Análisis Matemático VI **Curso 2008-2009**
Hoja 1

Propiedades básicas de los números complejos

---

1. Sea $S^1 = \{z : |z| = 1\}$. Probar que S^1 es un grupo respecto del producto.

2. Probar que no es posible dotar a $\mathbb{C}$ de una relación de orden "$\leq$"que haga de $(\mathbb{C}, \leq)$ un cuerpo ordenado.

3. Hallar las partes reales e imaginarias de:
$$\frac{1}{z}, \quad \frac{z-a}{z+a} \qquad (a \in \mathbb{R}), \quad z^3, \quad \frac{3+5i}{7i+1}, \quad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$
$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6, \quad i^n, \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n \qquad 2 \leq n \leq 8.$$

4. Hallar $|z|$, $\bar{z}$ en cada uno de los casos siguientes:
$$-2+i, \quad -3, \quad (2+i)(4+i), \quad \frac{3-i}{\sqrt{2}+3i}, \quad \frac{i}{i+3}, \quad (1+i)^6, \quad i^{17}.$$

5. Probar que z es real si y sólo si $z = \bar{z}$.

6. Hallar x, y en las relaciones:
$$a)\ z = |z|, \qquad b)\ z = (\bar{z})^2, \qquad c)\ z = \sum_{k=0}^{100} i^k.$$

7. Probar (identidad del paralelogramo):
$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

8. Sea $R(z)$ una función racional de z de coeficientes reales. Probar que $\overline{R(z)} = R(\bar{z})$. Si $p(z)$ es un polinomio de coeficientes reales demostrar que z es raíz de p si y sólo si $\bar{z}$ es una raíz.

9. (Raíces cuadradas). Resolver en x, y la ecuación:
$$(x+iy)^2 = a+bi, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$
probando que siempre admite dos soluciones. Para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ discutir la existencia de raíces de la ecuación de segundo grado:
$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0.$$
Como aplicación hallar:
$$\sqrt{-8+6i},$$
y las soluciones de la ecuación:
$$z^2 + \sqrt{32}iz - 6i = 0.$$

10. Probar la validez de la fórmula del binomio de Newton:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad a, b \in \mathbb{C}.$$
Hallar $\Re z, \Im z$ para $z = (a+bi)^6$.

11. Pruébense las siguientes fórmulas del ángulo múltiple:
$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2}\theta \operatorname{sen}^2\theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4}\theta \operatorname{sen}^4\theta + \cdots,$$
$$\operatorname{sen} n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1}\theta \operatorname{sen}\theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3}\theta \operatorname{sen}^3\theta + \cdots.$$

12. Pruébese que $\text{máx}\{\Re z, \Im z\} \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|$. ¿Cuándo se da la igualdad?

13. Para $z = x + iy$ explicar la relación entre $\operatorname{Arg} z$ y $\operatorname{arctag}(y/x)$.

14. Pruébese que $2\operatorname{Arg}(z+1) = \operatorname{Arg} z$ en $|z| = 1$, $z \neq -1$.

15. Hállense las ramas principales de $\sqrt{z}$ y de $\sqrt{1-z}$.

16. Halar un dominio G y funciones continuas f, g tales que $f(z)^2 = g(z)^2 = 1 - z^2$. Estudiar si el dominio G obtenido es maximal.

17. Resolver:
$$z^6 = 1, \qquad z^4 = -1, \qquad z^4 = -1 + \sqrt{3}i.$$

18. Probar que las raíces n-ésimas z de la unidad, $z \neq 1$, cumplen:
$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0.$$

19. Probar que en un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia $z = 1$, el producto de las $n-1$ diagonales que parten de un vértice dado (contando los lados adyacentes) es n.

    Indicación. Usar el problema anterior suponiendo que el vértice es la unidad.

20. Descríbanse los siguientes lugares geométricos:

    a) $|z - i| \leq 1$

    b) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = 1$

    c) $|z-2| > |z-3|$

    d) $|z| < 1, \quad \Im z > 0,$

    e) $\dfrac{1}{z} = \bar{z}$

    f) $|z|^2 = \Im z$

    g) $|z^2 - 1| < 1.$

21. Pruébese que $|z-a| = |z-b|$ (respectivamente, $|z-a| > |z-b|$) es, para $a, b \in \mathbb{C}$, la ecuación general de una recta (respectivamente, de un semiplano).

22. Para $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, ¿qué objeto geométrico es

$$\Im\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0?$$

23. ¿Cuándo representa una recta del plano la ecuación:

$$az + b\bar{z} + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}?$$

24. Supongamos a, c reales, $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{C}$. Pruébese que

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0,$$

es la ecuación de una circunferencia del plano.

25. (Cuaterniones de Hamilton). Definimos:

$$Q = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

representando los vectores de la base canónica $\{e_i\}$ como $\{1, i, j, k\}$ de forma que:

$$z = (a, b, c, d) = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k,$$

con " $\cdot$ " el producto de un escalar por un vector, símbolo que omitiremos en lo que sigue para escribir $a + bi + cj + dk$. Se consideran la suma habitual $+$ de vectores y el producto que se define a través de las relaciones:

$$1x = x, \quad x \in \{1, i, j, k\}, \qquad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k, \quad ki = j, \quad jk = i, \quad ji = -k, \quad ik = -j, \quad kj = -i.$$

El producto a z_1, z_2 se determina entonces usando formalmente las propiedades asociativa y distributiva.

a) Hállese la expresión del producto $(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k)$

b) Pruébese que $(Q, +, .)$ es un cuerpo no conmutativo. Se conoce a Q como los "cuaterniones". Para $z = a + bi + cj + dk$, a se define como la parte escalar del cuaternión z, $bi + cj + dk$ la parte vectorial.

c) Dése una interpretación geométrica de la parte escalar y la parte vectorial del producto

$$(bi + cj + dk)(b'i + c'j + d'k)$$

de dos cuaterniones sin parte escalar.

26. Pruébese que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-lineal entonces existe $\lambda = \alpha + \beta i$ tal que $f(z) = \lambda z$. Demuéstrese que f induce una aplicación lineal $f_R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ calculando su matriz A en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

27. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal de matriz $A = (a_{kl})$, $f_C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la correspondiente aplicación asociada. Dénse condiciones necesarias y suficientes para que f_C sea asimismo $\mathbb{C}$-lineal (ecuaciones de Cauchy-Riemann).

28. Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $T_1(z) = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ las correspondientes aplicaciones bilineales asociadas. Pruébese que $T = T_1$ si y sólo si $A_1 = \lambda A$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

29. Sean

$$SL_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \det\, A = 1 \right\},$$

$$\mathcal{M} = \{T(z) = \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc \neq 0\},$$

con $\varphi : SL_2 \to \mathcal{M}$, la aplicación natural $A \mapsto T$. Pruébese que φ es sobreyectivo.

30. Una curva $C \subset \mathbb{C}$ de clase C^1 se define como $C = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ donde $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es C^1 y $\gamma'(t) \neq 0$ para todo t. Si $z_0 = \gamma(t_0)$, $v = \gamma'(t_0) \neq 0$ se dice que $v \in \mathbb{C}$ es el vector tangente a C en z_0 correspondiente a la parametrización γ.

    Si C_1, C_2 inciden en z_0, con vectores tangentes $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ asociados a sendas parametrizaciones γ_1, γ_2, se dice que C_1, C_2 se cortan con ángulo:

$$\theta = \angle(v_1, v_2) = \arg \frac{v_2}{v_1}.$$

a) Pruébese que si $f(z) = az + b$, y las curvas C_1, C_2 inciden en z_0 con ángulo θ, entonces las curvas $C_i' = f(C_i)$, $i = 1, 2$, inciden en $f(z_0)$ con ángulo θ.

b) Pruébese que si $f(z) = a\bar{z} + b$, C_1, C_2 inciden en z_0 con ángulo θ, ahora las curvas $C_i' = f(C_i)$, $i = 1, 2$, inciden en $f(z_0)$ con ángulo $2\pi - \theta$.

31. Se considera la función $f(z) = z^2 = u + iv$. Pruébese que para cada par de constantes c_1, c_2, $c_1 c_2 \neq 0$, las curvas:

$$u(x,y) = c_1, \qquad v(x,y) = c_2,$$

se cortan ortogonalmente. Pruébese por otra parte que $\gamma(t)$ es C^1 se tiene $(f \circ \gamma)'(t) = 2\gamma(t)\gamma'(t)$. Demuétrese que f preserva el ángulo entre curvas incidentes en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. ¿Qué sucede en $z = 0$?

32. (♣) Sean $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrización C^1. Pruébese que $T(\gamma(t))$ es también una parametrización C^1 tal que:

$$(T \circ \gamma)'(t) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \gamma'(t).$$

Demuéstrese que si C_1, C_2 se cortan en z_0 con un ángulo θ entonces $T(C_1), T(C_2)$ también se cortan en $T(z_0)$ formando ángulo θ.

Análisis Matemático VI **Curso 2008-2009**
Hoja 2

Continuidad en $\mathbb{C}$

- *Transformaciones de Möbius.*

1. Hallar las aplicaciones de Möbius que transforman:

a) $1, i, -1$ en $-1, i, 1$.

b) $-i, 0, i$ en $0, i, 2i$.

c) $-i, i, 2i$ en $\infty, 0, \frac{1}{3}$.

2. Hallar los puntos fijos de las aplicaciones:

$$T(z) = \frac{z-1}{z+1}, \qquad T(z) = \frac{z}{z+1}.$$

3. Pruébese que si cuatro puntos distintos $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ son colineales o yacen en una circunferencia entonces (z_1, z_2, z_3, z_4) es real (el recíproco es cierto, según se vio en teoría).

4. Hallar las imágenes de la circunferencia unidad $\{|z| = 1\}$ bajo las transformaciones:

$$w = \frac{1}{z}, \quad w = \frac{1}{z-1}, \quad w = \frac{1}{z-2}.$$

5. Hallar la imagen de $\{\Im z > 0\}$ bajo $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc < 0$.

6. Determinar una aplicación bilineal T que transforme $\{\Re z > 0\}$ en $\{|z| < 1\}$. Misma cuestión transformando $\{\Re z < 0\}$ en $\{|z| > 1\}$.

7. Calcular una aplicación bilineal T que transforme:

$$\{|z| < 1, \Im z > 0\},$$

en

$$\{\Re z > 0, \Im z > 0\}.$$

8. (♣) Hállese una transformación bilineal que aplique: 1) la circunferencia $|z - 4i| < 2$ en el semiplano $\Im w > \Re w$, 2) el centro de la circunferencia en el punto -4, 3) el punto $2i$ de la circunferencia en el origen.

- *Proyección de Steiner*

9. Sea $S^2 = \{(\xi, \eta, \zeta) : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$, $T : S^2 \to \mathbb{C}_\infty$ la proyección de Steiner:

$$\Re T = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad \Im T = \frac{\eta}{1-\zeta} \qquad P \neq N,$$

$T(N) = \infty$. Demuéstrese que si C es una circunferencia en $\mathbb{C}_\infty$ entonces $T^{-1}(C)$ también es una circunferencia en S^2.

10. Pruébese que la proyección de Steiner $T : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ define un homeomorfismo.

11. ¿Qué transformación de la esfera S^2 asigna $T^{-1}(1/z)$ a $T^{-1}(z)$?

12. Hallar las imágenes inversas T^{-1} de los conjuntos: 1) $\Im z > 0$, 2) $\Im z < 0$, 3) $\Re z > 0$, 4) $\Re z < 0$, 5) $|z| < 1$, 6) $|z| > 1$.

13. Se define la distancia cordal d_c en $\mathbb{C}_\infty$ como:

$$d_c(z, z') = |T^{-1}(z) - T^{-1}(z')|, \qquad d_c(z, \infty) = |T^{-1}(z) - N|,$$

con $N = (0, 0, 1)$. Probar que:

$$d_c(z, z') = \begin{cases} \dfrac{|z - z'|}{(1 + |z|^2)^{1/2}(1 + |z'|^2)^{1/2}} & z, z' \in \mathbb{C} \\ \dfrac{1}{(1 + |z|^2)^{1/2}} & z \in \mathbb{C}, z' = \infty. \end{cases}$$

Demostrar que $d_c(z, \infty) = \lim_{z' \to \infty} d_c(z, z')$.

- *Continuidad, sucesiones, series*

14. Probar que los únicos automorfismos continuos de $\mathbb{C}$ son $f(z) = z$ y $f(z) = \bar{z}$.

15. Se consideran las funciones $f, g : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ abierto. Si f, g continuas en $z_0 \in G$ pruébese que $\lambda f + \mu g$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, fg y f/g (en éste último caso añadiendo $g(z_0) \neq 0$) también son continuas en z_0. Si $h : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Ω abierto, $w_0 = f(z_0) \in \Omega$ y h es continua en w_0 demuéstrese que $h(f(z))$ es continua en z_0.

16. Probar que $|z|$ es Lipschitziana en $\mathbb{C}$ de constante 1.

17. Sea $f(z) = z^n$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Demostrar que u, v son polinomios homogéneos de grado n en x, y. Conclúyase de ahí que si $p(z)$ es un polinomio de grado n, $p(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces u, v son polinomios en x, y de grado n.

18. Sean $p(z), q(z)$ polinomios complejos, grado $q \leq$ grado p. El algoritmo de la división asegura la existencia de polinomios únicos $c(z), r(z)$, grado r < grado q tales que:

$$p(z) = c(z)q(z) + r(z).$$

Úsese el teorema fundamental del álgebra para probar que si $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ es un polinomio complejo de grado $n \geq 1$ entonces existen $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$ y enteros $m_1, \ldots, m_s$, $m_1 + \cdots + m_s = n$ tales que:

$$p(z) = (z - a_1)^{m_1} \ldots (z - a_s)^{m_s}. \tag{1}$$

Conclúyase que la descomposición (1) es única.

19. [Polinomio de Taylor de un polinomio] Sea $p(z)$ un polinomio de grado n, $z, h \in \mathbb{C}$. Demostrar que:

$$p(z+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k!} h^k,$$

para coefcientes c_k que deben expresarse en función de z.

20. Sea $p(z)$ un polinomio. Demuéstrese que $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$.

21. Sea $f(z)$ una función racional, $z = a$ un cero del denominador. Pruébese la existencia de $\lambda \in \mathbb{C}$ y de $n \in \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ tales que:

$$f(z) \sim \lambda(z-a)^n \qquad z \to a.$$

22. Demuéstrese que las funciones racionales $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ definen funciones continuas de $\mathbb{C}_\infty$ en $\mathbb{C}_\infty$.

23. Estudiar los límites:

$$a)\ \lim_{z\to i} 2z^2 - iz^3 + z\text{Arg }\bar{z}, \quad b)\ \lim_{z\to i} \frac{z^4+1}{z+i}, \quad c)\ \lim_{z\to -i} \frac{z^4-1}{z+i}, \quad d)\ \lim_{z\to 2i} \frac{z^2-iz+2}{z^2+4},$$

$$e)\ \lim_{z\to 1} \frac{\sqrt{z}-1}{z-1}, \quad f)\ \lim_{z\to 0} \frac{e^z + z\text{ Log } z}{1-z^2\text{Arg } z}, \quad d)\ \lim_{z\to 0} e^{-1/z^2}.$$

24. Hallar el límite de $z_n = n(\sqrt[n]{z} - 1)$.

25. Se sabe que la serie $\sum z_n$ converge con $|\text{Arg } z_n| \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Demostrar la convergencia de $\sum |z_n|$.

26. [Fórmula de sumación por partes]. Fijando $A_n = a_1 + \cdots + a_n$, probar que:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_{m-1} b_m.$$

27. Supóngase que la sucesión $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ está acotada y que b_n es decreciente con $\lim b_n = 0$. Pruébese que la serie $\sum a_n b_n$ es convergente.

28. Demostrar que (criterio de Gauss):

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n}),$$

con $a_n > 0$, $a < -1$, implica la convergencia de $\sum a_n$. Como aplicación establézcase la convergencia de la serie hipergeométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{(n+1)!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)},$$

en el régimen $\Re(\alpha+\beta-\gamma) < 0$.

29. Estudiar la convergencia de las series:

$$a)\ \sum \frac{n}{(2i)^n}, \quad b)\ \sum \frac{n!}{(in)^n}, \quad c)\ \sum e^{in},$$

$$d)\ \sum \frac{e^{in}}{n}, \quad e)\ \sum \frac{e^{\pi i/n}}{n}, \quad f)\ \sum \frac{\cos in}{2^n}.$$

Análisis Matemático VI **Curso 2008-2009**
Hoja 3

Series de potencias

---

1. Estudiar la convergencia de las siguientes funciones en los dominios indicados:

a) $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^k$ en $\{|z| < 1\}$.

b $f(z) = \sum \dfrac{1}{k^2 + z}$ en $\{\Re z > 0\}$.

2. Sea $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones uniformemente continuas en D, un abierto de $\mathbb{C}$, $f = \lim f_n$ uniformemente en D. Probar que f es también uniformemente continua en D. Supóngase además que las f_n son Lischitzianas de constante L_n con $\sup L_n < \infty$. Demostrar que f es Lipschitz en D. Estudiar qué sucede si se suprime la condición sobre las L_n.

3. Sea a_n una sucesión con $\lim a_n = l$. Probar que $\lim \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = l$. ¿Qué sucede si $l = \pm\infty$? Aprovéchese el resultado para probar que si a_n es una sucesión de términos positivos con:
$$\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = l,$$
entonces $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$.

4. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias para la existe:
$$\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R.$$
Calcúlese su radio de convergencia.

5. Calcular los valores de aglomeración de las sucesiones: a) $z_n = n^{-1} + (-1)^n$, b) $z_n = 2^{-n} + (-1)^n + i^n$, c) $z_n = [2 + \cos(n\pi)]e^{n\pi/5}$, d) $z_n = \operatorname{sen}(n\pi/2) + i\cos(n\pi/6)$, e) $z_n = n\operatorname{sen}(n\pi/2) + i\cos(n\pi/6)$.

6. Probar que $\underline{\lim}\, a_n, \overline{\lim}\, a_n$ son valores de aglomeración de a_n. Comprobar asimismo que la convergencia de a equivale a la igualdad de tales límites (N. B. estamos incluyendo en "convergencia" los casos $a_n \to \pm\infty$).

7. Sean a_n, b_n son sucesiones tales que $\lim a_n = a > 0$. Probar que $\underline{\lim}\, a_n b_n = a\, \underline{\lim}\, b_n$, $\overline{\lim}\, a_n b_n = a\, \overline{\lim}\, b_n$.

8. Sea $z = e^{i\theta}$ donde $\dfrac{\theta}{\pi}$ es racional. Estúdiense los valores de aglomeración de z^n.

9. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias de radio r. Demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$ la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{n-k}$ también tiene radio de convergencia r.

10. Hallar el radio de convergencia de las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

11. Se sabe que el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $r > 0$. Hallar el radio de convergencia de las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^p a_n z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n.$$

12. Hallar el radio de convergencia de cada una de las siguientes series:

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n, \quad a \in \mathbb{C} \qquad c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} k^n z^n, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n, \quad a \in \mathbb{C}, \qquad d) \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$$

13. Usar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y el producto de series para calcular la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$

14. Demostrar que el radio de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)},$$

es 1, discutiendo la convergencia de la serie en los valores $z = 1, -1, i$.

15. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ se introduce la serie binomial:

$$1 + \lambda z + \cdots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} z^n + \cdots.$$

Pruébese que tiene radio de convergencia 1. Llamando $f_\lambda(z)$ a la función definida por la serie en $|z| < 1$,

a) Determinar f_λ para $\lambda \in \mathbb{N}$.

b) Calcular $f_{-1}(z)$.

c) Calcular $f_{-n}(z)$, $n \in \mathbb{N}$.

d) Probar que $f_{-n}(z) = (1+z)^{-n}$. A tal fin compruébese que:

$$(1+z)^n f_{-n}(z) = 1,$$

para todo $z \neq -1$.

16. Desarrollar $\operatorname{senh} z$, $\cosh z$ en serie de potencias de z.

17. Compruébese que:

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$$

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y.$$

18. Usando la definición de las funciones $\operatorname{sen} z, \cos z$ pruébense las relaciones clásicas:

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1, \qquad \cos(-z) = \cos(z), \qquad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z,$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \operatorname{sen} z, \qquad \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - z) = \cos z,$$

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w, \quad \operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w,$$

$$1 + \operatorname{tag}^2 z = \sec^2 z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z.$$

19. Demostrar que los ceros de las funciones $\cos z, \operatorname{sen} z$ coinciden con los de sus restricciones al eje real.

20. Determínese el mayor dominio G donde $\operatorname{Log}(z^3+1)$ es continua.

21. Probar que la restricción $g(z)$ de $\operatorname{tag} z$ a $G = \{-\frac{\pi}{2} < \Re z \leq \frac{\pi}{2}, z \neq \frac{\pi}{2}\}$ es biyectiva sobre su imagen $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Demostrar que:

$$f(z) := g^{-1}(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right).$$

Pruébese que dicha función es continua en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ti : t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$. Se denomina al par (f, Ω) la "rama" principal de la función arcotangente $f(z) = \operatorname{Arctag} z$.

22. Demostrar que la función:

$$f(z) = -i \operatorname{Log}(\sqrt{1-z^2} + iz),$$

es continua en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \leq -1, z \geq 1\}$ y cumple $\operatorname{sen}(f(z)) = z$. Se la conoce como la "rama" principal de la función arcoseno: $f(z) = \operatorname{Arcsen} z$.

23. Determinar una función continua g definida en $G := \mathbb{C} \setminus \{x \leq -1, x \geq 1\}$ tal que $\cos(g(z)) = z$ en G. *Indicación.* Úsese la función $\operatorname{Arcsen} z$.

24. Dada $f(z) = \sec z$, pruébese que $g(z) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsen}\left(\frac{1}{z}\right)$ es continua en $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ y que $\sec(g(z)) = z$ para todo $z \in G$.

25. Pruébese que todo polinomio $p(z)$ define una función entera. Hallar su desarrollo en serie de potencias de $z - z_0$.

26. Demuéstrese que los polinomios complejos son sobreyectivos. ¿Y las funciones racionales? ¿y las enteras?

27. Estúdiese la sobreyectividad de la función $\operatorname{sen} z$ (véase el problema 22).

28. Pruébese que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$ en $|z| < r$ entonces $a_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

29. Calcular el desarrollo en serie de potencias de $z - z_0$ de la función:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

con $z_0 \neq -d/c$, $c \neq 0$.

30. Usando la descomposición en fracciones simples demuéstrese que toda función racional $f(z)$ es analítica en su dominio de definición G. Dado un $z_0 \in G$ ¿qué mide el radio de convergencia de su desarrollo en serie de potencias de $z - z_0$?

    Indicación. Puede ser útil el problema 15

31. Desarrollar en serie de potencias las funciones:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}, \qquad g(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, \qquad h(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3},$$

en cada uno de los puntos a de sus dominios de definición (que son el mismo).

32. Supóngase que $f(z)$ es analítica en un dominio G. Definiendo $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ en el dominio $z \in \overline{G} := \{z : \bar{z} \in G\}$ demostrar que g también es analítica.

33. Supongamos que $f(z)$ es analítica y no constante en un dominio G. Demostrar que $\overline{f(z)}$ no puede ser analítica en G.

34. Una serie de potencias formal en $z = \infty$ se define como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

$a_n \in \mathbb{C}$. Se define el radio de convergencia r de la serie como

$$r = \inf\{|z| : \text{la serie converge en } z,\ z \neq 0\},$$

poniendo $r = 0$ si la serie diverge en todo z. Obténgase una expresión –al estilo Hadamard– del radio de convergencia de la serie, probando que ésta constituye una función continua en $|z| > r$, con límite finito en el infinito.

35. Se dice que un dominio G contiene al punto del infinito si $G \supset \mathbb{C} \setminus \overline{B}$ para alguna bola de $\mathbb{C}$. Diremos que $f : G \to \mathbb{C}$ es analítica en $G \cup \{\infty\}$ si es analítica en cada uno de sus puntos, el del infinito incluido. Pruébese que f es analítica en $z = \infty$ si y sólo si $g(z) = f(1/z)$, $z \neq 0$, admite una extensión analítica a una cierta bola $B(0, R)$. Pruébese que toda función racional $f(z)$ acotada cuando $z \to \infty$ es analítica en el infinito.

36. Hallar el desarrollo de $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ en serie de potencias de $1/z$ ($c \neq 0$).

Complementos

1. Demuéstrese que:

$$\operatorname{sen} z \sim z, \qquad \cos z - 1 \sim \frac{z^2}{2}, \qquad \operatorname{tag}\, z \sim z, \qquad e^z - 1 \sim z,$$

   cuando $z \to 0$. A tal efecto resulta de utilidad el problema 9.

Análisis Matemático VI **Curso 2008-2009**
Hoja 4

Derivabilidad de las funciones complejas

---

1. ¿En qué puntos es derivable la función $f(z) = |z|^2$?

2. Estudiar la validez de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$ para la función $f(z) = \sqrt{|xy|}$. ¿Es derivable en el origen?, ¿es derivable en algún otro punto?

3. Estudiar la diferenciabilidad de la función $f(z) = x^2 + iy^2$.

4. Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones:

$$a)\ \text{tag}\ z, \qquad b)\ \text{cotang}\ z, \qquad c)\ \sec z, \qquad d)\ \text{cosec}\ z, \qquad e)\ \text{arctag}\ z,$$

$$f)\ \text{arcsen}\ z, \qquad g)\ \text{arccosen}\ z, \qquad h)\ \text{arcsec}\ z, \qquad i)\ \text{arccosec}\ z,$$

en donde para las funciones circulares inversas "arc" se toman las ramas principales (ver los Ejercicios del Capítulo III).

5. Compruébense las siguientes relaciones:

$$a)\ \text{Argch}\ z = \text{Log}\ (z + \sqrt{z^2 - 1}), \qquad b)\ \text{Argsh}\ z = \text{Log}\ (z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$c)\ \text{Argth}\ z = \frac{1}{2}\ \text{Log}\ \frac{z+1}{z-1},$$

donde se ha usado la rama principal de la raíz cuadrada. Calcúlense las derivadas de dichas funciones.

6. Estudiar la derivabilidad de la función $\log(\log(\log z))$.

7. Para cada una de las funciones siguientes hállese el dominio de holomorfía y su derivada:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}, \qquad f(z) = \text{cosec}\ \sqrt{z}, \qquad f(z) = \sec \sqrt{z}, \qquad f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} e^{\text{tag}\ z},$$

$$f(z) = \frac{\text{sen}(\sqrt{iz+1})}{z^2+1}, \qquad f(z) = \cos \sqrt{e^z - 1}.$$

8. Las mismas cuestiones que en el ejercicio 7 para las funciones:

$$f(z) = \sqrt[3]{z^4 - 1}, \qquad f(z) = \text{Arcsen}\ z^2, \qquad f(z) = e^{\text{Arctag}\ i\sqrt{z}},$$

$$f(z) = (z^2+1)^z, \qquad f(z) = \text{Log}\ (\ \text{Log}\ z), \qquad f(z) = (1 + e^z)\ \text{Log}\ (1 + e^z).$$

9. Para $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se define la rama principal de z^a como:

$$z^a = e^{a\ \text{Log}\ z},$$

donde $\text{Log}\ z$ designa la rama principal del logaritmo.

a) Pruébese que la definición dada coincide con z^n, z^{-n} y la rama principal de $z^{1/n}$ para $n \in \mathbb{N}$.

b) Pruébese que $z^a z^b = z^{a+b}$, $a, b \in \mathbb{C}$.

c) Pruébese que z^a es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{x \leq 0\}$ con $(z^a)' = az^{a-1}$.

10. Hallar todas las funciones $f(z)$ holomorfas en $\mathbb{C}$ que cumplen:

$$f'(z) = \lambda f(z),$$

para un número complejo dado $\lambda \in \mathbb{C}$.

11. Usar el ejercicio 10 para dar una nueva demostración de que:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Indicación. Compárense las funciones $e^{\lambda+z}$ y $e^{\lambda}e^{z}$.

12. Hallar todas las funciones enteras $f(z)$ tales que:

$$f''(z) + f(z) = 0$$

en $\mathbb{C}$.

Indicación. Imitar argumentos similares al caso real.

13. Se introdujo en el capítulo anterior la serie binomial:

$$g_\lambda(z) = 1 + \lambda + \cdots + \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)}{n!}z^n + \cdots .$$

Hállense las derivadas de todos los órdenes de g_λ en $z = 0$. Recuérdese que $g_\lambda(z)$ coincide con $(1+z)^\lambda$ para valores significativos de λ.

14. Se considera la rama principal de $(1+z)^\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Tras determinar el dominio de holomorfía de dicha función calcúlense las derivadas sucesivas de $(1+z)^\lambda$ en dicho dominio. ¿Cuánto valen éstas derivadas en $z = 0$? Comparar con el Ejercicio 13.

15. ¿Existen funciones holomorfas f tales que $u = \Re f = x^2 + y^2$?

16. Hallar las funciones holomorfas f tales que $\Re f = x^2 - y^2$.

17. Se sabe que f es entera con:

$$f(z) = u(x) + iv(y).$$

Probar que f es lineal.

18. Determinar la función entera $f(z)$ que satisfaga $\Re f'(z) = 3x^2 - 4y - 3y^2$, $\Re f(0) = 6$ y $f(1+i) = 0$.

19. Demostrar que si $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un dominio G y $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in G$ entonces f es constante.

20. Sea G un dominio y $f : G \to \mathbb{C}$ una función holomorfa que toma sus valores en $\{|z| = 1\}$. Demostrar que f es constante.

21. Se expresan las partes real e imaginaria $u(x, y), v(x, y)$ de una función compleja f en coordenadas polares para tener $U(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $V(r, \theta) = v(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Admitiendo la existencia de todas las derivadas parciales primeras, determínese la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Aplicar el resultado para estudiar la holomorfía de las funciones,

$$a)\ r^n \cos n\theta + i r^n \,\mathrm{sen}\, n\theta, \qquad b)\ r^{1/n} \cos\frac{\theta}{n} + i r^{1/n}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{n}, \qquad c)\ \log r^2 + 2\theta i,$$

$$d)\ r^\alpha e^{-\beta\theta} \cos(\alpha\theta + \beta \log r) + i r^\alpha e^{-\beta\theta}\,\mathrm{sen}(\alpha\theta + \beta\log r) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Solución: $rU_r = V_\theta$, $U_\theta = -rV_r$.

22. Estudiar el dominio de holomorfía de la función:

$$f(z) = \exp\left\{-i \ \mathrm{Log}\ \left[i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right]^{1/2}\right\},$$

calculando su derivada. ¿Cuál es la imagen del disco unidad $\{|z| < 1\}$ mediante f?

Indicación. Es un anillo.

23. Sea f una función holomorfa en un dominio $G \subset \mathbb{C}$. En $G^* = \{\bar{z} : z \in G\}$ se define $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Probar que f^* es también holomorfa.

24. Sea γ una curva C^1 a trozos parametrizada por $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ con $\phi(a) = z_0, \phi(b) = z_1$. Supongamos que $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio *convexo* G y que $\gamma \subset G$. Pruébese que la integral:

$$\int_\gamma -u_y \, dx + u_x \, dy,$$

sólo depende de z_0, z_1.

25. Sean $f_n : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diferenciables en G con derivadas continuas [1] y tales que $f_n \to f$, $f_n' \to g$ uniformemente en G. Pruébese que $g = f'$.

26. Sean $f_n : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diferenciables en G con derivadas continuas de forma que $|f_n(z)|, |f_n'(z)| \leq M_n$ en G con $\sum_{n=1}^\infty M_n < \infty$. Si se define:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

[1] Esta condición es innecesaria en virtud del teorema de Goursat.

pruébese que f es derivable con:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z).$$

27. Se considera la serie de potencias con centro en el infinito:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

y radio de convergencia $R > 0$ (véase el Capítulo III). Estúdiese la derivabilidad de f en $|z| > R$ y el comportamiento asintótico de las derivadas cuando $z \to \infty$.

28. Sea $\theta = \theta(x, y) = \theta(z)$ una función real y continua definida en un dominio $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se dice que θ es una rama del argumento si:

$$e^{i\theta(z)} = \frac{z}{|z|} \qquad z \in G.$$

a) Si θ es una rama de $\arg z$ en G ¿cómo son las otras posibles ramas de $\arg z$ en G?

b) ¿Puede existir una rama de $\arg z$ definida en un entorno "perforado" de cero de la forma $D(0, r) \setminus \{0\}$?

c) Demuéstrese que si θ es una rama de $\arg z$ en G entonces θ es armónica en G.

d) En las condiciones de c), pruébese que $r^n \cos n\theta$, $r^n \operatorname{sen} n\theta$ son armónicas ($r = |z|$).

Nota. Se conoce a las expresiones $\sum_{n=0}^{N} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, como polinomios armónicos de grado N.

29. Sea G un dominio y g una rama de la raíz n-ésima de z. Hállense todas las otras ramas.

30. Pruébese que no puede existir una rama de la raíz n-ésima de z definida en un entorno de cero $\{z : |z| < r\}$.

31. Se sabe que g es continua en un dominio $G \subset \mathbb{C}$, $0 \notin G$ (cf. Ejercicios 28, 30) y que cumple:

$$g(z)^n = z,$$

es decir que g es una rama de la raíz n-ésima. Pruébese que g es derivable determinando una expresión de su derivada en términos de g.

32. Demostrar que no existe una rama del logaritmo definida en $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

33. Pruébese que $\log |z|$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. ¿Admite allí una función armónica conjugada?

Indicación. Véase el Ejercicio 32

34. Sean G, Ω dominios de $\mathbb{C}$, $f, h : G \to \mathbb{C}$, $g : \Omega \to \mathbb{C}$, h, g holomorfas, h inyectiva, f continua, de forma que:

$$h(z) = g(f(z)) \qquad z \in G,$$

junto con $g'(w) \neq 0$ en Ω.

a) Probar que f es inyectiva.

b) Probar que f es holomorfa en G dando una expresión de su derivada.

Análisis Matemático VI **Curso 2008-2009**
Hoja 5-1^a parte

Integración compleja

- *Integración compleja*

1. Para $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, denotamos $[z_{k-1}, z_k]$ el segmento de z_{k-1} a z_k, por $[z_0, \ldots, z_n]$ la poligonal constituida por tales segmentos. Sean $\gamma_1 = [1, i]$, $\gamma_2 = [1, 1+i, i]$. Calcúlense:
$$\int_{\gamma_j} z^2 \, dz, \quad j = 1, 2.$$

2. Defínase $\gamma(s) = \exp(ins)$, $s \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$. Calcular:
$$\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz.$$

3. Calcular:
$$\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz,$$
siendo ahora $\gamma = [1-i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i]$.

4. Calcular:
$$\int_\gamma \frac{1}{z} \, dz,$$
donde a) γ es $\{|z| = 1, \Im z \geq 0\}$ de $+1$ a -1, b) γ es $\{|z| = 1, \Im z \leq 0\}$ de $+1$ a -1.

5. Se define $\gamma(s) = r\exp(is)$, $s \in [0, \pi]$,
$$I(r) = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} \, dz.$$
Calcular $\lim_{r \to 0+} I(r)$.

6. Para $\gamma(s) = 1 + e^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$, hallar $\int_\gamma (z^2 - 1)^{-1} \, dz$.

7. Sea γ una curva cerrada C^1 a trozos en un abierto G y supóngase que $a \notin G$. Pruébese que para $n \geq 2$, $\int_\gamma (z-a)^{-n} \, dz = 0$.

8. Sean f, g funciones holomorfas en un abierto $G \subset \mathbb{C}$ con derivadas f', g' continuas en G. Si γ es una curva C^1 a trozos de extremos a, b, pruébese que:
$$\int_\gamma fg' \, dz = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_\gamma f'g \, dz.$$

9. El teorema de Cauchy en un disco $D(a,R)$ establece que si f es holomorfa con derivada continua en $D(a,r)$ y $\gamma \subset D(a,r)$ es una curva cerrada y C^1 a trozos entonces:

$$\int_\gamma f = 0.$$

Extender el teorema de discos a "semiplanos".

10. Calcúlense las siguientes integrales ($0 \le s \le 2\pi$ en todos los casos):

$$a) \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\,dz, \quad b) \int_\gamma \frac{dz}{z-a}, \quad c) \int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}\,dz, \quad d) \int_\gamma \frac{\log z}{z^n}\,dz,$$

donde $\gamma = e^{is}$ en a), c), $\gamma = a + re^{is}$ en b), $\gamma = 1 + \frac{1}{2}e^{is}$ en d).

11. Calcular las integrales:

$$a) \int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\,dz, \quad b) \int_\gamma \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^n}\,dz, \quad c) \int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz,$$

$$d) \int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz, \quad e) \int_\gamma \frac{z^{1/m}}{(z-1)^m}\,dz,$$

en donde $0 \le s \le 2\pi$ en todos los casos, $\gamma = e^{is}$ en a), b), d), $\gamma = 2e^{is}$ en c), $\gamma = 1+\frac{1}{2}e^{is}$ en e).

12. Calcular:

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}\,dz,$$

$\gamma = re^{is}$, $0 \le s \le 2\pi$, para todos los valores posibles de $r \in (0,2) \cup (2,\infty)$.

13. (♣) Usar la serie geométrica para probar que:

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i,$$

para $z \in D(a,r)$, donde $\gamma(s) = a + re^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$.

- *Desarrollos en serie de potencias*

14. Hallar el desarrollo en serie de potencias de $\operatorname{Log} z$ en $z = i$, ¿cuál es su radio de convergencia?

15. Calcular el desarrollo en serie de potencias de $\sqrt{z}$ en $z = 1$ determinando su radio de convergencia.

16. Sea z_0 un punto del dominio de holomorfía de $f(z) = (1+z)^\lambda$. Hállese el desarrollo en serie de potencias de f en z_0 calculando el radio de convergencia.

17. Pruébese que:

$$f(z) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

define, en un dominio $G \subset \mathbb{C}$ por determinar, una rama de la función arcotangente (véase la Hoja 3). Es decir:

$$\text{tag}\,(f(z)) = z, \qquad z \in G.$$

Tras comprobar que $0 \in G$ pruébese que el desarrollo de $f(z)$ en $z=0$ es:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

determinando el radio de convergencia de la serie.

18. Hallar el desarrollo en serie de $\dfrac{e^z - 1}{z}$ en $z = 0$ determinando el radio de convergencia. Definiendo:

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1},$$

y escribiendo su desarrollo en serie como:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k,$$

determinar el radio de convergencia.

Pruébese además que:

$$\binom{n}{n-1} a_{n-1} + \binom{n}{n-2} a_{n-2} + \cdots + \binom{n}{1} a_1 + a_0 = 0,$$

para $n \geq 2$.

19. Si f es como en el problema 18 probar que $f(z) + \dfrac{1}{2} z$ es una función par. Dedúzcase de ahí que $a_k = 0$ para $k = \dot{2} + 1$. Los $B_{2n} = (-1)^{n-1} a_{2n}$, $n \geq 1$ se llaman los números de Bernoulli. Calcular B_2, B_4, B_6.

- *Estimaciones de Cauchy. Principio del módulo máximo.*

20. Sea f una función entera que satisface la estimación:

$$|f(z)| \leq M |z|^n,$$

para todo z con $|z| \geq R$ y cierto $n \in \mathbb{N}$. Pruébese que f ha de ser un polinomio de grado no superior a n.

Indicación. Estímense las derivadas de f en $z = 0$.

21. El "*principio del módulo máximo*" es un resultado clásico en variable compleja que establece lo siguiente: *una función compleja* $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *derivable con derivada continua en un dominio* G *tal que* $|f(a)| = \sup_G |f(z)|$ *para un punto* $a \in G$ *es necesariamente constante en* G. En otras palabras $|f(z)|$ nunca alcanza el máximo en un punto interior del dominio G salvo que sea constante.

    Demuéstrese la siguiente consecuencia del principio del módulo máximo: una función f derivable con derivada continua en un dominio G para la que existe $a \in G$ cumpliendo:

    $$|f(z)| \geq |f(a)| > 0,$$

    debe mantenerse constante en G.

22. Usar 21 para dar una demostración alternativa del teorema fundamental del álgebra.

    Indicación. Repasar los pasos auxiliares de la prueba en el Capítulo II. En particular, que si $p(z)$ es un polinomio entonces $|p(z)|$ alcanza el mínimo en $\mathbb{C}$.

23. Sea $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una función armónica, $u(z) \geq 0$ en $\mathbb{C}$. Demostrar que u es constante.

    Indicación. Constrúyase en primer lugar una función entera.

Análisis Matemático VI **Curso 2008-2009**
Hoja 5-2^a parte

Integración compleja

- *Ceros, prolongación analítica*

1. Se consideran las funciones

$$g_\lambda(z) = 1 + \lambda z + \cdots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda+n-1)}{n!} z^n + \cdots$$

   y $(1+z)^\lambda$ (en su definición estándar, usando la parte principal). Demuéstrese que $g_\lambda(z) = (1+z)^\lambda$ en $|z| < 1$.

2. Si f, g son holomorfas con derivada continua en un dominio G, $f(z)g(z) = 0$ para cada $z \in G$ demostrar que o bien $f \equiv 0$ o bien $g \equiv 0$.

3. Siendo f y g funciones holomorfas con derivada continua en un dominio G se supone que $\bar{f}g$ es también holomorfa con derivada continua en G. Pruébese que o bien f es constante o bien $g \equiv 0$.

4. Sea f una función entera (es decir holomorfa con derivada continua en $\mathbb{C}$) que cumple:

$$f'(z)^2 + f(z)^2 = 0,$$

   para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede decir de una tal f?

5. [Regla de l'Hospital] Supongamos que $f(z)$, $g(z)$ tienen un cero de orden m en $z = a$. Probar que existe el $\lim_{z\to a} f/g$ y que:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f^{(n)}(z)}{g^{(n)}(z)}.$$

6. Si f, g holomorfas en G con derivada continua, $f(a) = g(a) = 0$ para algún $a \in G$, $g \not\equiv 0$ en G, demostrar que siempre existe:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)},$$

   (aunque sea ∞ en algunos casos).

7. Sea f una función entera no constante que posee una suceción $\{z_n\}$ de ceros distintos ($z_n \neq z_m$ si $n \neq m$. ¿Qu'e se puede decir sobre la suceción $\{z_n\}$?

   Indicación. ¿Puede ser $\{z_n\}$ acotada?

- *Índice de una curva (número de vueltas). Fórmulas de Cauchy.*

8. (♣) Construir un ejemplo de curva cerrada γ de suerte que para todo entero $m \in \mathbb{Z}$ exista un punto $a \notin \gamma$ tal que:
$$n(\gamma, a) = m.$$

9. Dar una prueba directa de que si $\gamma(s) = a + re^{is}$, $0 \le s \le 2\pi$ (una parametrización de $\partial D(a,r)$) y si $z_0 \notin \bar{D}(a,r)$ entonces:
$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 0.$$
Indicación. Buscar una primitiva de $1/(z - z_0)$.

10. (♣) Sea K un compacto convexo cuya frontera $\gamma = \partial K$ es una curva cerrada C^1 a trozos. Usando la idea de 9 pruébese asimismo que:
$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 0$$
para $z_0 \notin K$.

Indicación. Se trata de encontrar toda una semirrecta por z_0 en el exterior de K.

11. Si $p(z)$ es un polinomio de grado n y $R > 0$ es tal que $p(z) \neq 0$ para $|z| \ge R$, pruébese que:
$$\int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = 2\pi i n,$$
donde $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ y r es cualquier número $r \ge R$.

Indicación. Puede ser útil factorizar el polinomio.

12. Sean $D_\pm = D(\pm 1, 1/2)$ y $G = D(0,3) \setminus \{D_- \cup D_+\}$. Sean asimismo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ las curvas cerradas $|z-1| = 1$, $|z+1| = 1$, $|z| = 2$. Defínanse en las γ_i orientaciones adecuadas de suerte que:
$$n(\gamma_1, z) + n(\gamma_2, z) + n(\gamma_3, z) = 0,$$
para todo $z \in \mathbb{C} \setminus G$.

13. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua que es además derivable con derivada continua en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Pruébese que f es en realidad una función entera.

Indicación. Puede venir bien acordarse de Morera.

14. [Convergencia uniforme y holomorfía] Sean $f_n \in H(G)$, $f_n \to f$ uniformemente en G. Pruébese que $f \in H(G)$.

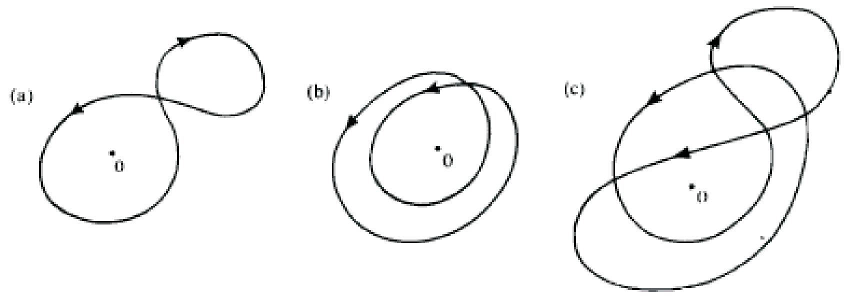
15. Se sabe que f es holomorfa en $B(0,1)$ y que $|f(z)| \le 1$ para $|z| < 1$. Demostrar que $|f'(0)| \le 1$.

16. Sea $\gamma(s) = se^{is}$, $0 \le s \le 2\pi$, $\gamma(s) = 4\pi - s$, $2\pi \le s \le 4\pi$. Calcular:
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + \pi^2}.$$

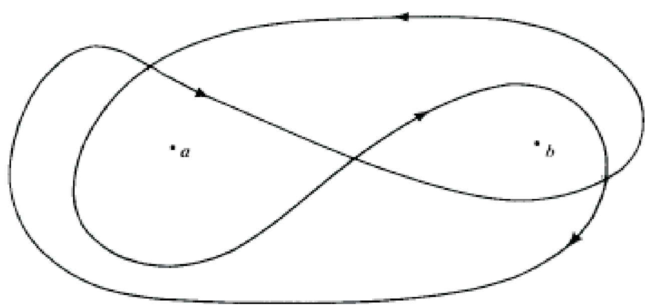
17. Evaluar:

$$\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\,dz,$$

donde γ es cada una de las curvas que se indican a continuación.



18. Sea $G = \mathbb{C} \setminus a, b$, $a \neq b$ y sea γ la curva cerrada que se indica en la figura:



a) Probar que $n(\gamma, a) = n(\gamma, b) = 0$. Conclúyase que γ es homóloga a cero en G ($\gamma \approx 0$).

b) Convénzase el lector (con el argumento intuitivo que me mejor le venga) de que γ no es homótopa a 0 en G.

19. Evaluar la integral:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$$

donde $\gamma(s) = 2|\cos 2s|e^{is}$, $0 \leq s \leq 2\pi$.

20. Se consideran la poligonal $\gamma = [0, 2, 2+2i, 2i, 0]$, los puntos:

$$z_1 = \frac{1}{2} + i, \qquad z_2 = 1 + \frac{3}{2}i, \qquad z_3 = 1 + \frac{i}{2}, \qquad z_4 = \frac{3}{2} + i,$$

y la función:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}.$$

Hallar:

$$\int_\gamma f.$$

21. Sea γ una curva cerrada C^1 a trozos en $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Se pide calcular todos los posibles valores de la integral:

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}.$$

Análisis Matemático VI **Curso 2008-2009**
Hoja 6

Singularidades

A) *Singularidades.*

1. Estudiar la naturaleza de las singularidades de las funciones siguientes:

$$a)\ f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}, \qquad b)\ f(z) = \frac{\cos z}{z}, \qquad c)\ f(z) = \frac{\cos z - 1}{z},$$

$$d)\ f(z) = \exp\frac{1}{z}, \qquad e)\ f(z) = \frac{\log(z+1)}{z^2}, \qquad f)\ f(z) = \frac{\cos z^{-1}}{z^{-1}},$$

$$g)\ f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)}, \qquad h)\ f(z) = (1-e^z)^{-1} \qquad i)\ f(z) = z \operatorname{sen}\frac{1}{z}, \qquad j)\ f(z) = z^n \operatorname{sen}\frac{1}{z}.$$

2. Sean G un dominio $z = a$ un polo de f de suerte que $f \in H(G \setminus \{a\})$. Pruébese que existen a lo sumo una función $g \in H(G)$ y un entero m tales que:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}, \qquad z \neq a,$$

con $g(a) \neq 0$.

3. Sean $f, g \in H(G)$, $a \in G$, $f(a) \neq 0$, $z = a$ un cero de g de orden m. Probar que $z = a$ es un polo de f/g de orden m.

4. Sean $f, g \in H(G)$, $a \in G$, $f(a) \neq 0$, $z = a$ un cero simple g. Probar que

$$\operatorname{Res}\,(\frac{f}{g}, a) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

5. Usar el problema 2 para probar –en la mismas condiciones– la existencia de una función holomorfa $g_1 \in H(G)$ única tal que:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + g_1(z), \qquad z \neq a.$$

6. Sean G un dominio, $\{a_1, \ldots, a_N\} \subset G$ y $f \in H(G \setminus \{a_1, \ldots, a_N\})$ de forma que los a_i son polos de f de órdenes m_i. Probar que existe una función holomorfa $g \in H(G)$ tal que:

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{m_j} \frac{a_{j,-l}}{(z-a_j)^l} + g(z), \qquad z \neq a_j.$$

7. Pruébese que si una función racional no tiene polos entonces es un polinomio.

8. Sea $f(z) = p(z)/q(z)$ una función racional siendo la fracción irreducible. Haciendo uso de los resultados del capítulo obténgase su descomposición en fracciones simples.

9. Sean $f, g \in H(G)$, $a \in G$, $f(a) \neq 0$, $z = a$ cero de orden m de g. Probar que entonces $z = a$ es un polo de orden m de $\dfrac{f}{g}$.

10. Sean $f, g \in H(G)$, $a \in G$, $f(a) \neq 0$, $z = a$ cero simple de g. Probar que entonces

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

11. Dada la función:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)},$$

obtener su desarrollo de Laurent en los anillos: $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < \infty$.

12. Se considera la función:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)},$$

$a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Calcular su desarrollo de Laurent en torno a a_1 determinando el valor óptimo de $r > 0$ de suerte que el mismo converja en $0 < |z - a_1| < r$.

13. Hállenese los desarrollos de Laurent de las funciones f que siguen en las regiones D que se indican:

$$a)\ f(z) = z^{-4}(e^{z^2} - 1), \quad B(0,1) \setminus \{0\}, \quad b)\ f(z) = \frac{1}{z^2+1}, \quad \{1 < |z - 2i| < 3\},$$

$$c)\ f(z) = z(z-2)^{-4}\cos \pi z, \quad |z-2| > 0, \qquad d)\ f(z) = z^6 \cos^2(z^{-2}), \quad \{|z| > 0\}.$$

14. Demostrar que $\operatorname{tag} z$ es analítica en $\mathbb{C}$ con excepción de polos simples en $z = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Calcular la parte singular de la función en dichos polos.

15. Sea $f \in H(\{z : |z| > r\})$ tal que $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Pruébese que existen $\rho > 0$, $g \in H(D(0,\rho))$, $g(0) \neq 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que:

$$f(z) = z^m g\left(\frac{1}{z}\right) \qquad |z| < \frac{1}{\rho}.$$

16. Dése el desarrollo de Laurent de la función

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ¿Se puede generalizar el resultado?

17. (♣) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y biyectiva. Demuéstrese que:

$$f(z) = az + b$$

para ciertos $a, b \in \mathbb{C}$.

Indicación. Usar el Ejercicio 15 en combinación con el teorema de Liouville.

18. Se considera la función:

$$f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda(z + \frac{1}{z})\right\},$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ un parámetro. Usar el desarrollo de Laurent para probar que:

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^n + \frac{1}{z^n}),$$

para todo $0 < |z| < \infty$ donde los coeficientes son:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\lambda \cos t} \cos nt \; dt.$$

B) *Integración.*

19. Calcúlense las siguientes integrales o alternativamente pruébense las identidades que se señalan.

a)

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \qquad a > 1.$$

b) Extender la identidad cambiando $a > 1$ por $w \in \{\Re w > 0\} \setminus [-1, 1]$ para obtener:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{w + \cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{w^2 - 1}}.$$

c)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\, d\theta, \qquad a^2 < 1.$$

d)

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} \qquad a > 1.$$

Indicación. Consultar ejercicios previos.

e)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a + \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{2[a(a+1)]^{1/2}}, \qquad a > 0.$$

20. Γ_R designa el camino $\{Re^{is} : 0 \leq s \leq \pi\}$. Probar la estimación (lema de Jordan):

$$\int_{\Gamma_R} |e^{iz}|\ |dz| < \pi,$$

para todo $R > 0$.

21. Ahora f tiene un polo simple en el punto a con residuo a_{-1} mientras $\Gamma(\varepsilon, \phi)$ representa el camino $\{a + \varepsilon e^{is} : \theta \leq s \leq \theta + \phi\}$. Demostrar:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\Gamma(\varepsilon,\phi)} f(z)\ dz = i\phi a_{-1}.$$

22. Calcúlense las siguientes integrales o alternativamente pruébense las identidades que se señalan.

$$a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \qquad b)\ \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\pi}{2}, \qquad c)\ \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1},$$

$$e)\ \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}, \qquad f)\ \int_0^{\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

23. Calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}, \qquad 0 < a < 1.$$

Indicación. Usar el camino $[-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i, -R]$, $R > 0$.

24. Sean a, b complejos distintos con la parte real positiva. Demostrar que:

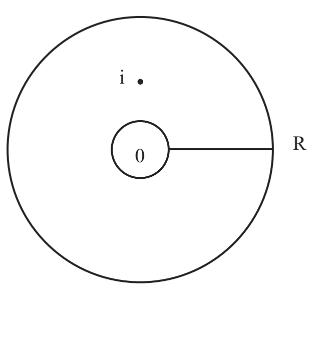
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\ dx = \frac{\pi}{a^2-b^2}(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}).$$

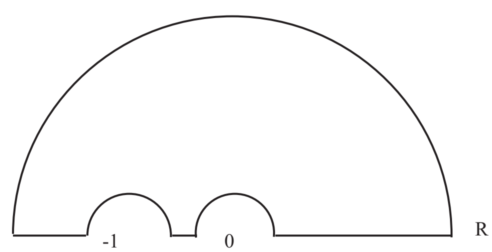
25. Calcúlense las siguientes integrales o alternativamente pruébense las identidades que se señalan.

a) Calcular:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\ dx, \qquad 0 < a < 1.$$

Indicación. Usar el camino de la izquierda.





b) Se sabe que:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi a}, \qquad 0<a<1.$$

Extender el resultado cambiando $a\in(0,1)$ por $a\in\mathbb{C}$, $a=p+iq$, $0<p<1$.

Indicación. Usar que la integral del primer miembro es holomorfa en $\{0<\Re a<1\}$.

c) Usar el ejercicio previo para calcular las integrales:

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\cos(q\log t)\,dt, \qquad \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\operatorname{sen}(q\log t)\,dt.$$

d) Para $-1<a<1$ probar las igualdades:

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{\pi a}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x)^2}\,dx = \pi a\csc \pi a.$$

e) Calcular:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx, \qquad 0<a<1,$$

usando en esta ocasión el camino de la derecha en la figura precedente.

f) Deducir –con un sólo cálculo– las identidades:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{1/4}}{x^2+x+1} = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{1/4}}{x^2-x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}.$$

g) Considerando la función $f(z)=z^{1/2}\dfrac{\log z}{(1+z)^2}$ pruébese que:

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}\log x}{(1+x)^2} = \pi, \qquad \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{(1+x)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

h) Pruébese que:

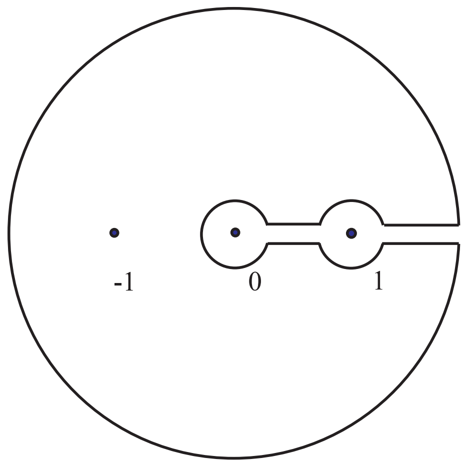
$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{1+x^2} = \frac{\pi^3}{8}, \qquad \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} = 0.$$

i) Toda la serie:

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{1+x^3}, \qquad \text{Sol.}\,\frac{3\pi^2\sqrt{2}}{64},$$

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^4}, \qquad \text{Sol.} -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16},$$
$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}, \qquad \text{Sol.} \frac{-\pi}{4},$$
$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}, \qquad \text{Sol.} \frac{-\pi^2}{4}.$$

Indicación. En el último de los casos se sugiere el camino siguiente.



k)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}, \qquad 0 < a < 1.$$

Indicación. Usar el cambio $x = \log t$.