restantes términos de la expresión anterior son no negativos, esto es imposible y concluimos que:

$$|z + \sqrt{z^2 - 1}| > 1$$

en Ω.

Finalmente, $\cosh z$ aplica la región

$$\mathcal{B} =: \{|\Im z| < \frac{\pi}{2}\} \cap \{\Re z > 0\}$$

en Ω pues $\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$. De aquí:

$$G(\Omega) = \mathcal{B}.$$

$\square$

6. Estudiar la derivabilidad de la función $\log(\log(\log z))$.

   Solución. $f(z) = \log(\log(\log z))$ es composición de $\log z$ con $\log(\log z)$. Ésta es derivable en $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 1\}$ pues
$$\log z \leq 0,$$
   significa que $\log|z| \leq 0$ junto con $\text{Arg } z = 0$. La última condición dice que $z > 0$, la primera $z \leq 1$. Luego $\log(\log z)$ es derivable en los restantes puntos es decir en $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 1\}$.

   Para encontrar los puntos de derivabilidad de $f(z)$ hay que excluir los z tales que:
$$\log(\log z) \leq 0,$$
   es decir:
$$\begin{cases} \log(|\log z|) \leq 0 \\ \text{Arg } (\log z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\log z| \leq 1 \\ \log z \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log|z|^2 + \text{Arg } z^2 \leq 1 \\ \log|z| \geq 0 \;\&\; \text{Arg } z = 0 \end{cases},$$
   y las condiciones se reducen a $z \in [1, e]$. Por tanto el dominio de derivabilidad de f es $\mathbb{C} \setminus \{z \leq e\}$. La derivada de f es evidentemente:
$$f' = \frac{1}{z(\log z)(\log(\log z))}.$$
   □

7. Para cada una de las funciones siguientes hállese el dominio de holomorfía y su derivada:
$$f(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}, \qquad f(z) = \text{cosec } \sqrt{z}, \qquad f(z) = \sec \sqrt{z}, \qquad f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} e^{\text{tag } z},$$
$$f(z) = \frac{\text{sen}(\sqrt{iz+1})}{z^2+1}, \qquad f(z) = \cos\sqrt{e^z - 1}.$$

8. Las mismas cuestiones que en el Ejercicio 7 para las funciones:
$$f(z) = \sqrt[3]{z^4 - 1}, \qquad f(z) = \text{Arcsen } z^2, \qquad f(z) = e^{\text{Arctag } i\sqrt{z}},$$
$$f(z) = (z^2+1)^z, \qquad f(z) = \text{ Log } (\text{ Log } z), \qquad f(z) = (1 + e^z) \text{ Log } (1 + e^z).$$

9. Para $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se define la rama principal de z^a como:
$$z^a = e^{a \text{ Log } z},$$
   donde $\text{ Log } z$ designa la rama principal del logaritmo.

a) Pruébese que la definición dada coincide con z^n, z^{-n} y la rama principal de $z^{1/n}$ para $n \in \mathbb{N}$.

b) Pruébese que $z^a z^b = z^{a+b}$, $a, b \in \mathbb{C}$.

c) Pruébese que z^a es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$ con $(z^a)' = az^{a-1}$.

Solución. Para a) basta observar que: $\pm n$ Log $z =$ Log $z^{\pm n} + 2k\pi$ y que $\frac{1}{n}$ Log $z =$ Log $\sqrt[n]{z}$.

El apartado b) es obvio y para c):

$$(z)' = \frac{a}{z} e^{a \text{ Log } z} = a e^{- \text{ Log } z} e^{a \text{ Log } z} = a z^{a-1}.$$

$\square$

10. Hallar todas las funciones $f(z)$ holomorfas en $\mathbb{C}$ que cumplen:

$$f'(z) = \lambda f(z),$$

para un número complejo dado $\lambda \in \mathbb{C}$.

Solución. Toda solución cumple $(e^{-\lambda z} f)' = 0$ luego

$$f(z) = e^{\lambda z} z_0,$$

para cierto $z_0 \in \mathbb{C}$. De hecho, tal función es la única solución que satisface la condición:

$$f(0) = z_0.$$

$\square$

11. Usar el Ejercicio 10 para dar una nueva demostración de que:

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Indicación. Compárense las funciones $e^{\lambda + z}$ y $e^{\lambda} e^{z}$.

Solución. La función $g(z) = e^{\lambda + z}$ satisface la ecuación $f' = f$ y cumple $f(0) = e^{\lambda}$. Usando el ejercicio anterior tal solución ha de ser:

$$f(z) = e^{\lambda} e^{z}.$$

$\square$

12. Hallar todas las funciones enteras $f(z)$ tales que:

$$f''(z) + f(z) = 0$$

en $\mathbb{C}$.

Indicación. Imitar argumentos similares al caso real.

Solución. Para una solución f definimos

$$g(z) = f(0) \cos z + f'(0) \operatorname{sen} z.$$

Queremos probar que $f = g$. A tal efecto $h(z) = f(z) - g(z)$ es solución de la ecuación con $h = h' = 0$ en $z = 0$. Como $h'^2 + h^2$ es constante (Capítulo I) se tiene:

$$h'^2 + h^2 = 0$$

en $\mathbb{C}$. De ahí:

$$(h' - ih)(h' + ih) = 0,$$

y usando el Ejercicio **??** del Capítulo III concluimos que uno de los factores es cero en $\mathbb{C}$. Si por ejemplo el primer factor es nulo:

$$h = z_0 e^{iz},$$

con $h(0) = 0$. Esto dice que $z_0 = 0$ y $h = 0$ en $\mathbb{C}$. Como $h = 0$ resulta:

$$f(z) = f(0)\cos z + f'(0)\operatorname{sen} z$$

y todas las soluciones de la ecuación son combinaciones lineales complejas de $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$.

$\square$

13. Se introdujo en el capítulo anterior la serie binomial:

$$g_\lambda(z) = 1 + \lambda + \cdots + \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)}{n!} z^n + \cdots .$$

Hállense las derivadas de todos los órdenes de g_λ en $z = 0$. Recuérdese que $g_\lambda(z)$ coincide con $(1+z)^\lambda$ para valores significativos de λ.

Solución. En virtud del desarrollo en serie,

$$g^{(n)}(0) = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1).$$

$\square$

14. Se considera la rama principal de $(1+z)^\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{C})$. Tras determinar el dominio de holomorfía de dicha función calcúlense las derivadas sucesivas de $(1+z)^\lambda$ en dicho dominio. ¿Cuánto valen éstas derivadas en $z = 0$? Comparar con el Ejercicio 13.

Solución. Como:

$$f(z) = (1+z)^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Log}(1+z)},$$

el dominio de holomorfía es evidentemente:

$$\mathbb{C} \setminus \{z \leq -1\}.$$

Además:

$$f'(z) = \frac{\lambda}{(1+z)}(1+z)^\lambda = \frac{\lambda}{e^{\operatorname{Log}(1+z)}}(1+z)^\lambda = \lambda(1+z)^{\lambda-1},$$

pues:

$$\frac{1}{1+z} = e^{-\text{ Log }(1+z)} = (1+z)^{-1}.$$

Por tanto:

$$f^{(n)}(z) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)(1+z)^{\lambda-n},$$

y

$$f^{(n)}(0) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1).$$

□

15. ¿Existen funciones holomorfas f tales que $u = \Re f = x^2 + y^2$?

    Solución. La respuesta es no: u no es armónica.

    □

16. Hallar las funciones holomorfas f tales que $\Re f = x^2 - y^2$.

    Solución. Si la función $f = u + iv$ entonces:

    $$\begin{aligned} v_x &= 2y \\ v_y &= 2x, \end{aligned}$$

    con lo que:

    $$v(x,y) = 2xy + \varphi(y).$$

    Además como $v_y = u_x$:

    $$\varphi'(y) + 2x = 2x,$$

    y φ es constante. Así $v = 2xy + C$ y

    $$f = z^2 + C.$$

    □

17. Se sabe que f es entera con:

    $$f(z) = u(x) + iv(y).$$

    Probar que f es lineal.

    Solución. De las ecuaciones de Cauchy-Riemann se sabe que:

    $$u'(x) = v'(y),$$

    para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Por tanto, ha de existir una constante c tal que:

    $$u'(x) = v'(y) = c.$$

    Así:

    $$u(x) = cx + a, \qquad v(y) = cy + b,$$

    para a, b constantes reales y $f = cz + a + bi$.

    □

18. Determinar la función entera $f(z)$ que satisfaga $\Re f'(z) = 3x^2 - 4y - 3y^2$, $\Re f(0) = 6$ y $f(1+i) = 0$.

Solución. Se han de encontrar u y v sabiendo que $f = u + iv$ es entera, y que:

$$\begin{aligned} &u_x = 3x^2 - 4y - 3y^2 \\ &u(0,0) = 6 \\ &u(1,1) = v(1,1) = 0. \end{aligned}$$

Bien:

$$u_x = 3x^2 - 4y - 3y^2 \qquad \Rightarrow \qquad u = x^3 - 4xy - 3xy^2 + \varphi(y).$$

Asimismo:

$$v_y = 3x^2 - 4y - 3y^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = 3x^2y - 2y^2 - y^3 + \psi(x).$$

Como:

$$u_y = -v_x,$$

entonces:

$$-4x - 6xy + \varphi'(y) = -(6xy + \psi'(x)),$$
$$\varphi'(y) = 4x - \psi'(x),$$

con lo que

$$\varphi'(y) = 4x - \psi'(x) = c_1,$$

para una cierta constante c_1. De aquí:

$$\varphi(y) = c_1 y + c_2, \qquad \psi(x) = 2x^2 - c_1 x + c_3,$$

donde c_2 y c_3 son constantes. Luego:

$$\begin{aligned} &u = x^3 - 4xy - 3xy^2 + c_1 y + c_2 \\ &v = 3x^2y - 2y^2 - y^3 + 2x^2 - c_1 x + c_3. \end{aligned}$$

Como $u(0,0) = 6$, $c_2 = 6$. Por otro lado:

$$\begin{gathered} 1 - 4 - 3 + c_1 + 6 = 0 \\ 3 - 2 - 1 + 2 - c_1 + c_3 = 0\text{'} \end{gathered}$$

dan $c_1 = 0$, $c_3 = -2$.

□

19. Demostrar que si $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un dominio G y $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in G$ entonces f es constante.

Solución. Poniendo $f = u + iv$ resulta $v = 0$ y $\nabla u = 0$ en G. Por tanto u es constante.

□

20. Sea G un dominio y $f : G \to \mathbb{C}$ una función holomorfa que toma sus valores en $\{|z| = 1\}$. Demostrar que f es constante.

Solución. A) Primera solución. De:

$$u^2 + v^2 = 1,$$

salen:

$$uu_x + vv_x = 0, \qquad uu_y + vv_y = 0,$$

y como $(u, v) \neq (0, 0)$ existe $\alpha = \alpha(x, y)$ tal que:

$$(u_x, v_x) = \alpha(u_y, v_y).$$

De las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$(u_x, -u_y) = \alpha(u_y, u_x).$$

Concluimos $\nabla u = 0$ porque supuesto que $\nabla u \neq 0$ habría de ser $\alpha \neq 0$ pero multiplicando la última igualdad escalarmente por (u_y, u_x) sale:

$$\alpha|\nabla u|^2 = 0,$$

que no es posible. Por tanto $\nabla u = 0$, $\nabla v = 0$ y f es constante.

B) Segunda solución. Tomamos un aplicación bilineal g que transforma ∂D en $\mathbb{R}$ con $g(1) = \infty$. Si $G_1 = G \setminus \{f^{-1}(1)\}$ es consecuencia del principio de prolongación analítica (Capítulo V) que G_1 es un dominio. Como $g \circ f$ es holomorfa en G_1 con valores reales entonces f es constante en G_1 y como $\{f^{-1}(1)\}$ es un conjunto discreto en G (principio de prolongación analítica) entonces f es constante en G.

$\square$

21. Se expresan las partes real e imaginaria $u(x, y), v(x, y)$ de una función compleja f en coordenadas polares para tener $U(r, \theta) = u(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$, $V(r, \theta) = v(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Admitiendo la existencia de todas las derivadas parciales primeras, determínese la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Aplicar el resultado para estudiar la holomorfía de las funciones,

$$a)\ r^n \cos n\theta + ir^n \operatorname{sen} n\theta, \qquad b)\ r^{1/n}\cos\frac{\theta}{n} + ir^{1/n}\operatorname{sen}\frac{\theta}{n}, \qquad c)\ \log r^2 + 2\theta i,$$

$$d)\ r^\alpha e^{-\beta\theta}\cos(\alpha\theta + \beta\log r) + ir^\alpha e^{-\beta\theta}\operatorname{sen}(\alpha\theta + \beta\log r) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solución. La versión en coordenadas polares de las ecuaciones de Cauchy-Riemann son:

$$rU_r = V_\theta, \qquad U_\theta = -rV_r.$$

En efecto:

$$u_x = U_r r_x + U_\theta \theta_x$$
$$u_y = U_r r_y + U_\theta \theta_y.$$

Por tanto:

$$U_r r_x + U_\theta \theta_x = V_r r_y + V_\theta \theta_y$$
$$U_r r_y + U_\theta \theta_y = -(V_r r_x + V_\theta \theta_x).$$

Usamos ahora que:

$$r_x = \cos\theta \quad r_y = \operatorname{sen}\theta \quad \theta_x = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \quad \theta_y = \frac{\cos\theta}{r},$$

para obtener:

$$\cos\theta U_r - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} U_\theta = \operatorname{sen}\theta V_r + \frac{\cos\theta}{r} V_\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta U_r + \frac{\cos\theta}{r} U_\theta = -\cos\theta V_r + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} V_\theta.$$

Multiplicando la primera ecuación por $\cos\theta$, la segunda por $\operatorname{sen}\theta$ y sumando da:

$$U_r = \frac{1}{r} V_\theta.$$

Multiplicando ahora la primera por $-\operatorname{sen}\theta$ y la segunda por $\cos\theta$ obtenemos:

$$\frac{1}{r} U_\theta = -V_r.$$

En el ejemplo de $\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\cos\frac{\theta}{n} + i r^{1/n}\operatorname{sen}\frac{\theta}{n}$ se tiene:

$$rU_r = \frac{1}{n} r^{1/n}\cos\frac{\theta}{n} = V_\theta,$$

$$rV_r = \frac{1}{n} r^{1/n}\operatorname{sen}\frac{\theta}{n} = -U_\theta.$$

$\square$

22. Estudiar el dominio de holomorfía de la función:

$$f(z) = \exp\left\{-i \operatorname{Log}\left[i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right]^{1/2}\right\},$$

calculando su derivada. ¿Cuál es la imagen del disco unidad $\{|z|<1\}$ mediante f?

Indicación. Es un anillo.

Solución. Para $z \in \mathbb{C}\setminus\{z \le 0\}$, $\operatorname{Arg}(\sqrt{z}) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ por tanto $\operatorname{Log}\sqrt{z}$ es holomorfa en $z \in \mathbb{C}\setminus\{z \le 0\}$. Nuestra función f es holomorfa en

$$\mathbb{C}\setminus\{z : i\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = -t,\ t \le 0\}.$$

Ahora:

$$i\frac{z+1}{-z+1} = -t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{iz+i}{z-1} = t \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{t+i}{t-i} \quad t \ge 0.$$

Buscamos entonces la imagen del segmento $[0,\infty) \cup \{\infty\}$ mediante la aplicación:

$$g(w) = \frac{w+i}{w-i}.$$

Tenemos que g trasforma $i\mathbb{R}_\infty$ ($\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) en $\mathbb{R}_\infty$, mientras g transforma $\mathbb{R}_\infty$ en:

a) una circunferencia (g sólo se hace infinita en $w = i$),

b) ortogonal al eje real $\mathbb{R}_\infty$,

c) que pasa por $g(0) = -1$ y $g(\infty) = 1$.

Por tanto g transforma el eje real en $\{|z| = 1\}$. Como $g(1) = i$ y $g([0,\infty) \cup \{\infty\})$ es un arco de ∂D que empieza en -1, termina en 1 y contiene a i entonces

$$g([0,\infty) \cup \{\infty\}) = \partial D \cap \{\Im z \geq 0\} =: \partial D^+.$$

En conclusión f es holomorfa en

$$\mathbb{C} \setminus \partial D^+.$$

En cuanto a la segunda parte

$$h(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

transforma D en el semiplano $\{\Im z > 0\}$. De hecho $\frac{z+1}{-z+1}$ preserva el eje real y transforma D en $\{\Re z > 0\}$ que tras ser girado $\frac{\pi}{2}$ da lugar a $\{\Im z > 0\}$.

La aplicación $\sqrt{z}$ transforma $\{\Im z > 0\}$ en el primer cuadrante $\{\Re z > 0, \Im z > 0\}$.

La aplicación $\operatorname{Log} z$ transforma el primer cuadrante $\{\Re z > 0, \Im z > 0\}$ en la banda abierta $\{0 < \Im z < \frac{\pi}{2}\}$ quien multiplicada por $-i$ acaba en la banda $\{0 < \Re z < \frac{\pi}{2}\}$ y al aplicarle la exponencial resulta el anillo:

$$\{z : 1 < |z| < e^{\pi/2}\}.$$

Precisamente $f(\partial D) = \partial D$.

$\square$

23. Sea f una función holomorfa en un dominio $G \subset \mathbb{C}$. En $G^* = \{\bar{z} : z \in G\}$ se define $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Probar que f^* es también holomorfa.

Solución. Si $f^* = u^* + iv^*$ entonces:

$$u^*(x,y) = u(x,-y) \qquad v^*(x,y) = -v(x,-y),$$

y es inmediato comprobar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann. $\square$

24. Sea γ una curva C^1 a trozos parametrizada por $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ con $\phi(a) = z_0, \phi(b) = z_1$. Supongamos que $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio *convexo* G y que $\gamma \subset G$. Pruébese que la integral:

$$\int_\gamma -u_y \, dx + u_x \, dy,$$

sólo depende de z_0, z_1.

Solución. En realidad, sobra la condición de convexidad porque:

$$\int_\gamma -u_y\ dx + u_x\ dy = \int_\gamma v_x\ dx + v_y\ dy = v(z_1) - v(z_0).$$

Naturalmente, hemos usado Cauchy-Riemann en la primera identidad. □

25. Sean $f_n : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diferenciables en G con derivadas continuas [1] y tales que $f_n \to f$, $f_n' \to g$ uniformemente en G. Pruébese que $g = f'$.

Solución. Introducimos primero unas pocas nociones que tratamos "in extenso" en el próximo capítulo.

Para $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continua se define la integral:

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f_1(t)\ dt + i \int_a^b f_2(t)\ dt$$

donde $f_1 = \Re f,\ f_2 = \Im f_2$. Es inmediato que para funciones continuas $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ se comprueba inmediatamente que

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

para constantes complejas $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Asimismo y consecuencia del teorema fundamental del cálculo que si $f \in C^1([a,b], \mathbb{C})$ entonces:

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Nos ocupamos ahora del ejercicio, donde las funciones f_n, f, g_n y g son de variable compleja. Para $z_0 \in G$ y $h \in \mathbb{C}$ pequeño escribimos:

$$\begin{aligned} f_n(z_0+h) - f_n(z_0) - f_n'(z_0)h &= \int_0^1 (f_n(z_0+th))'\ dt - \int_0^1 f_n'(z_0)h\ dt \\ &= h \int_0^1 (f_n'(z_0+th)\ dt - f_n'(z_0))\ dt, \end{aligned}$$

donde tomando límites cuando $n \to \infty$ y teniendo en cuenta que las convergencias son uniformes resulta:

$$f(z_0+h) - f(z_0) - g(z_0)h = h \int_0^1 (g(z_0+th)\ dt - g(z_0))\ dt,$$

es decir:

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) = \int_0^1 (g(z_0+th)\ dt - g(z_0))\ dt,$$

pero la última integral tiende a cero porque $g(z_0+th) \to g(z_0)$ uniformemente en $[0,1]$ cuando $h \to 0$. Por tanto f es derivable en z_0 con derivada $g(z_0)$.

□

[1] Esta condición es innecesaria en virtud del teorema de Goursat. Véase el Capítulo V.

26. Sean $f_n : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diferenciables en G con derivadas continuas de forma que $|f_n(z)|, |f_n'(z)| \leq M_n$ en G con $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Si se define:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

pruébese que f es derivable con:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z).$$

Solución. Es consecuencia inmediata del ejercicio anterior.

□

27. Se considera la serie de potencias con centro en el infinito:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

y radio de convergencia $R > 0$ (véase el Capítulo III). Estúdiese la derivabilidad de f en $|z| > R$ y el comportamiento asintótico de las derivadas cuando $z \to \infty$.

Solución. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

converge uniformemente en $|z| > r$ para cada $r > R$ así como la serie derivada término a término:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -n a_n z^{-n-1}$$

por tanto:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} -n a_n z^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} -(n+1) a_{n+1} z^{-n-2}.$$

Así:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}\right)' = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^{-n} \sim -\frac{a_1}{z^2},$$

cuando $z \to \infty$.

Derivando k veces concluimos que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}\right)^{(k)} \sim (-1)^k k! \frac{a_1}{z^{k+1}},$$

cuando $z \to \infty$. □

28. Sea $\theta = \theta(x, y) = \theta(z)$ una función real y continua definida en un dominio $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se dice que θ es una rama del argumento si:

$$e^{i\theta(z)} = \frac{z}{|z|} \qquad z \in G.$$

a) Si θ es una rama de $\arg z$ en G ¿cómo son las otras posibles ramas de $\arg z$ en G?

b) ¿Puede existir una rama de $\arg z$ definida en un entorno "perforado" de cero de la forma $D(0, r) \setminus \{0\}$?

c) Demuéstrese que si θ es una rama de $\arg z$ en G entonces θ es armónica en G.

d) En las condiciones de c), pruébese que $r^n \cos n\theta$, $r^n \operatorname{sen} n\theta$ son armónicas $(r = |z|)$.

Nota. Se conoce a las expresiones $\sum_{n=0}^{N} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, como polinomios armónicos de grado N.

Solución.

a) Si $\theta_1(z)$ y $\theta_2(z)$ son ramas del argumento en un dominio G resulta:

$$e^{\theta_1(z)i} = e^{\theta_2(z)i} \qquad z \in G,$$

luego para cada $z \in G$ existe $k = k(z) \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\theta_2(z) - \theta_1(z) = 2k(z)\pi.$$

Como θ_1, θ_2 son continuas y $k(z) \in \mathbb{Z}$ entonces k ha de ser constante. Así:

$$\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi.$$

b) Si $\theta(z)$ en una rama del argumento en $D(0, r) \setminus \{0\}$ entonces:

$$\arg z = \theta(z) + 2k\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$ constante. De esta igualdad se deduce la continuidad de $\arg z$ en $D(0, r) \setminus \{0\}$. Esto no es posible, luego tal rama del argumento definida en $D(0, r) \setminus \{0\}$ no puede existir.

c) Si θ es una rama del argumento en un dominio G, se probó en el Capítulo I que θ es C^∞ y que:

$$\theta_x = -\frac{y}{r^2}, \qquad \theta_y = \frac{x}{r^2}.$$

De aquí resulta inmediato que $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$ en G.

d) Si θ es una rama del argumento en G entonces:

$$r^n \cos n\theta = \Re z^n, \qquad r^n \operatorname{sen} n\theta = \Im z^n,$$

por lo que tales funciones son armónicas en G. $\square$

29. Sea G un dominio y g una rama de la raíz n-ésima de z. Hállense todas las otras ramas.

Solución. Se dice que una función continua g en un dominio G es una rama de la raíz n-ésima (véase el Capítulo III) si

$$g(z)^n = z$$

para todo $z \in G$. Como se dijo en su momento, g es inyectiva y, supuesto que $0 \in G$, $g(0) = 0$ con $g(z) \neq 0$ para $z \neq 0$ (más abajo comprobamos que 0 no puede estar en G). Si (g_1, G) es otra rama entonces:

$$\frac{g_1(z)}{g(z)} \in \{1, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}\},$$

donde las ζ_k son las raíces n-ésimas de la unidad. Como $G \setminus \{0\}$ es un dominio y g_1/g es continua resulta que

$$g_1(z) = \zeta g(z),$$

donde ζ es una raíz n-ésima de la unidad fijada. □

30. Pruébese que no puede existir una rama de la raíz n-ésima de z definida en un entorno de cero $\{z : |z| < r\}$.

Solución. Si g es una tal rama y está definida en $D(0,r)$ habría de ser:

$$\sqrt[n]{z} = \zeta g(z)$$

para una constante ζ (Ejercicio previo). Eso no es posible porque el primer miembro no es continuo en $D(0,r)$.

En conclusión, si (g, G) es una rama de la raíz n-ésima según nuestra definición entonces 0 no puede pertenecer a G.

□

31. Se sabe que g es continua en un dominio $G \subset \mathbb{C}$, $0 \notin G$ (cf. Ejercicios 28, 30) y que cumple:

$$g(z)^n = z,$$

es decir que g es una rama de la raíz n-ésima. Pruébese que g es derivable determinando una expresión de su derivada en términos de g.

Solución. Solución:

$$g' = \frac{1}{n g(z)^{n-1}}.$$

□

32. Demostrar que no existe una rama del logaritmo definida en $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Solución. Si tal rama g existe habría de ser, por ejemplo,

$$\operatorname{Log} z = g(z) + 2k\pi i,$$

que implica la continuidad de $\operatorname{Log} z$ en $D(0,r) \setminus \{0\}$. Esto no es cierto. □

33. Pruébese que $\log|z|$ es armónica en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. ¿Admite allí una función armónica conjugada?

Indicación. Véase el Ejercicio 32

Solución. Si una armónica conjugada v de $\log r$ existiese en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ habría de ser

$$\operatorname{Arg} z = v(z)$$

en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Como esto implica la continuidad de $\operatorname{Arg} z$ en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ la existencia de una tal v resulta imposible.

$\square$

34. Sean G, Ω dominios de $\mathbb{C}$, $f, h : G \to \mathbb{C}$, $g : \Omega \to \mathbb{C}$, h, g holomorfas, h inyectiva, f continua, de forma que:

$$h(z) = g(f(z)) \qquad z \in G,$$

junto con $g'(w) \neq 0$ en Ω.

a) Probar que f es inyectiva.

b) Probar que f es holomorfa en G dando una expresión de su derivada.

Solución. Si $f(z_1) = f(z_2)$ entonces $h(z_1) = h(z_2)$ y $z_1 = z_2$, luego f es inyectiva. Esto responde la cuestión a).

b) Ha de ser –si todo marcha bien–

$$f'(z) = \frac{h'(z)}{g'(f(z))}.$$

Inspirados en esto ponemos:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{h(z)-h(z_0)} = \frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}\frac{1}{\dfrac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}}.$$

Si $z \to z_0$ $(z \neq z_0)$ resulta que $f(z) \to f(z_0)$ por tanto el límite del primer miembro cuando $z \to z_0$ es:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{h'(z_0)}{g'(f(z_0))}.$$

$\square$

Soluciones a los ejercicios del Capítulo V, primera parte

- *Integración compleja*

1. Para $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, denotamos $[z_{k-1}, z_k]$ el segmento de z_{k-1} a z_k, por $[z_0, \ldots, z_n]$ la poligonal constituida por tales segmentos. Sean $\gamma_1 = [1, i]$, $\gamma_2 = [1, 1+i, i]$. Calcúlense:

$$\int_{\gamma_j} z^2 \, dz, \quad j = 1, 2.$$

Solución. El resultado es el mismo en los casos:

$$-\frac{1}{3}(1+i).$$

Se razona usando por ejemplo $\dfrac{z^3}{3}$ como primitiva o integrando directamente:

$$\int_{[z_0,z_1]} z^2 \, dz = (z_1 - z_0) \int_0^1 (z_0 + (z_1 - z_0)t)^2 \, dt =$$

$$(z_1 - z_0) \left(z_0^2 + z_0(z_1 - z_0) + \frac{1}{3}(z_1 - z_0)^2 \right) = \frac{z_1^3 - z_0^3}{3}.$$

La segunda opción se incluye a título ilustrativo y naturalmente se desaconseja.

$\square$

2. Defínase $\gamma(s) = \exp(ins)$, $s \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$. Calcular:

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz.$$

Solución. $2n\pi i$. $\square$

3. Calcular:

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz,$$

siendo ahora $\gamma = [1-i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i]$.

Solución. Escribimos:

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} \, dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} \, dz,$$

donde $\gamma_1 = [1-i, 1+i, -1+i]$, $\gamma_2 = [-1+i, -1-i, 1-i]$ usando en la primera integral $\operatorname{Log} z$ como primitiva y $\log z$ como primitiva en la segunda resulta:

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz = [\operatorname{Arg}(-1+i) - \operatorname{Arg}(1-i)]i + [\arg(1-i) - \arg(-1+i)]i = 2\pi i.$$

$\square$

4. Calcular:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz,$$

donde a) γ es $\{|z|=1, \Im z \geq 0\}$ de $+1$ a -1, b) γ es $\{|z|=1, \Im z \leq 0\}$ de $+1$ a -1.

Solución. Se trata de usar adecuadamente la función logaritmo.

a) πi. b) $-\pi i$.

□

5. Se define $\gamma(s) = r\exp(is)$, $s \in [0,\pi]$,

$$I(r) = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz.$$

Calcular $\lim_{r\to 0+} I(r)$.

Solución. Escribimos

$$I(r) = \int_\gamma \frac{e^{iz}-1}{z}\, dz + \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = I_1(r) + \pi i.$$

Se tiene:

$$|I_1| \leq \sup_\gamma |\frac{e^{iz}-1}{z}|\pi r \to 0,$$

cuando $r \to 0$ porque $\lim_{z\to 0} \frac{e^{iz}-1}{z} = i$. Luego el límite pedido es πi. □

6. Para $\gamma(s) = 1 + e^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$, hallar $\int_\gamma (z^2-1)^{-1}\, dz$.

Solución. Usando fracciones simples

$$\int_\gamma (z^2-1)^{-1}\, dz = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-1} - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta+1} = \pi i - 0 = \pi i.$$

□

7. Sea γ una curva cerrada C^1 a trozos en un abierto G y supóngase que $a \notin G$. Pruébese que para $n \geq 2$, $\int_\gamma (z-a)^{-n}\, dz = 0$.

Solución. Es consecuencia de que $-\dfrac{(z-a)^{-(n-1)}}{n-1}$ es holomorfa en G y define una primitiva del integrando. □

8. Sean f, g funciones holomorfas en un abierto $G \subset \mathbb{C}$ con derivadas f', g' continuas en G. Si γ es una curva C^1 a trozos de extremos a, b, pruébese que:

$$\int_\gamma fg'\, dz = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_\gamma f'g\, dz.$$

Solución. Se tiene que:

$$\int_\gamma (fg)'(z)\, dz = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

de donde se sigue la igualdad buscada.

□

9. El teorema de Cauchy en un disco $D(a, R)$ establece que si f es holomorfa con derivada continua en $D(a, r)$ y $\gamma \subset D(a, r)$ es una curva cerrada y C^1 a trozos entonces:

$$\int_\gamma f = 0.$$

Extender el teorema de discos a "semiplanos".

Solución. Sea H un semiplano con frontera ∂H (una recta) y elegimos una aplicación bilineal $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $g(D) = H$ y $g(\partial D) = \partial H$. Si γ es una curva cerrada en H, $\hat{\gamma} = g^{-1}(\gamma)$ es una curva cerrada en D mientras la función

$$h(z) = f(g(z))g'(z),$$

es derivable con derivada continua en D. Panto:

$$\int_{\hat{\gamma}} h(z)\ dz = 0.$$

Se tiene que:

$$\gamma(t) = g(\hat{\gamma}(t)) \qquad t \in [a, b],$$

luego

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt = \int_a^b f(g(\hat{\gamma}(t)))g'(\hat{\gamma}(t))\hat{\gamma}'(t)\ dt = \int_{\hat{\gamma}} h(z)\ dz = 0.$$

□

10. Calcúlense las siguientes integrales ($0 \le s \le 2\pi$ en todos los casos):

$$a)\ \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\ dz, \quad b)\ \int_\gamma \frac{dz}{z-a}, \quad c)\ \int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}\ dz, \quad d)\ \int_\gamma \frac{\log z}{z^n}\ dz,$$

donde $\gamma = e^{is}$ en a), c), $\gamma = a + re^{is}$ en b), $\gamma = 1 + \frac{1}{2}e^{is}$ en d).

Solución. Se aplica en todos los casos la fórmula de Cauchy.

a) -2π. b) $2\pi i$. c) 0. d) 0.

□

11. Calcular las integrales:

$$a)\ \int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\ dz, \quad b)\ \int_\gamma \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^n}\ dz, \quad c)\ \int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\ dz,$$

$$d) \int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz, \quad e) \int_\gamma \frac{z^{1/m}}{(z-1)^m}\, dz,$$

en donde $0 \le s \le 2\pi$ en todos los casos, $\gamma = e^{is}$ en a), b), d), $\gamma = 2e^{is}$ en c), $\gamma = 1+\frac{1}{2}e^{is}$ en e).

Solución. Como en el ejercicio anterior se trata de usar la fórmula de Cauchy.

a) $4\pi i \frac{\theta_n}{(n-1)!}$ con $\theta_n = 0$ si $n = \dot{2}+1$, $\theta_n = 1$ si $n = \dot{2}$. b) $2\pi i$ si $n = 1$, 0 si $n \ge 2$. c) 2π. d) 0.

e)

$$2\pi i(-1)^{m-1}\frac{[(m-2)m-1]\dots[km-1]\dots[2m-1][m-1]}{[(m-1)m]\dots[km]\dots[2m]m}.$$

En el caso c) conviene escribir:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right).$$

□

12. Calcular:

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}\, dz,$$

$\gamma = re^{is}$, $0 \le s \le 2\pi$, para todos los valores posibles de $r \in (0,2)\cup(2,\infty)$.

Solución. Para $r \ne 2$ positivo Escribimos:

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}\, dz = \frac{1}{4}\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz - \frac{3}{8}\int_\gamma \frac{1}{z-2i}\, dz - \frac{3}{8}\int_\gamma \frac{1}{z+2i}\, dz.$$

Para $r < 2$ las dos últimas integrales valen cero y la primera $\frac{\pi i}{2}$.

Para $r > 2$:

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}\, dz = \frac{\pi i}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi i.$$

□

13. (♣) Usar la serie geométrica para probar que:

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i,$$

para $z \in D(a,r)$, donde $\gamma(s) = a + re^{is}$, $s \in [0,2\pi]$.

Solución. Para $z \in D(a,r)$ la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta - a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

converge uniformemente a

$$\frac{1}{\zeta - z}$$

en γ. Por tanto:

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} (z-a)^n = \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 2\pi i.$$

$\square$

- *Desarrollos en serie de potencias*

14. Hallar el desarrollo en serie de potencias de $\operatorname{Log} z$ en $z = i$, ¿cuál es su radio de convergencia?

    Solución. Se tiene que:

    $$\operatorname{Log}' z = \frac{1}{z} = \frac{-i}{1 - i(z-i)} = -\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} (z-i)^n,$$

    por tanto:

    $$\operatorname{Log} z = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{n+1} (z-i)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} (z-i)^n.$$

    El radio de convergencia es 1. Nótese que es la distancia de i al punto de discontinuidad $z = 0$.

    $\square$

15. Calcular el desarrollo en serie de potencias de $\sqrt{z}$ en $z = 1$ determinando su radio de convergencia.

    Solución. Usando la parte principal de $z^{1/2}$ se comprueba de inmediato que:

    $$\sqrt{z} = z^{1/2}.$$

    Escribiendo $f(z) = \sqrt{z}$,

    $$f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^n (2(n-1)-1)!!}{2^n}.$$

    El desarrollo es:

    $$\sqrt{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2(n-1)-1)!!}{2n!!} (z-1)^n.$$

    $\square$

16. Sea z_0 un punto del dominio de holomorfía de $f(z) = (1+z)^\lambda$. Hállese el desarrollo en serie de potencias de f en z_0 calculando el radio de convergencia.

Solución. Usando las propiedades de la función $f(z) = (1+z)^\lambda$ se tiene que:

$$f^{(n)}(z_0) = \lambda \dots (\lambda - (n-1))(1+z_0)^{\lambda - n)},$$

el desarrollo en serie es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda \dots (\lambda - (n-1))(1+z_0)^{\lambda-n}}{n!}(z-z_0)^n,$$

que tiene radio de convergencia $\rho = |z_0 + 1|$.

Por tanto

$$(1+z)^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda \dots (\lambda - (n-1))(1+z_0)^{\lambda-n}}{n!}(z-z_0)^n,$$

en $G \cap D(z_0, \rho)$ donde G es el dominio de holomorfía de f es decir $G = \mathbb{C} \setminus \{z \leq -1\}$. $\square$

17. Pruébese que:

$$f(z) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

define, en un dominio $G \subset \mathbb{C}$ por determinar, una rama de la función arcotangente (véase el Capítulo III). Es decir:

$$\text{tag } (f(z)) = z, \qquad z \in G.$$

Tras comprobar que $0 \in G$ pruébese que el desarrollo de $f(z)$ en $z = 0$ es:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

determinando el radio de convergencia de la serie.

Solución. Hemos probado en el Capítulo III que f es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ti : \pm t \in [1, \infty)\}$, que $f(\Omega) = \{z : |\Re z| < \frac{\pi}{2}\}$ y que tag $(f(z)) = z$ para $z \in \Omega$.

Cualquiera que sea la rama (g, Ω) de la arcotangente se tiene que $g' = \dfrac{1}{a+z^2}$ por lo que:

$$f'(z) = \frac{1}{a+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n},$$

con lo que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1},$$

siendo el radio de convergencia 1. $\square$

18. Hallar el desarrollo en serie de $\dfrac{e^z-1}{z}$ en $z=0$ determinando el radio de convergencia.
Definiendo:

$$f(z)=\frac{z}{e^z-1},$$

y escribiendo su desarrollo en serie como:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}z^k,$$

determinar el radio de convergencia.

Pruébese además que:

$$\binom{n}{n-1}a_{n-1}+\binom{n}{n-2}a_{n-2}+\cdots+\binom{n}{1}a_1+a_0=0,$$

para $n\geq 2$.

Solución. Con más propiedad, la función entera:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}z^n$$

representa a $\dfrac{e^z-1}{z}$ en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y vale 1 en $z=0$. Además $g(z)\neq 0$ para todo z con lo que $1/g(z)$ es entera y coincide con $f(z)$ en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Por tanto

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n,$$

y el radio de convergencia es $\rho=\infty$. Como:

$$f(z)g(z)=1,$$

se tiene en particular que:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\frac{1}{n+1-k}=0,$$

para $n\geq 1$, es decir:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)}a_k=0,$$

luego

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}a_k=\binom{n+1}{0}a_0+\binom{n+1}{1}a_1+\cdots+\binom{n+1}{n}a_n=0,$$

que es lo que se pretendía probar.

$\square$

19. Si f es como en el problema 18 probar que $f(z) + \frac{1}{2}z$ es una función par. Dedúzcase de ahí que $a_k = 0$ para $k = \dot{2} + 1$. Los $B_{2n} = (-1)^{n-1}a_{2n}$, $n \geq 1$ se llaman los números de Bernoulli. Calcular B_2, B_4, B_6.

Solución. Se tiene que:

$$f(-z) = \frac{ze^z}{e^z - 1} - \frac{z}{2} = z + \frac{z}{e^z - 1} - \frac{z}{2} = f(z).$$

Por tanto

$$f(z) + \frac{1}{2} = a_0 + (a_1 + \frac{1}{2})z + \frac{a_2}{2!}z^2 + \cdots,$$

sólo puede tener potencias pares.

De aquí:

$$a_1 = -\frac{1}{2},$$

y

$$a_n = 0 \qquad n = \dot{2} + 1, \qquad n \geq 3.$$

En particular:

$$a_0 + 2na_1 + \binom{2n}{2}a_2 + \cdots \binom{2n}{2k}a_{2k} + \cdots \binom{2n}{2(n-1)}a_{2(n-1)} = 0,$$

$$1 - n + \binom{2n}{2}B_2 + \cdots (-1)^{k-1}\binom{2n}{2k}B_{2k} + \cdots (-1)^{n-2}\binom{2n}{2(n-1)}B_{2(n-1)} = 0,$$

Los coeficientes B_2, B_4, B_6 se calculan como sigue:

$$1 - 2 + \binom{4}{2}B_2 = 0$$

$$1 - 3 + \binom{6}{2}B_2 - \binom{6}{4}B_4 = 0$$

$$1 - 4 + \binom{8}{2}B_2 - \binom{8}{4}B_4 + \binom{8}{6}B_6 = 0.$$

Por tanto:

$$\begin{cases} 6B_2 = 1 \\ 15B_2 - 15B_4 = 2 \\ 28B_2 - 70B_4 + 28B_6 = 3. \end{cases}$$

Luego:

$$B_2 = \frac{1}{6} \qquad B_4 = \frac{1}{30} \qquad B_6 = \frac{1}{42}.$$

□

- *Estimaciones de Cauchy. Principio del módulo máximo.*

20. Sea f una función entera que satisface la estimación:

$$|f(z)| \leq M|z|^n,$$

para todo z con $|z| \geq R$ y cierto $n \in \mathbb{N}$. Pruébese que f ha de ser un polinomio de grado no superior a n.

Indicación. Estímense las derivadas de f en $z = 0$.

Solución. Las estimaciones de Cauchy afirman que

$$|f^{(m)}(0)| \leq \sup_{D(0,R)} |f^{(m)}| \leq \frac{m!K}{R^m},$$

con $K = \sup_{D(0,R)} |f|$. Ahora:

$$K \leq MR^n.$$

Por tanto

$$|f^{(m)}(0)| \leq \sup_{D(0,R)} |f^{(m)}| \leq \frac{m!M}{R^{m-n}},$$

por lo que

$$|f^{(m)}(0)| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{m!M}{R^{m-n}} = 0,$$

para $m \geq n + 1$. Esto implica que:

$$f(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n.$$

□

21. El "*principio del módulo máximo*" es un resultado clásico en variable compleja que establece lo siguiente: *una función compleja $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable con derivada continua en un dominio G tal que $|f(a)| = \sup_G |f(z)|$ para un punto $a \in G$ es necesariamente constante en G*. En otras palabras $|f(z)|$ nunca alcanza el máximo en un punto interior del dominio G salvo que sea constante.

Demuéstrese la siguiente consecuencia del principio del módulo máximo: una función f derivable con derivada continua en un dominio G para la que existe $a \in G$ cumpliendo:

$$|f(z)| \geq |f(a)| > 0,$$

debe mantenerse constante en G.

Solución. Si se tiene que $|f(a)| = \inf_G |f(z)| > 0$ entonces:

$$\frac{1}{|f(a)|} = \sup_G \frac{1}{|f(z)|},$$

mientras $\dfrac{1}{f(z)}$ es holomorfa en G. Del principio del máximo tiene que ser $\dfrac{1}{f(z)}$ constante.

□

22. Usar 21 para dar una demostración alternativa del teorema fundamental del álgebra.

Indicación. Repasar los pasos auxiliares de la prueba en el Capítulo II. En particular, que si $p(z)$ es un polinomio entonces $|p(z)|$ alcanza el mínimo en $\mathbb{C}$.

Solución. Si $p(z)$ no es constante entonces $\lim_{z\to\infty} |p(z)| = \infty$ y $|p(z)|$ alcanza en un disco $D(0,R)$ su ínfimo en $\mathbb{C}$. Del ejercicio anterior si

$$\inf_{D(0,R)} |p(z)| = |p(a)| \qquad a \in D(0,R),$$

entonces $|p(a)| = 0$ y hemos terminado.

$\square$

23. Sea $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una función armónica, $u(z) \geq 0$ en $\mathbb{C}$. Demostrar que u es constante.

Indicación. Constrúyase en primer lugar una función entera.

Solución. Según los resultados del Capítulo IV u admite una función armónica conjugada v en $\mathbb{C}$ y entonces $f = u + iv$ es entera. Se tiene además que:

$$f(\mathbb{C}) \subset \{\Re z \geq 0\}.$$

Tomamos una aplicación bilineal g que transforma $\{\Re z \geq 0\}$ en $\{|z| \leq 1\}$. Tal g es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ con $\Re z_0 < 0$. Por tanto $g \circ f$ es entera y acotada. Por el teorema de Liouville es constante y f también es constante.

$\square$