

Funciones de una variable compleja  
Curso de Introducción

José C. Sabina de Lis  
Universidad de La Laguna

29 de octubre de 2013



# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>PRÓLOGO</b>  | <b>IV</b> |
| <b>1. El cuerpo de los números complejos</b>                            | <b>1</b>  |
| 1.1. Los números reales. Propiedades . . . . .                          | 1         |
| 1.2. Los números complejos . . . . .                                    | 8         |
| 1.3. El argumento . . . . .   | 10        |
| 1.4. Raíces $n$ -ésimas . . . . .                                       | 14        |
| 1.5. Funciones complejas . . . . .                                      | 14        |
| 1.6. Transformaciones bilineales. 1ª nota . . . . .                     | 19        |
| 1.7. Apénice: una revisión de trigonometría . . . . .                   | 20        |
| 1.8. Ejercicios . . . . .   | 24        |
| 1.9. Soluciones . . . . .   | 28        |
| <b>2. Continuidad y topología en <math>\mathbb{C}</math></b>            | <b>29</b> |
| 2.1. Convergencia y continuidad en $\mathbb{C}$ . . . . .               | 29        |
| 2.2. Series . . . . .   | 32        |
| 2.3. Conexidad . . . . .  | 33        |
| 2.4. Compactificación de $\mathbb{C}$ . Proyección de Steiner . . . . . | 33        |
| 2.5. Transformaciones bilineales. 2ª nota . . . . .                     | 38        |
| 2.6. El teorema fundamental del álgebra . . . . .                       | 42        |
| 2.7. Ejercicios . . . . .   | 43        |
| <b>3. Funciones analíticas</b>  | <b>47</b> |
| 3.1. Preliminares . . . . .   | 47        |
| 3.2. Series de potencias . . . . .                                      | 49        |
| 3.3. Funciones analíticas . . . . .                                     | 53        |
| 3.4. Funciones exponencial y logaritmo . . . . .                        | 59        |
| 3.5. Ejercicios . . . . .   | 65        |
| <b>4. Derivabilidad en <math>\mathbb{C}</math></b>                      | <b>71</b> |
| 4.1. Derivabilidad . . . . .  | 71        |
| 4.2. Funciones armónicas . . . . .                                      | 79        |
| 4.3. Apéndice: varias variables . . . . .                               | 81        |
| 4.4. Ejercicios . . . . .   | 82        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>5. Integración compleja</b>                       | <b>87</b>  |
| 5.1. Integral de Riemann compleja . . . . .          | 87         |
| 5.2. Integrales complejas . . . . .                  | 90         |
| 5.3. El teorema de Cauchy en círculos . . . . .      | 92         |
| 5.4. Teoremas de Morera y de Goursat . . . . .       | 96         |
| 5.5. Ceros de las funciones holomorfas . . . . .     | 96         |
| 5.6. Principio del módulo máximo . . . . .           | 97         |
| 5.7. Índice de una curva . . . . .                   | 98         |
| 5.8. Teorema de Cauchy: versión homológica . . . . . | 100        |
| 5.9. Teorema de Cauchy: versión homotópica . . . . . | 104        |
| 5.10. Teorema de la aplicación abierta . . . . .     | 106        |
| 5.11. Ejercicios . . . . .                           | 108        |
| <b>6. Singularidades aisladas</b>                    | <b>115</b> |
| 6.1. Singularidades aisladas . . . . .               | 115        |
| 6.2. Desarrollos de Laurent . . . . .                | 117        |
| 6.3. Teorema de los residuos . . . . .               | 121        |
| 6.4. Ejercicios . . . . .                            | 124        |
| <b>BIBLIOGRAFÍA</b>                                  | <b>131</b> |

# Prólogo

Estas notas recogen el curso de introducción a las funciones de una variable compleja que he venido impartiendo en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de La Laguna. Comprenden la materia obligatoria, un tanto exigua por cierto, identificada en plan de estudios como “Análisis Matemático VI”.

No tienen, de momento, mayor pretensión que brindar al alumno la guía escrita de un alto porcentaje del contenido de las lecciones de pizarra. Por otra parte se usan para suprimir del discurso detalles relativamente rutinarios que puede el estudiante completar por sí mismo.

Beteta, diciembre de 2007



# CAPÍTULO 1

## El cuerpo de los números complejos

### 1.1. Los números reales. Propiedades

Módulo identificaciones, los números reales  $\mathbb{R}$  constituyen el único cuerpo  $K$  conmutativo, ordenado y completo (noción que se define a continuación). Conforman una ampliación mejorada de conjuntos de números más elementales. A saber, los naturales  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , los enteros  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  y los racionales  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$ .

**Definición 1.1** (Cuerpos). *Un conjunto  $K$  dotado de dos operaciones “+” y “·” se dice un cuerpo conmutativo si*

- i)  $(K, +)$  es un grupo abeliano (conmutativo).*
- ii)  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  es un grupo y “·” es conmutativa.*
- iii) “·” es distributiva con respecto a “+”.*

*Se dice que  $(K, +)$  es un grupo abeliano si para  $x, y, z \in K$  arbitrarios*

- 1)  $x + (y + z) = (x + y) + z$
- 2)  $\exists 0 \in K : x + 0 = 0 + x = x$
- 3)  $\forall x, \exists \hat{x} : x + \hat{x} = \hat{x} + x = 0$
- 4)  $x + y = y + x$ .

*En 3),  $\hat{x}$  se llama el opuesto de  $x$  y se escribe  $-x$ . Análogamente, si abreviamos  $x \cdot y = xy$ ,  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  cumple  $(x, y, z \in K \setminus \{0\}$  cualesquiera):*

- 5)  $x(yz) = (xy)z$
- 6)  $\exists 1 \in K \setminus \{0\} : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
- 7)  $\forall x, \exists \tilde{x} : x\tilde{x} = \tilde{x}x = 1$
- 8)  $xy = yx$ .

Nótese que está implícito en 6) que  $1 \neq 0$ . Se llama a  $\tilde{x}$  el inverso de  $x$  y se escribe  $x^{-1}$ . Finalmente iii) significa que para  $x, y, z \in K$  cualesquiera:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

La diferencia y el cociente de dos elementos  $x, y \in K$  ( $y \neq 0$ ) se definen como  $x - y = x + (-y)$ ,  $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ , respectivamente.

Como consecuencia de la Definición 1.1, en todo cuerpo  $K$  se cumplen una serie de propiedades que son familiares en el contexto de los números. A partir de ahora sobeentenderemos el apelativo “conmutativo” al referirnos a los cuerpos.

**Proposición 1.2.** *Sea  $(K, +, \cdot)$  un cuerpo. Se cumplen entonces las siguientes propiedades:*

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| 1) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$ | 5) $x \neq 0, xy = xz \Rightarrow y = z$     |
| 2) $x + y = x \Rightarrow y = 0$     | 6) $x \neq 0, xy = x \Rightarrow y = 1$      |
| 3) $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$    | 7) $x \neq 0, xy = 1 \Rightarrow y = x^{-1}$ |
| 4) $-(-x) = x$ .                     | 8) $x \neq 0, ((x^{-1})^{-1} = x$ .          |

Las propiedades 3), 7) afirman que el opuesto y el inverso de  $x$  son únicos.

Para completar el panorama familiar de las leyes del cálculo se tiene la propiedad siguiente.

**Proposición 1.3.** *Si  $(K, +, \cdot)$  es cuerpo entonces para  $x, y \in K$  arbitrarios:*

- 1)  $0 \cdot x = 0$
- 2)  $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$
- 3)  $(-x)y = x(-y) = -xy$
- 4)  $(-x)(-y) = xy$ .

*Demostración.* En el caso de 1):

$$x \cdot 0 = x(0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow x \cdot 0 = 0.$$

Para 2) si  $x \neq 0$  y fuese  $xy = 0$  resultaría  $y = 0$  contra lo supuesto.

Asimismo se tienen las relaciones:

$$xy + (-x)y = 0, \quad xy + x(-y) = 0$$

de donde se deduce 3). Para 4):

$$(-x)(-y) = -x(-y) = -(-xy) = xy.$$

□

Siguiendo [22] damos la siguiente definición de orden total.

**Definición 1.4.** Un conjunto  $K$  (totalmente) ordenado es aquél que posee una relación “ $<$ ” que cumple las propiedades:

- i) Dados  $x, y \in K$  se satisface sólo una de las siguientes propiedades: o bien  $x < y$ , o bien  $x = y$  o bien  $y < x$ .
- ii) (Transitiva)  $x < y$  &  $y < z$  implican  $x < z$ .

Es habitual denotar  $x \leq y$  si  $x < y$  o  $x = y$ . Asimismo  $y > x$  e  $y \geq x$  se usan indistintamente para representar  $x < y$ ,  $x \leq y$ , respectivamente. Es también habitual introducir la relación de orden en la forma  $x \leq y$ .

Otra definición clave para caracterizar los números reales es la de cuerpo ordenado.

**Definición 1.5.** Un cuerpo  $(K, +, \cdot)$  dotado de una relación de orden total “ $<$ ” se dice un “cuerpo ordenado” si se cumplen las siguientes propiedades de compatibilidad:

- 1)  $y < z \Rightarrow x + y < x + z$
- 2)  $x > 0, y > 0 \Rightarrow xy > 0$ .

Si  $K$  es un cuerpo ordenado y  $x \in K$  entonces o bien  $x > 0$  o  $x = 0$  o  $x < 0$ . En el primer caso se dice que  $x$  es positivo, mientras  $x$  negativo significa  $x < 0$ . Se denota por  $K^+$  a los elementos positivos de  $K$ . La definición 1.5 dice que el orden es invariante por traslaciones [1] y que  $K^+$  es invariante frente al producto [2].

**Proposición 1.6.**

- 1)  $K^+$  es invariante frente a la suma.
- 2)  $x < y \Leftrightarrow y - x > 0$ .

Es también habitual introducir la noción de cuerpo ordenado a través de los elementos positivos. En este enfoque primero se distinguen en el cuerpo  $K$  quiénes son los elementos positivos  $K^+$ . Una vez conocidos éstos se dice que  $y > x$  si  $y - x \in K^+$  (ver [2]). Otras propiedades de los cuerpos ordenados son las siguientes.

**Proposición 1.7.**

- 1. Si  $x > 0$  entonces  $-x < 0$ , mientras  $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ .
- 2. Si  $x > 0$  entonces  $y < z \Rightarrow xy < xz$ .
- 3. En cambio,  $x < 0$  y  $y < z$  implican  $xy > xz$ .
- 4. Si  $x \neq 0$  resulta  $x^2 > 0$ . En particular  $1 > 0$ .

*Demostración.* Para probar 1) si  $x > 0$  resulta  $x + (-x) > -x$  luego  $-x < 0$ . Las demás se prueban igual.  $\square$

*Ejercicio 1.1.* Para  $p \in \mathbb{N}$  primo se designa por  $\mathbb{Z}_p$  el cuerpo  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . ¿Es  $\mathbb{Z}_p$  un cuerpo ordenado con su orden natural?

*Observaciones 1.1.*

a) Si  $K$  es un cuerpo ordenado podemos considerar la inyección:

$$\begin{aligned} I: \mathbb{N} &\longrightarrow K \\ n &\longmapsto I(n) = n \cdot 1 := 1 + \dots + 1. \end{aligned}$$

Identificando  $I(\mathbb{N})$  con  $\mathbb{N}$  se deduce que todo cuerpo ordenado contiene a los racionales  $\mathbb{Q}$ . En efecto  $\mathbb{Q}$  se obtiene como  $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ , mientras  $\mathbb{Z} = \{\pm p : p \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ .

b) En las propiedades listadas hasta ahora de los cuerpos ordenados no se observa ninguna característica especial que permita distinguir  $\mathbb{Q}$  de  $\mathbb{R}$ . Esta es la seña de identidad de la propiedad de continuidad o completitud que presentamos a continuación.

Siguen ahora dos nociones habituales de los conjuntos ordenados. El calificativo ordenado hace referencia a la Definición 1.4 (cf. [22]).

**Definición 1.8** (Cotas). *Sea  $K$  un conjunto ordenado,  $E \subset K$ . Se dice que  $b \in K$  es una cota superior de  $E$  si  $x \leq b$  para cada  $x \in E$ . De manera simétrica se define cota “inferior”.*

Si  $E$  admite cota superior se dice acotado superiormente.

**Definición 1.9** (Supremos). *Sea  $E \subset K$ ,  $K$  ordenado. Se llama supremo de  $E$  a todo elemento  $c \in K$  que cumpla las propiedades:*

1.  $c$  es cota superior de  $E$ .
2. Si  $b < c$  entonces  $b$  no es cota superior de  $E$ .

Pudiera no haber elementos  $c$  con tales propiedades. Si un tal  $c$  existe, es –por 2)– necesariamente único. Esto sugiere la notación  $\sup E$ . La noción de “ínfimo” se introduce de manera simétrica.

**Definición 1.10.** *Un conjunto ordenado  $K$  posee la propiedad del supremo (respectivamente, ínfimo) si todo conjunto  $E \subset K$  acotado superiormente (inferiormente) admite supremo (ínfimo).*

Se cumple la siguiente propiedad (cf. [22]).

**Teorema 1.11.** *Si un conjunto ordenado  $K$  posee la propiedad del supremo entonces también cumple la del ínfimo.*

El proceso genético que lleva de  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{Q}$  consiste en ir dotando de opuestos e inversos a los elementos de  $\mathbb{N}$ . Desde este punto de vista  $\mathbb{Q}$  está libre de defectos sin embargo se tiene la siguiente propiedad.

**Proposición 1.12.** *El conjunto  $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$  no admite supremo en  $\mathbb{Q}$  mientras  $\{y \in \mathbb{Q} : y^2 > 2\}$  tampoco posee ínfimo en  $\mathbb{Q}$ .*

Está implícito en la proposición que no es posible hallar  $\sqrt{2}$  en  $\mathbb{Q}$  (hecho que por otra parte se demuestra de manera directa).

*Ejercicio 1.2. Probar que no existe  $x \in \mathbb{Q}$  tal que  $x^2 = 2$ . A tal fin, supóngase que  $\frac{p}{q} = 2$  donde  $p, q$  no son pares simultáneamente.*

El que un cuerpo ordenado  $K$  posea la propiedad del supremo quiere decir que  $K$  es en cierta forma “continuo”, es decir no presenta “fisuras”. Topológicamente hablando esto significa que es cerrado frente a paso al límite o si quiere, que es “completo”. En este sentido  $\mathbb{Q}$  es defectuoso y la razón de construir  $\mathbb{R}$  es la de ampliar  $\mathbb{Q}$  para incluirlo en una envoltura (topológicamente) cerrada.

**Definición 1.13.** *Se dice que un cuerpo ordenado  $\mathcal{R}$  es un cuerpo de números reales si  $\mathcal{R}$  posee la propiedad del supremo.*

Un problema natural es el de la existencia de un cuerpo de números reales, cuestión que a finales del siglo XIX se conocía como el “problema del continuo” ([1]). G. Cantor y R. Dedekind dieron en 1876, pruebas distintas de la existencia de un tal cuerpo a partir de los números racionales  $\mathbb{Q}$ . El primero a través de las sucesiones de Cauchy, el segundo por medio de las así denominadas “cortaduras” de números racionales. Tales construcciones fueron los primeros frutos –por cierto bastante controvertidos en su tiempo, por no decir revolucionarios– que aportó a la matemática del último cuarto del XIX la recién estrenada teoría de conjuntos. David Hilbert, el prestigioso matemático alemán, no dudó en calificar de “paraíso” el nuevo escenario que dicha teoría propició en la matemática (cf. [1]). No nos ocupamos de tales construcciones de  $\mathbb{R}$  pero los resultados obtenidos son equivalentes porque todos los cuerpos de números reales coinciden (módulo identificaciones). La base de esta afirmación radica en que todo cuerpo ordenado contiene una copia de los números racionales  $\mathbb{Q}$  (Observación 1.1).

**Teorema 1.14.** *Sea  $\mathcal{R}$  un cuerpo de números reales. Entonces,*

- i) [Propiedad Arquimediana]. Dado  $x > 0$  para todo  $y \in \mathcal{R}$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $nx > y$ . En particular, existe un único  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $(m - 1)x \leq y < mx$ .*
- ii) [Densidad de  $\mathbb{Q}$ ]. Dados  $x < y$  existe  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $x < q < y$ .*

*Observación 1.2.* Todo espacio métrico  $(X, d)$  se puede completar a otro  $(Y, d)$  de suerte que  $X \subset Y$  (en un sentido a precisar). El proceso –fiel réplica de la construcción de Cantor de  $\mathbb{R}$ – identifica los elementos de  $Y$  con las sucesiones de Cauchy de  $X$ . La propiedad precedente establece que todo cuerpo de números reales se identifica con las sucesiones de Cauchy de “sus” números racionales. En efecto ii) afirma que todo  $x \in \mathcal{R}$  es el límite de una sucesión de números racionales. Es por ello que todos los cuerpos de números reales son isomorfos. En consecuencia a partir de ahora hablaremos de “un sólo cuerpo” de números reales que designaremos por  $\mathbb{R}$ .

*Demostración del Teorema 1.14.* *i)* Suponiendo  $y > 0$  si fuese

$$nx \leq y$$

para todo  $n$ , existiría un supremo  $c$  de  $\{nx\}_{n \in \mathbb{N}}$  con lo que

$$c - x < mx$$

para algún  $m \in \mathbb{N}$ . De ahí,  $c < (m + 1)x$  que no es posible.

ii) Como  $y - x > 0$  se tiene de i) que

$$y - x > \frac{1}{n},$$

para algún  $n \in \mathbb{N}$  con lo que

$$x < x + \frac{1}{n} < y.$$

Asimismo se sigue la existencia de  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  de suerte que:

$$nx < m_1, \quad -nx < m_2,$$

es decir:

$$-m_2 < nx < m_1.$$

Por finitud existe un único  $m \in \mathbb{Z}$  tal que:

$$m - 1 \leq nx < m,$$

con lo que la segunda afirmación de i) queda probada mientras:

$$\frac{m - 1}{n} \leq x < \frac{m}{n}.$$

De ahí se concluye:

$$x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y.$$

□

*Observación 1.3.* La idea para probar ii) es primeramente estimar por defecto la distancia  $y - x$  con  $\frac{1}{n}$ . Después se mide  $x$  tomando  $\frac{1}{n}$  como unidad.

El problema fundamental de la extracción de raíces  $n$ -ésimas se puede resolver en cualquier cuerpo  $\mathcal{R}$  de números reales.

**Teorema 1.15.** *Para todo  $x \in \mathcal{R}$ ,  $x > 0$ , existe un único  $y > 0$  tal que*

$$y^n = x.$$

*Demostración.* a) *Unicidad.* Es consecuencia de que  $y_1 < y_2 \Rightarrow y_1^n < y_2^n$ .  
b) *Existencia.* Se considera el conjunto:

$$E = \{t \in \mathcal{R} : t^n < x\}.$$

Resulta que  $E \neq \emptyset$  pues:

$$\frac{1}{1+x^{-1}} \in E.$$

De hecho obsérvese que

$$(1+z)^n > 1+nz, \quad z > 0.$$

Análogamente,  $b = 1+x$  es cota superior de  $E$  con lo que existe

$$y = \sup E.$$

Probamos que no puede ser:

$$y^n < x$$

porque existiría  $h > 0$  con

$$(y+h)^n < x.$$

La clave está en medir el incremento en la función  $b^n$ . De hecho:

$$b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a), \quad 0 < a < b.$$

Hay que elegir  $h > 0$  de forma que  $(y+h)^n - y^n < x - y^n$ . Tomando  $0 < h < 1$ :

$$(y+h)^n - y^n < nh(y+h)^n < nh(y+1)^n < x - y^n,$$

para lo que basta con que:

$$h < \min\left\{1, \frac{x - y^n}{n(y+1)^n}\right\}.$$

Tampoco puede ser:

$$y^n > x,$$

porque encontramos  $h > 0$  tal que:

$$(y-h)^n > x.$$

En efecto se tiene:

$$(y-h)^n - x = y^n - x - (y^n - (y-h)^n)$$

y se busca  $0 < y < h$  para que:

$$y^n - (y-h)^n < y^n - x.$$

Usando la estimación anterior se tiene:

$$y^n - (y-h)^n < nhy^{n-1}$$

y basta con tener:

$$0 < h < \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}.$$

En conclusión, resulta  $y^n = x$  y hemos terminado.

□

## 1.2. Los números complejos

Un problema fundamental desde los tiempos de la matemática babilónica y egipcia es el de la resolución de ecuaciones algebraicas (cf. [15]). Hay ecuaciones algebraicas en  $\mathbb{R}$  que carecen de solución como:

$$x^2 + 1 = 0. \quad (1.1)$$

En efecto, la Proposición 1.7 afirma que  $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$  por lo que no hay elementos en  $\mathbb{R}$  que satisfagan dicha ecuación. Este problema se resuelve extendiendo  $\mathbb{R}$  a un cuerpo más amplio  $\mathbb{C}$  que introducimos ahora.

**Definición 1.16.** *El cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos se define como:*

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones “+” y “.”:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Sus elementos, genéricamente designados por  $z$ , se llaman números complejos.

**Proposición 1.17.**  *$(\mathbb{C}, +, \cdot)$  es un cuerpo en el que:*

$$\mathfrak{R} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

es un subcuerpo isomorfo a  $\mathbb{R}$ . Si  $z = (a, b)$  entonces:

$$z^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

**Proposición 1.18.** *El número complejo*

$$i := (0, 1),$$

satisface  $i^2 = -(1, 0)$ .

El conjunto  $\mathbb{C}$  de los números complejos no es sino  $\mathbb{R}^2$ , en donde se ha definido un “producto”. Esta presentación de los números complejos se debe directamente a K. F. Gauss y fue, en su momento, el primer tratamiento riguroso de esta clase de números. Es por tanto un  $\mathbb{R}$  espacio vectorial donde para  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\lambda z := (\lambda, 0) \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

Como los complejos  $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$  constityen una copia de  $\mathbb{R}$  es costumbre escribir  $a$  en lugar de  $(a, 0)$ . Bajo esta observación se tiene.

**Proposición 1.19.** *Todo complejo  $z$  se escribe en la forma:*

$$z = a + bi. \quad (1.2)$$

Se conoce a  $i$  como la unidad imaginaria. Siendo  $-1 = (-1, 0)$  resulta que  $\pm i$  son las soluciones de la ecuación (1.1).

**Definición 1.20.** Para  $z = (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$  se conocen a  $a, b$  como las partes real e imaginaria de  $z$ , y se denotan:

$$a = \Re z, \quad b = \Im z.$$

Análogamente se designa por:

$$\bar{z} = a - bi$$

el complejo conjugado de  $z$ .

Sigue ahora una obviedad.

**Proposición 1.21.** Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  se tiene:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\Re z_1 = \Re z_2 \ \& \ \Im z_1 = \Im z_2).$$

A continuación, un grupo de propiedades básicas.

**Proposición 1.22.** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$  entonces:

1.  $\overline{\bar{z}} = z$ .
2.  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ .
3.  $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$ .
4.  $\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ,  $\Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .
5.  $z\bar{z} \in \mathbb{R}^+$ ,  $z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$ .

*Ejercicio 1.3.* Un polinomio de coeficientes complejos se define como  $p(z) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} z^k$ , donde los  $a_k \in \mathbb{C}$ . Pruébese que  $\zeta$  es raíz de  $p$  si y sólo si  $\bar{\zeta}$  es raíz del polinomio  $\bar{p}(z) = \sum_{k=0}^n \bar{a}_{n-k} z^k$ . Demostrar asimismo lo siguiente:

- i) Si  $p(z)$  tiene coeficientes reales “ $\zeta$  raíz  $\Leftrightarrow \bar{\zeta}$  raíz”.
- ii) Si  $p(z)$  tiene coeficientes reales y grado impar entonces admite al menos una raíz real.

**Definición 1.23.** Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  se define su producto escalar como:

$$\langle z, w \rangle = \Re(z\bar{w}),$$

por lo tanto, el módulo de un complejo  $z$  (su “norma euclídea”) se define

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

**Proposición 1.24.** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$  entonces:

1.  $|z| \geq 0$  y  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ .
2.  $|\bar{z}| = |z|$ .

3.  $|zw| = |z||w|$ .
4.  $|\Re z| \leq |z|$ ,  $|\Im z| \leq |z|$ .
5.  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .
6.  $|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\Re z\bar{w}$ .

La Proposición 1.24 introduce la distancia euclídea en  $\mathbb{C}$  y la principal conclusión es que la topología de  $\mathbb{C}$  es la de  $\mathbb{R}^2$  con la norma euclídea. Desde este punto de vista damos “ipso facto” sentido a todas las posibles cuestiones de convergencia en  $\mathbb{C}$  (sucesiones, series, límites, continuidad, compacidad, conexión, etc). No obstante, detallaremos algunos aspectos más adelante.

**Definición 1.25.** *Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  la distancia euclídea entre ambos se define como:*

$$\text{dist}(z, w) = |z - w|.$$

*Representaremos la bola (usaremos también el término “disco”) abierta como:*

$$D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}.$$

*Abreviaremos  $D = D(0, 1)$  el disco unidad. Asimismo*

$$\partial D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| = r\}.$$

*designará la frontera de  $D(z_0, r)$ .*

*Observación 1.4.* En todo espacio métrico se pueden elegir una infinidad de métricas equivalentes. En su momento consideraremos métricas alternativas a la euclídea.

### 1.3. El argumento

Se prueba en el Apéndice que la aplicación:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \partial D \\ \theta &\longmapsto \cos \theta + i \sen \theta \end{aligned}$$

es sobreyectiva. Es más, su restricción  $h_0$  a  $[0, 2\pi)$  es biyectiva y es por ello que dado  $z \neq 0$  existe un único  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que

$$z = |z| \cos \theta + i|z| \sen \theta, \tag{1.3}$$

que es la representación trigonométrica de  $z$  con  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Por otra parte,  $h$  es  $2\pi$ -periódica y la restricción  $h_\tau$  de  $h$  a cualquier intervalo  $[\tau, 2\pi + \tau)$  también es biyectiva con lo que hay una única representación en la forma (1.3) siempre que  $\theta$  se restrinja a variar en un intervalo de longitud total  $2\pi$  de la forma  $[\tau, 2\pi + \tau)$ . En otras palabras, para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  se tiene que:

- fijado  $\tau \in \mathbb{R}$  existe un único  $\theta \in [\tau, \tau + 2\pi)$  tal que (1.3) se cumple.
- todos los demás  $\theta' \in \mathbb{R}$  para los que (1.3) se cumplen son necesariamente de la forma

$$\theta' = \theta + 2k\pi,$$

para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

Según se indica en el Apéndice y tras la oportuna definición de la función exponencial compleja (cf. Capítulo III) se satisface la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Quienes prefieran esperar hasta el Capítulo III pueden usar  $h(\theta)$  en lugar de  $e^{i\theta}$ . Las propiedades fundamentales que emplearemos:

$$h(t+s) = h(t)h(s), \quad h(0) = 1, \quad h(\pi/2) = i,$$

se demuestran en el apéndice y son coherentes con la notación exponencial.

Por tanto

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{1.4}$$

es lo que se conoce como la representación exponencial de  $z$ .

A los efectos del presente curso nos interesa conocer la dependencia en  $z$  de los diversos valores de  $\theta$  señalados en las relaciones (1.3) y (1.4). Se les conoce como los argumentos de  $z$ . Pondremos cuidado en diferenciar los argumentos como meros valores de  $\theta$  que cumplen (1.3) o (1.4) para un  $z$  fijado, del concepto de “función argumento”, adelantando que es posible elegir infinitas de tales funciones.

**Definición 1.26.** *Un argumento de  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  es todo valor de  $\theta$  que da validez a cualquiera de las expresiones (1.3) o (1.4). Representaremos por  $\arg z$  al único de tales  $\theta \in [0, 2\pi)$ , mientras que llamaremos argumento principal  $\operatorname{Arg} z$  al único  $\theta \in (-\pi, \pi]$ .*

Para un complejo dado  $z$  (siempre que se hable de argumentos se entenderá  $z \neq 0$ ) todos sus argumentos se pueden representar en la forma:

$$\{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Proposición 1.27.** *Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $z_1 = z_2$  si y sólo si:*

$$|z_1| = |z_2| \quad \& \quad \arg z_1 = \arg z_2.$$

**Proposición 1.28.** *Sean  $z, z_1, z_2$  complejos con argumentos  $\theta, \theta_1, \theta_2$  y módulos  $\rho, \rho_1, \rho_2$  entonces:*

1.  $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}, \quad \frac{1}{z} = \rho^{-1} e^{-i\theta}$
2.  $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$

3. Para  $n \in \mathbb{N}$  se tiene (fórmula de d'Moivre):

$$z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Obsérvese que no es cierto que  $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$  o  $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$ . Las relaciones correctas son:

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

A los efectos de las definiciones que siguen, para  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $h_\tau$  designa la restricción de  $h$  al intervalo  $[\tau, \tau + 2\pi)$ ,  $\gamma_\tau = \{th(\tau) : t \geq 0\}$  –la semirecta cerrada desde 0 a  $\infty$  con dirección  $h(\tau)$ –  $\Omega_\tau = \mathbb{C} \setminus \gamma_\tau$  –el plano  $\mathbb{C}$  “cortado a lo largo de  $\gamma_\tau$ ”.

**Proposición 1.29.** Para  $\tau \in \mathbb{R}$  se define la función:

$$\begin{aligned} \arg_\tau : \quad \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow [\tau, \tau + 2\pi) \\ z &\longmapsto h_\tau^{-1} \left( \frac{z}{|z|} \right). \end{aligned}$$

Se satisfacen entonces las siguientes propiedades.

1) Para cada  $z$ ,  $\arg_\tau z$  es un argumento de  $z$ :

$$z = |z| e^{i \arg_\tau z}. \quad (1.5)$$

2)  $\arg_\tau$  es continua en  $\Omega_\tau$  mientras es discontinua en cada uno de los puntos de  $\gamma_\tau$ . Más aún,  $\arg_\tau$  es  $C^\infty$  en  $\Omega_\tau$  con:

$$(\arg_\tau)_x = -\frac{x}{|z|^2}, \quad (\arg_\tau)_y = \frac{y}{|z|^2}.$$

3)  $\arg_{\tau+2k\pi} = \arg_\tau + 2k\pi$ .

4) Para  $\tau \in [0, 2\pi)$  se tiene:

$$\arg_\tau z = \begin{cases} \arg z & \tau \leq \arg z < 2\pi \\ \arg z + 2\pi & 0 \leq \arg z < \tau. \end{cases}$$

*Observación 1.5.* Las propiedades 3), 4) permiten expresar  $\arg_\tau$  en términos de  $\arg$ . En efecto todo  $\tau$  se escribe  $\tau = \langle \tau \rangle + 2k\pi$  para un único  $\langle \tau \rangle \in [0, 2\pi)$ . Por tanto:

$$\arg_\tau z = \begin{cases} \arg z + 2k\pi & \langle \tau \rangle \leq \arg z < 2\pi \\ \arg z + 2(k+1)\pi & 0 \leq \arg z < \langle \tau \rangle. \end{cases}$$

*Demostración de la Proposición 1.29.* Que  $\arg_\tau$  es continua en  $\Omega_\tau$  y se cumple la identidad (1.5) es consecuencia de la definición de dicha función. La discontinuidad en  $\gamma_\tau$  se razona así: existen  $\zeta_n \rightarrow h(\tau)$ ,  $\zeta'_n \rightarrow h(\tau)$ ,  $|\zeta_n| = |\zeta'_n| = 1$ ,

$\lim \arg_\tau(\zeta_n) = \tau$ ,  $\lim \arg_\tau(\zeta'_n) = \tau + 2\pi$ . Si  $z \in \gamma_\tau$ ,  $z = th(\tau) = \lim t\zeta_n = \lim t\zeta'_n$  de donde se concluye la discontinuidad.

La regularidad es más delicada y requiere un razonamiento “ad hoc”. Hacemos una construcción explícita de la función  $\arg z$ . Definimos  $\text{Arctag } z$  la “rama” de la función arcotangente que toma valores en el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Entonces:

$$\arg z = \begin{cases} \text{Arctag } \frac{\Im z}{\Re z} & \Re z \geq 0, \Im z > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \Re z = 0, \Im z > 0 \\ \text{Arctag } \frac{\Im z}{\Re z} + \pi & \Re z < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \Re z = 0, \Im z < 0 \\ \text{Arctag } \frac{\Im z}{\Re z} + 2\pi & \Re z > 0, \Im z < 0. \end{cases}$$

Un análisis cuidadoso revela que  $\arg z$  tiene esa expresión y que  $\arg z$  es  $C^\infty$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

La propiedad 3) sigue del hecho de que  $\arg_\tau z + 2k\pi$  es un argumento de  $z$  en el intervalo  $[\tau + 2k\pi, \tau + 2(k+1)\pi)$ . Análogamente, el lado derecho de 4) es un argumento en el intervalo  $[\tau, \tau + 2\pi)$ .  $\square$

*Ejercicio 1.4.* Para  $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < 2\pi$  compárense las funciones  $\arg_{\tau_j}$ ,  $j = 1, 2$ . Solución.  $\arg_{\tau_2} - \arg_{\tau_1} = 0$  para  $\tau_2 \leq \arg_{\tau_2} z < \tau_1 + 2\pi$ ,  $\arg_{\tau_2} - \arg_{\tau_1} = 2\pi$  si  $\tau_1 \leq \arg z < \tau_2$ .

*Ejercicio 1.5.* Sean  $\tau_1, \tau_2$  arbitrarios. Haciendo uso de los valores  $\langle \tau_j \rangle$  compárense las funciones  $\arg_{\tau_j}$ ,  $j = 1, 2$ .

Hemos empleado el término argumento de  $z$  para designar un valor  $\theta$  tal que  $e^{i\theta} = z/|z|$ . Luego hemos definido funciones  $\theta = \theta(z)$  que, continuas en “dominios especiales”, asignan a cada  $z$  en dichos dominios un valor  $\theta$  que es un argumento de  $z$ . Esta última acepción puede extenderse a una noción ligeramente más amplia de función argumento.

**Definición 1.30.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$  un abierto conexo y  $g \in C(\Omega, \mathbb{R})$ . Se dice que  $(g, \Omega)$  es una determinación (o una “rama”) de la función argumento (en  $\Omega$ ) si

$$e^{ig(z)} = z/|z|$$

para cada  $z \in \Omega$ .

Consecuencia inmediata de la continuidad y la conexidad en la definición es la siguiente propiedad.

**Proposición 1.31.** Sean  $(g_1, \Omega_1), (g_2, \Omega_2)$  determinaciones del argumento. Entonces:

$$g_2 = g_1 + 2k\pi$$

para cierto entero  $k$ , en cada componente conexa de la intersección  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ . En particular,  $g_1, g_2$  difieren en un múltiplo entero de  $2\pi$  si  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

## 1.4. Raíces $n$ -ésimas

Para  $z \in \mathbb{C}$  la ecuación

$$w^n = z,$$

admite exactamente  $n$  soluciones distintas:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Tales expresiones definen las  $n$  raíces  $n$ -ésimas de  $z$ . Usando la identificación de  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ ,  $w_0, \dots, w_{n-1}$  conforman un polígono regular de  $n$  lados inscrito en la circunferencia de radio  $\sqrt[n]{|z|}$ . De hecho, y de acuerdo a la definición que damos un poco más abajo:

$$\angle(w_k, w_{k+1}) = \frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

donde ponemos  $w_n = w_0$ .

**Proposición 1.32.** *Sea  $f_k(z)$ ,  $f_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la función que asigna a cada  $z$  su  $k$ -ésima raíz. Entonces  $f_k$  es continua en  $\mathbb{C} \setminus \{x > 0\}$  siendo su conjunto imagen el sector  $\{\frac{2k\pi}{n} \leq \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}\}$ .*

*Observación 1.6.* Las raíces  $n$ -ésimas pueden indistintamente expresarse mediante cualquier determinación del argumento. Por ejemplo:

$$\zeta_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

En particular, se conoce como “rama principal” de la raíz  $n$ -ésima o función “parte principal” de la raíz  $n$ -ésima a la aplicación

$$f(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\text{Arg } z}{n}}.$$

## 1.5. Funciones complejas

**Definición 1.33.** *Una función compleja  $f$  de variable compleja es toda aplicación  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .  $A$  es su dominio,  $f(A)$  su conjunto imagen.*

Con frecuencia representaremos tales funciones en forma abreviada como  $w = f(z)$ . Poniendo

$$f(z) = u + iv$$

es decir  $u = \Re f$ ,  $v = \Im f$ , toda función compleja  $f$  equivale a una aplicación de  $\mathbb{R}^2$  es sí mismo de la forma:

$$F : \begin{array}{ccc} A \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)). \end{array}$$

No obstante y como norma general evitaremos en lo posible apelar a la forma real  $F$  de las funciones que usaremos en el curso. Esta política es por otra parte ventajosa para muchos de los cálculos que afrontaremos, en especial, aquellos en donde, por poner un ejemplo, el producto de complejos juega un papel relevante.

*Ejemplos 1.7.*

1) La función lineal afín:

$$f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

2) Polinomios:

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} z^k = a_0 z^n + \cdots + a_n, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

3) Funciones (transformaciones) bilineales:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

4) Funciones racionales:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\sum_{k=0}^n a_{n-k} z^k}{\sum_{l=0}^m b_{m-l} z^l} = \frac{a_0 z^n + \cdots + a_n}{b_0 z^m + \cdots + b_m}.$$

5) Ramas de la raíz  $n$ -ésima. Usando el argumento principal:

$$f_k(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\text{Arg } z + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

En el caso de la raíz cuadrada éstas son  $f_0(z)$  y  $f_1(z) = -f_0(z)$  donde

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \sqrt{|z|} e^{i \text{Arg } z/2} \\ &= \sqrt{|z|} (\cos \text{Arg } z/2 + i \text{sen } \text{Arg } z/2) \\ &= \sqrt{|z|} \left( \sqrt{\frac{|z| + x}{2|z|}} + i \text{signo } y \sqrt{\frac{|z| - x}{2|z|}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{|z| + x} + i \text{signo } y \sqrt{|z| - x} \right). \end{aligned}$$

Las funciones complejas elementales al definir funciones del plano en sí mismo pueden interpretarse como transformaciones geométricas. Introducimos primero una definición.

**Definición 1.34.** *Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  el ángulo orientado de  $z_1$  a  $z_2$  se define como:*

$$\angle(z_1, z_2) = \arg \frac{z_2}{z_1} \in [0, 2\pi).$$

Nuestra definición de ángulo orientado difiere de la euclídea convencional. Por definición

$$\angle(z_1, z_2) = \arg \frac{z_2}{z_1} = \langle t \rangle,$$

con  $\frac{z_2}{z_1} = h(t) = h(\langle t \rangle)$ , donde para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\langle t \rangle$  designa al único número real que satisface las relaciones  $t = \langle t \rangle + 2k\pi$  y  $\langle t \rangle \in [0, 2\pi)$ . Como se tiene que

$$\langle -t \rangle = 2\pi - \langle t \rangle,$$

mientras  $\frac{z_1}{z_2} = h(-t) = h(\langle -t \rangle)$  resulta que:

$$\angle(z_2, z_1) = 2\pi - \angle(z_1, z_2).$$

Como era de esperar  $\angle(z_2, z_1)$  es el “opuesto” de  $\angle(z_1, z_2)$ .

*Observaciones 1.8.*

1) Se comprueba que:

$$\angle(z_1, z_2) = \arg z_2 - \arg z_1 \pmod{2\pi},$$

pudiéndose reemplazar en dicha expresión  $\arg z$  por  $\arg_\tau z$ .

2)  $\angle(1, z) = \arg z$ ,  $\angle(z, 1) = 2\pi - \arg z$ .

**Definición 1.35.** Se dice que la aplicación  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un giro de centro  $z_0$  y ángulo  $\theta \in [0, 2\pi)$  si 1)  $f(z_0) = z_0$ , 2)  $|f(z) - z_0| = |z - z_0|$  y

$$\angle(z - z_0, f(z) - z_0) = \theta,$$

para cada  $z \neq z_0$ .

*Ejercicio 1.6.* Hallar la expresión de  $f(z)$  en la definición precedente.

Sean  $\gamma_1, \gamma_2$  dos curvas de clase  $C^1$  parametrizadas por sendas parametrizaciones  $\varphi_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \varphi_j(t) = x_j(t) + iy_j(t)$ ,  $j = 1, 2$ , con vectores tangentes en  $t \in [a, b]$  dados por  $\varphi'_j(t) = x'_j(t) + iy'_j(t)$ . La propia definición de curva  $C^1$  requiere que  $\varphi'_j(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$  (ver también el Capítulo V).

Si dos curvas  $C^1$  inciden en un punto  $z_0$  se define el ángulo orientado de  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$  en  $z_0$  como:

$$\angle(\varphi'_1(t_{0,1}), \varphi'_2(t_{0,2})),$$

donde  $z_0 = \varphi_j(t_{0,j})$ ,  $j = 1, 2$ . La no depende de las parametrizaciones.

*Ejercicio 1.7.* Sean  $\psi_j : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2$ , parametrizaciones alternativas de las curvas  $\gamma_1, \gamma_2$  es decir  $\psi_j(s) = \varphi_j(h_j(s))$  con  $h_j : [c, d] \rightarrow [a, b]$  de clase  $C^1$ ,  $h'_j(s) \neq 0$  para todo  $s \in [c, d]$ ,  $j = 1, 2$ . Suponiendo que  $\gamma_1, \gamma_2$  inciden en  $z_0$  y que  $t_{0,j} = h_j(s_{0,j})$ ,  $j = 1, 2$ , pruébese que la definición precedente de ángulo no depende de si se usan las parametrizaciones  $\varphi_j$  o  $\psi_j$ .

La que sigue es una noción importante para la interpretación geométrica de las funciones complejas que son derivables (según veremos más tarde).

**Definición 1.36.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un abierto y  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  una función de clase  $C^1$ . Se dice que  $F$  es conforme si es inyectiva, el jacobiano  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$  no se anula en ningún punto y  $F$  preserva el ángulo orientado de las curvas incidentes, es decir:

$$\angle(F(\gamma_1), F(\gamma_2)) = \angle(\gamma_1, \gamma_2).$$

*Ejemplos 1.9.* 1. Traslaciones. La función  $f(z) = z + a$ ,  $a \in \mathbb{C}$  representa una traslación de vector  $a \in \mathbb{C}$ .

2. Homotecias. Para  $a > 0$  la función  $f(z) = az$  representa una homotecia de razón  $a$  (centro  $z = 0$ ).

3. Giros. La función  $f(z) = e^{i\theta}z$  constituye un giro de centro  $z = 0$  y ángulo  $\theta$  según comprobamos ahora. En efecto:

$$|w| = |z|,$$

para  $w = e^{i\theta}z$  luego  $w$  dista lo mismo que  $z$  del origen. Por otro lado:

$$\angle(z, w) = \angle(z, e^{i\theta}z) = \langle \theta \rangle$$

que informa que el ángulo de  $z$  a  $w$  es  $\langle \theta \rangle$ , lo que significa que hemos dado un giro de  $\theta$  grados alrededor del origen. Debe observarse la diferencia entre  $\theta > 0$  y  $\theta < 0$ . Nótese que si  $\theta > 0$ :

$$\angle(z, e^{-i\theta}z) = 2\pi - \langle \theta \rangle$$

y el resultado es como si hubiésemos girado  $-\theta$  alrededor del origen (ver el Ejercicio 1.8).

4. Movimientos rígidos. La función  $f(z) = az + b$ , con  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $|a| = 1$ , comprende a los movimientos rígidos del plano (traslaciones y giros).

5. Si  $a = |a|e^{i\theta}$  la función  $f(z) = az$  representa un giro seguido de una homotecia de razón  $|a|$ . Por tanto la función  $f(z) = az + b$ ,  $a, b$ , comprende a todas las semejanzas (giros, traslaciones y homotecias).

6. Simetría axial. La función conjugado  $f(z) = \bar{z}$  representa una simetría axial con respecto al eje real. Obsérvese que esta transformación invierte la orientación en el sentido siguiente:

$$\angle(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = 2\pi - \angle(z_1, z_2) = \angle(z_2, z_1).$$

7. Inversión. Una inversión de polo  $z = 0$  y potencia  $k > 0$  es la transformación  $z \rightarrow w$  en la que  $w$  está en la misma semirrecta que  $0$  y  $z$ , cumpliendo  $|z||w| = k$ . Por tanto:

$$w = \frac{k}{\bar{z}}.$$

Las inversiones transforman: rectas que pasan por el polo en sí mismas, rectas que no pasan por el polo en circunferencias que pasan por el polo, circunferencias que pasan por el polo en rectas que no pasan por el polo y circunferencias que no pasan por el polo en circunferencias que tampoco pasan por el polo (Ejercicio 1.13). Por otro lado son involutivas en el sentido de aplicadas dos veces dan lugar a la identidad. Obsérvese finalmente que la función

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

equivale a aplicar una inversión de razón 1 seguida de una simetría axial.

8. Transformaciones bilineales  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ . Comprenden a todas las anteriores. Se estudian en la siguiente sección.

**Proposición 1.37.** *Las funciones  $f(z) = az + b$  y  $f(z) = \frac{1}{z}$  definen transformaciones conformes en sus dominios de definición.*

*Ejercicio 1.8. Hállense las ecuaciones reales de la transformación  $w = e^{i\theta}z$  probando que definen una transformación ortogonal que preserva la orientación del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^2$ . Constituye un giro de  $\theta$  grados según la terminología euclídea.*

*Ejercicio 1.9. Hállense las funciones que representan las siguientes transformaciones geométricas:*

- Homotecia de centro  $z_0$  y razón  $a > 0$ .*
- Giro de centro  $z_0$  y ángulo  $\theta$ .*
- Simetría axial con respecto a la recta que pasa por un punto  $z_0$  y tiene la dirección del complejo  $e^{i\theta_0}$ .*
- Inversión de polo  $z_0$  y potencia  $k > 0$ .*

*Ejercicio 1.10. Probar que*

$$\Im\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad b \neq 0,$$

*define la ecuación general de una recta. Deducir que*

$$\Re\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad b \neq 0,$$

*también constituye la ecuación de la recta (ver el Ejercicio 22).*

*Ejercicio 1.11. Deducir la ecuación de una circunferencia en versión compleja. Estúdiense las condiciones bajo las que:*

$$|z|^2 + 2\Re z\zeta + d = 0 \quad (d, \zeta \in \mathbb{C})$$

*o bien*

$$|z|^2 + 2\Im z\zeta + d = 0 \quad (d, \zeta \in \mathbb{C})$$

*constituyen la ecuación de una circunferencia (véase el Ejercicio 24).*

*Ejercicio 1.12. Pruébese que toda semejanza  $f(z) = cz + d$ ,  $c, d \in \mathbb{C}$  transforma rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.*

*Ejercicio 1.13. Pruébense las propiedades de las inversiones listadas en el apartado 7.*

## 1.6. Transformaciones bilineales. 1ª nota

También conocidas como transformaciones de Möbius. Están definidas por las funciones:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

donde, para obviar casos triviales, se supone que  $\delta := ab - cd \neq 0$ . Si  $c = 0$  tenemos una semejanza luego si  $c \neq 0$ :

$$f(z) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z),$$

donde  $f_1(z) = cz + d$ ,  $f_2(z) = 1/z$ ,  $f_3(z) = a_1z + b_1$ ,  $a_1 = -c^{-2}\delta$ ,  $b_1 = ac^{-1}$ . Como compendio de todas las transformaciones anteriores  $f$  aplica rectas o circunferencias en rectas o circunferencias. Veremos en el Capítulo IV que, como consecuencia de la derivabilidad, las transformaciones bilineales definen transformaciones conformes preservando el ángulo orientado entre curvas incidentes. El Ejercicio 32 propone una prueba directa de este hecho (ver también la Sección 2.1 del Capítulo II).

Bajo la condición  $\delta \neq 0$ —que siempre supondremos— el conjunto  $\mathcal{M}$  de las transformaciones bilieales conformes conforma un grupo. Por ejemplo,

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - c}{-bz + a}.$$

Si denotamos por  $GL_2$  el grupo de las matrices complejas e invertibles  $2 \times 2$  la transformación  $\varphi : GL_2 \rightarrow \mathcal{M}$  definida por  $\varphi(A) = f$ , con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es un homomorfismo de grupos (sobreyectivo). Además (Ejercicio 28)  $\varphi(A) = \varphi(B)$  si y sólo si  $A = \lambda B$  para algún  $\lambda \in \mathbb{C}$ . La restricción de  $\varphi$  a las matrices  $A$  con  $\det A = 1$  es todavía sobreyectiva (Ejercicio 29).

### 1.7. Apénice: una revisión de trigonometría

Se sabe que el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \\ u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u'_0, \end{cases} \quad \left( ' = \frac{d}{dt} \right) \quad (1.6)$$

admite, para  $t_0, u_0, u'_0 \in \mathbb{R}$  arbitrarios una única solución  $u = u(t)$  que es de clase  $C^2$  y está definida en  $\mathbb{R}$ . Más aún, si  $u = f(t)$  es la solución correspondiente a  $(t_0, u_0, u'_0) = (0, 1, 0)$ , y  $u = g(t)$  es la solución asociada a  $(t_0, u_0, u'_0) = (0, 0, 1)$  entonces tal solución se puede representar en la forma:

$$u(t) = u_0 f(t - t_0) + u'_0 g(t - t_0).$$

Estas afirmaciones son consecuencia inmediata de la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias. No obstante, con un poco de paciencia se puede dar una demostración directa de las mismas.

La idea clave es que toda solución cumple:

$$u'^2 + u^2 = \text{constante}.$$

En efecto, basta multiplicar por  $u'$  la ecuación e integrar. De ahí se sigue la unicidad de soluciones de (1.6). La unicidad dice a su vez que la existencia se reduce a resolver los dos problemas particulares (1.6) que dan lugar a  $f(t)$  y  $g(t)$ , a saber:

$$\begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \end{cases}$$

respectivamente.

Para determinar  $g$  se observa que:

$$g'^2 + g^2 = 1, \quad (1.7)$$

mientras  $g(t)$  se define como la inversa de la función<sup>1</sup>:

$$G(u) = \int_0^u \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \quad -1 < u < 1,$$

en el intervalo  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$  donde, por definición,

$$\pi := 2 \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (1.8)$$

---

<sup>1</sup>Una interesante idea debida al matemático noruego Neils H. Abel. Éste la uso para presentar las funciones elípticas como una generalización de las funciones circulares.

A continuación,  $g$  se extiende al intervalo  $\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$  mediante reflexión:

$$g(t) := g(\pi - t) \quad \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2.$$

Finalmente,  $g$  se extiende a todo  $\mathbb{R}$  como una función  $2\pi$ -periódica. El resultado es una función  $C^2$  que resuelve (1.6) para los datos  $t_0 = 0$ ,  $u_0 = 0$ ,  $u'_0 = 1$ . Usando la ecuación se ve que  $g$  es de clase  $C^\infty$  y que todas sus derivadas satisfacen la misma ecuación diferencial. Esto completa la demostración anunciada.

**Proposición 1.38.** *Se satisfacen las siguientes propiedades.*

1.  $g$  creciente en  $[-\pi/2, \pi/2]$  y decreciente en  $[\pi/2, 3\pi/2]$ .
2.  $f' = -g$ ,  $g' = f$ , por tanto  $f$  también es  $C^\infty$  y  $2\pi$ -periódica. En particular:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

3.  $f^2 + g^2 = 1$
4.  $f(-t) = f(t)$ ,  $g(-t) = -g(t)$ .
5.  $f(t \pm s) = f(t)f(s) \mp g(t)g(s)$ .
6.  $g(t \pm s) = g(t)f(s) \pm f(t)g(s)$ .

*Observación 1.10.* Se siguen de la proposición todas las relaciones trigonométricas clásicas. Por ejemplo:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = g(t), \quad g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = f(t).$$

También

$$f(t + \pi) = -f(t), \quad g(t + \pi) = -g(t).$$

Por otra parte:

$$f(2t) = f(t)^2 - g(t)^2, \quad g(2t) = 2f(t)g(t).$$

Y así sucesivamente.

*Demostración de la Proposición 1.38.* 1) se sigue de la definición. Obsérvese que  $|g(t)| \leq 1$  y que  $g' = \sqrt{1 - g^2}$  en  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Para 2) usamos  $u = g'$  como candidato a solución de (1.6) con  $(t_0, u_0, u'_0) = (0, 1, 0)$ . La unicidad de soluciones de (1.6) da  $u = f$ . Que  $g(\pi/2) = 1$  se deduce de (1.8).

La relación 3) (y en particular  $f(\pi/2) = 0$ ) se sigue de (1.7).

Para la primera de 5) basta observar que  $u_1(t) = f(t+s)$  y  $u_2(t) = f(t)f(s) - g(t)g(s)$  son soluciones del mismo problema (1.8).  $\square$

Refrescando el teorema de Taylor se prueba el siguiente resultado.

**Teorema 1.39.** Las funciones  $f$  y  $g$  son de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ . Más aún:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} t^{2n}, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}, \quad (1.9)$$

para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

En virtud de todo lo expuesto se tiene la siguiente definición.

**Definición 1.40.** La función  $f(t)$  se designará con la terminología clásica  $f(t) = \cos t$ , mientras denotaremos  $g(t) = \sin t$ .

Las funciones coseno y seno se denominan funciones circulares, terminología que se explica porque tales funciones parametrizan el círculo  $\partial D$ .

**Proposición 1.41.** Se define la aplicación:

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\longrightarrow \partial D \\ t &\longmapsto h(t) := \cos t + i \sin t. \end{aligned}$$

Entonces:

i)  $h$  satisface:

$$h(t+s) = h(t)h(s)$$

para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ . Además

$$h(t) = h(s)$$

si y sólo si  $t = s + 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

ii)  $h$  es sobreyectiva.

iii) La restricción de  $h$  a  $[0, 2\pi)$  es biyectiva.

iv)  $h: (0, 2\pi) \rightarrow \partial D \setminus \{1\}$  es un homeomorfismo.

v) La restricción de  $h$  a cualquier intervalo de la forma  $[\tau, \tau + 2\pi)$  es biyectiva.

vi) Para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $h: (\tau, \tau + 2\pi) \rightarrow \partial D \setminus \{h(\tau)\}$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* i) sigue de la Proposición 1.38. Por otra parte si  $h(t) = h(s)$  es porque  $h(t-s) = 1$  de donde  $t-s = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

En cuanto a ii), sean  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$  la intersección de  $\partial D$  con los cuatro cuadrantes cerrados. Las aplicaciones  $g_j: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_j$ ,  $j = 2, 3, 4$ ,  $g_2(z) = iz$ ,  $g_3(z) = -z$ ,  $g_4(z) = -iz$  definen homeomorfismos. Asimismo, afirmamos que  $h: J_1 \rightarrow \Gamma_1$ ,  $J_1 = [0, \pi/2]$ , es un homeomorfismo. Esto implica que las restricciones de  $h$  a los intervalos  $J_1 = [\pi/2, \pi]$ ,  $J_2 = [\pi, 3\pi/2]$ ,  $J_3 = [3\pi/2, 2\pi]$  definen homeomorfismos sobre  $\Gamma_2, \Gamma_3$  y  $\Gamma_4$ , respectivamente. En efecto,

$$\begin{aligned} h(t) &= ih(t - \pi/2) & t \in J_2 \\ h(t) &= -h(t - \pi) & t \in J_3 \\ h(t) &= -ih(t - 3\pi/2) & t \in J_4, \end{aligned}$$

Lo que prueba la segunda afirmación. En particular, las restricciones de  $h$  a los intervalos  $J'_j = J_j \setminus \{b_j\}$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ,  $b_j$  el extremo superior de  $J_j$ , es biyectiva. Como  $\partial D = \cup_j h(J'_j)$  esto muestra que  $h$  es biyectiva de  $[0, 2\pi)$  en  $\partial D$ . Esto es la prueba de iii).

Vamos con la primera de las afirmaciones precedentes. Tenemos que las funciones  $f : J_1 = [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1]$  y  $F : [0, 1] \rightarrow \Gamma_1$  definida  $x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$  son homeomorfismos. Como  $h = F \circ f$  resulta que  $h : J_1 \rightarrow \Gamma_1$  también es un homeomorfismo. Finalmente (iv) como la restricción de  $h$  a los intervalos  $J_j$  es un homeomorfismo sobre su imagen, se desprende fácilmente que la restricción de  $h$  a  $(0, 2\pi)$  lo es. En efecto  $z_n \rightarrow z$  en  $\partial D \setminus \{1\}$  significa que  $z_n \rightarrow z$  en alguno de los  $\Gamma_j$  salvo que  $z \in G_j \cap G_l$  en cuyo caso el razonamiento para probar que  $h^{-1}(z_n) \rightarrow h^{-1}(z)$  es similar.

Para v) y vi) ponemos  $J = [0, 2\pi]$ ,  $T : J + \{\tau\} \rightarrow J$  la función  $s \rightarrow s - \tau$ ,  $P : \partial D \rightarrow \partial D$  la aplicación  $z \rightarrow h(\tau)z$ . La restricción  $h_\tau$  de  $h$  a  $J + \{\tau\}$  se escribe  $h_\tau = P \circ h \circ T$ . Siendo  $P, T$  homeomorfismos se concluyen v) y vi) de forma inmediata.  $\square$

Más adelante, en el Capítulo III introduciremos la función exponencial como:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

y, entre otras cosas, no resulta difícil probar que la serie es convergente para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Usando la función exponencial se prueba –vía las series (1.9)– la siguiente propiedad.

**Proposición 1.42** (Fórmula de Euler). *Se tiene:*

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t,$$

para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Basta sustituir  $z = it$  en la expresión en serie para  $e^z$ .  $\square$

### 1.8. Ejercicios

1. Sea  $S^1 = \{z : |z| = 1\}$ . Probar que  $S^1$  es un grupo respecto del producto.
2. Probar que no es posible dotar a  $\mathbb{C}$  de una relación de orden " $\leq$ " que haga de  $(\mathbb{C}, \leq)$  un cuerpo ordenado.
3. Hallar las partes reales e imaginarias de:

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{z-a}{z+a} \quad (a \in \mathbb{R}), \quad z^3, \quad \frac{3+5i}{7i+1}, \quad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3,$$

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6, \quad i^n, \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n \quad 2 \leq n \leq 8.$$

4. Hallar  $|z|$ ,  $\bar{z}$  en cada uno de los casos siguientes:

$$-2+i, \quad -3, \quad (2+i)(4+i), \quad \frac{3-i}{\sqrt{2}+3i}, \quad \frac{i}{i+3}, \quad (1+i)^6, \quad i^{17}.$$

5. Probar que  $z$  es real si y sólo si  $z = \bar{z}$ .
6. Hallar  $x, y$  en las relaciones:

$$a) z = |z|, \quad b) z = (\bar{z})^2, \quad c) z = \sum_{k=0}^{100} i^k.$$

7. Probar (identidad del paralelogramo):

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

8. Sea  $R(z)$  una función racional de  $z$  de coeficientes reales. Probar que  $\overline{R(z)} = R(\bar{z})$ . Si  $p(z)$  es un polinomio de coeficientes reales demostrar que  $z$  es raíz de  $p$  si y sólo si  $\bar{z}$  es una raíz.
9. (Raíces cuadradas). Resolver en  $x, y$  la ecuación:

$$(x+iy)^2 = a+bi, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

probando que siempre admite dos soluciones. Para  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  discutir la existencia de raíces de la ecuación de segundo grado:

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0.$$

Como aplicación hallar:

$$\sqrt{-8+6i},$$

y las soluciones de la ecuación:

$$z^2 + \sqrt{32}iz - 6i = 0.$$

10. Probar la validez de la fórmula del binomio de Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Hallar  $\Re z$ ,  $\Im z$  para  $z = (a + bi)^6$ .

11. Pruébense las siguientes fórmulas del ángulo múltiple:

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta + \dots, \\ \sin n\theta &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots. \end{aligned}$$

12. Pruébese que  $\max\{\Re z, \Im z\} \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|$ . ¿Cuándo se da la igualdad?

13. Para  $z = x + iy$  explicar la relación entre  $\text{Arg } z$  y  $\text{arctag } (y/x)$ .

14. Pruébese que  $2\text{Arg } (z + 1) = \text{Arg } z$  en  $|z| = 1$ ,  $z \neq -1$ .

15. Hállense las ramas principales de  $\sqrt{z}$  y de  $\sqrt{1-z}$ .

16. Halar un dominio  $G$  y funciones continuas  $f, g$  tales que  $f(z)^2 = g(z)^2 = 1 - z^2$ . Estudiar si el dominio  $G$  obtenido es maximal.

17. Resolver:

$$z^6 = 1, \quad z^4 = -1, \quad z^4 = -1 + \sqrt{3}i.$$

18. Probar que las raíces  $n$ -ésimas  $z$  de la unidad,  $z \neq 1$ , cumplen:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0.$$

19. Probar que en un polígono regular de  $n$  lados inscrito en la circunferencia  $|z| = 1$ , el producto de las  $n - 1$  diagonales que parten de un vértice dado (contando los lados adyacentes) es  $n$ .

*Indicación.* Usar el problema anterior suponiendo que el vértice es la unidad.

20. Describanse los siguientes lugares geométricos:

$$\begin{aligned} a) \quad & |z - i| \leq 1 & e) \quad & \frac{1}{z} = \bar{z} \\ b) \quad & \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1 & f) \quad & |z|^2 = \Im z \\ c) \quad & |z-2| > |z-3| & g) \quad & |z^2 - 1| < 1. \\ d) \quad & |z| < 1, \quad \Im z > 0, \end{aligned}$$

21. Pruébese que  $|z - a| = |z - b|$  (respectivamente,  $|z - a| > |z - b|$ ) es, para  $a, b \in \mathbb{C}$ , la ecuación general de una recta (respectivamente, de un semiplano).
22. Para  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $b \neq 0$ , ¿qué objeto geométrico es

$$\Re\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0?$$

23. ¿Cuándo representa una recta del plano la ecuación:

$$az + b\bar{z} + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}?$$

24. Supongamos  $a, c$  reales,  $a \neq 0$  y  $b \in \mathbb{C}$ . Pruébese que

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0,$$

es la ecuación de una circunferencia del plano.

25. (Cuaterniones de Hamilton). Definimos:

$$Q = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

representando los vectores de la base canónica  $\{e_i\}$  como  $\{1, i, j, k\}$  de forma que:

$$z = (a, b, c, d) = a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k,$$

con “ $\cdot$ ” el producto de un escalar por un vector, símbolo que omitiremos en lo que sigue para escribir  $a + bi + cj + dk$ . Se consideran la suma habitual + de vectores y el producto que se define a través de las relaciones:

$$1x = x, \quad x \in \{1, i, j, k\}, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k, \quad ki = j, \quad jk = i, \quad ji = -k, \quad ik = -j, \quad kj = -i.$$

El producto a  $z_1, z_2$  se determina entonces usando formalmente las propiedades asociativa y distributiva.

- a) Hállese la expresión del producto  $(a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k)$
- b) Pruébese que  $(Q, +, \cdot)$  es un cuerpo no conmutativo. Se conoce a  $Q$  como los “cuaterniones”. Para  $z = a + bi + cj + dk$ ,  $a$  se define como la parte escalar del cuaternión  $z$ ,  $bi + cj + dk$  la parte vectorial.
- c) Dése una interpretación geométrica de la parte escalar y la parte vectorial del producto

$$(bi + cj + dk)(b'i + c'j + d'k)$$

de dos cuaterniones sin parte escalar.

26. Pruébese que si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es  $\mathbb{C}$ -lineal entonces existe  $\lambda = \alpha + \beta i$  tal que  $f(z) = \lambda z$ . Demuéstrase que  $f$  induce una aplicación lineal  $f_R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  calculando su matriz  $A$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ .
27. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación lineal de matriz  $A = (a_{kl})$ ,  $f_C : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la correspondiente aplicación asociada. Déense condiciones necesarias y suficientes para que  $f_C$  sea asimismo  $\mathbb{C}$ -lineal (ecuaciones de Cauchy-Riemann).
28. Sean  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ ,  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $T_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$  las correspondientes aplicaciones bilineales asociadas. Pruébese que  $T = T_1$  si y sólo si  $A_1 = \lambda A$  para algún  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

29. Sean

$$SL_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) : \det A = 1 \right\},$$

$$\mathcal{M} = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d} : ad - bc \neq 0 \right\},$$

con  $\varphi : SL_2 \rightarrow \mathcal{M}$ , la aplicación natural  $A \mapsto T$ . Pruébese que  $\varphi$  es sobreyectivo.

30. Una curva  $C \subset \mathbb{C}$  de clase  $C^1$  se define como  $C = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$  donde  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es  $C^1$  y  $\gamma'(t) \neq 0$  para todo  $t$ . Si  $z_0 = \gamma(t_0)$ ,  $v = \gamma'(t_0) \neq 0$  se dice que  $v \in \mathbb{C}$  es el vector tangente a  $C$  en  $z_0$  correspondiente a la parametrización  $\gamma$ .

Si  $C_1, C_2$  inciden en  $z_0$ , con vectores tangentes  $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$  asociados a sendas parametrizaciones  $\gamma_1, \gamma_2$ , se dice que  $C_1, C_2$  se cortan con ángulo:

$$\theta = \angle(v_1, v_2) = \arg \frac{v_2}{v_1}.$$

- a) Pruébese que si  $f(z) = az + b$ , y las curvas  $C_1, C_2$  inciden en  $z_0$  con ángulo  $\theta$ , entonces las curvas  $C'_i = f(C_i)$ ,  $i = 1, 2$ , inciden en  $f(z_0)$  con ángulo  $\theta$ .
- b) Pruébese que si  $f(z) = a\bar{z} + b$ ,  $C_1, C_2$  inciden en  $z_0$  con ángulo  $\theta$ , ahora las curvas  $C'_i = f(C_i)$ ,  $i = 1, 2$ , inciden en  $f(z_0)$  con ángulo  $2\pi - \theta$ .
31. Se considera la función  $f(z) = z^2 = u + iv$ . Pruébese que para cada par de constantes  $c_1, c_2$ ,  $c_1 c_2 \neq 0$ , las curvas:

$$u(x, y) = c_1, \quad v(x, y) = c_2,$$

se cortan ortogonalmente. Pruébese por otra parte que  $\gamma(t)$  es  $C^1$  se tiene  $(f \circ \gamma)'(t) = 2\gamma(t)\gamma'(t)$ . Demuéstrase que  $f$  preserva el ángulo entre curvas incidentes en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . ¿Qué sucede en  $z = 0$ ?

32. (♣) Sean  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una parametrización  $C^1$ . Pruébese que  $T(\gamma(t))$  es también una parametrización  $C^1$  tal que:

$$(T \circ \gamma)'(t) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \gamma'(t).$$

Demuéstrese que si  $C_1, C_2$  se cortan en  $z_0$  con un ángulo  $\theta$  entonces  $T(C_1), T(C_2)$  también se cortan en  $T(z_0)$  formando ángulo  $\theta$ .

## 1.9. Soluciones a los Ejercicios del Capítulo I

## CAPÍTULO 2

# Continuidad y topología en $\mathbb{C}$

### 2.1. Convergencia y continuidad en $\mathbb{C}$

Se introdujo en el Capítulo I la distancia en  $\mathbb{C}$  dada por:

$$\text{dist}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

**Proposición 2.1.** *El espacio métrico  $(\mathbb{C}, d)$  es isométricamente homeomorfo a  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  donde  $d_2$  es la distancia euclídea.*

La proposición afirma que desde el punto de vista topológico,  $\mathbb{C}$  es el mismo objeto que  $\mathbb{R}^2$ . Algunas de las propiedades que siguen son consecuencia inmediata de este hecho.

Recordemos en particular que:

$$\max\{\Re z, |\Im z|\} \leq |z| \leq \Re z + |\Im z|.$$

**Proposición 2.2.** *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1) Si  $\{z_n\}$  es una sucesión en  $\mathbb{C}$  entonces

$$\lim z_n = z$$

si y sólo si

$$\lim \Re z_n = \Re z \quad \lim \Im z_n = \Im z.$$

2)  $\{z_n\}$  es de Cauchy (véase la Sección 2.2) si y sólo si  $\{\Re z_n\}$ ,  $\{\Im z_n\}$  son de Cauchy.

3) La sucesión  $\{z_1 + \dots + z_n\}$  es convergente si y sólo si lo son  $\{\Re z_1 + \dots + \Re z_n\}$  y  $\{\Im z_1 + \dots + \Im z_n\}$  con:

$$\lim z_1 + \dots + z_n = \lim \Re z_1 + \dots + \Re z_n + i(\lim \Im z_1 + \dots + \Im z_n).$$

4) Si  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ , entonces  $\varphi$  continua en  $t_0$  si y sólo si  $\varphi_1, \varphi_2$  son continuas en  $t_0$ . Más aún, si se define

$$\varphi'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h},$$

la derivada de  $\varphi$  en  $t_0$ , supuesto que el límite exista, entonces  $\varphi$  es derivable en  $t_0$  si y sólo si  $\varphi_1, \varphi_2$  son derivables en  $t_0$  y

$$\varphi'(t_0) = \varphi_1'(t_0) + i\varphi_2'(t_0).$$

*Ejemplos 2.1.*

1.  $\lim_{n \rightarrow i} \frac{in}{n+i} = i.$

2.  $\lim z^n = 0$  si  $|z| < 1$  mientras  $z^n$  no converge si  $|z| > 1$  pues  $\lim |z|^n = \infty$ . Si  $|z| = 1$  y  $z \neq 1$  la sucesión  $z^n$  nunca es convergente. En efecto, en ese caso:

$$|z^{n+1} - z^n| = |z - 1|,$$

y  $z^n$  no puede cumplir la condición de Cauchy. De hecho, se saben más cosas de esta aparentemente inofensiva sucesión. O bien el conjunto  $\{z^n\}$  es finito o bien es infinito. El primer caso queda caracterizado por  $z = e^{i\theta}$  con  $\theta/2\pi \in \mathbb{Q}$ . El segundo caso –en el que todos los valores de  $z^n$  son necesariamente distintos entre sí– corresponde a  $\theta/2\pi$  irracional y se puede demostrar que  $\{z^n\}$  es densa en  $\partial D$ .

Las definiciones de límite y continuidad de funciones son consecuencia de la topología de  $\mathbb{C}$ . Las detallamos por completitud.

**Definición 2.3.** Sea  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D'$  ( $D'$  el conjunto de puntos de acumulación de  $D$ ) se dice que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lambda$$

si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal para cada  $0 < |z - z_0| < \delta$  se cumple  $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$ .

Las propiedades habituales del álgebra de límites no las enunciamos pormenorizadamente pero ya están implícitas en la Proposición 2.8.

Una propiedad conocida es la siguiente.

**Proposición 2.4.** Si  $f$  admite límite  $\lambda$  cuando  $z \rightarrow z_0$ ,  $f$  está acotada en un entorno reducido  $\{0 < |z - z_0| < \delta\} \cap D$  de  $z_0$ . Si  $\lambda \neq 0$  entonces  $f$  no se anula en un cierto entorno reducido de  $z_0$ .

**Definición 2.5.** Sea  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y supongamos que  $D \subset D'$ . Se dice que  $f$  es continua en  $z_0$  si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Si  $f$  es continua en todos los puntos de  $D$  se dirá que  $f$  es continua en  $D$ .

Típicamente los dominios  $D$  de nuestras funciones complejas  $f$  serán abiertos o adherencias de abiertos así que  $D \subset D'$ .

Si  $f = u + iv$  y  $F = (u, v)$  es la aplicación real  $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  asociada a  $f$  resulta obvio que:

**Proposición 2.6.**  *$f$  es continua en  $z_0$  si y sólo si  $F$  es continua en  $z_0$ . Es decir si y sólo si  $u$  y  $v$  son continuas en  $z_0$ .*

Merece la pena destacar que:

**Proposición 2.7.**  *$f$  es continua en  $z_0$  si y sólo si  $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$  cualquiera que sea la sucesión  $z_n$  que converja a  $z_0$ .*

Como ya se dijo, en funciones de variable compleja con frecuencia resulta desastroso apelar a las partes real e imaginaria de  $f$  para probar propiedades. A efectos de la continuidad –y como en el caso real– resulta de gran utilidad la siguiente propiedad.

**Proposición 2.8.** *Sean  $f, g$  funciones complejas continuas en  $z_0$ . Entonces:*

- 1)  $\alpha f + \beta g$  es continua en  $z_0$  para  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  arbitrarios.
- 2)  $fg$  es continua en  $z_0$ .
- 3)  $\frac{f}{g}$  es continua en  $z_0$  si  $g(z_0) \neq 0$ .
- 4) Si  $h$  es una función compleja que es continua en  $w_0 = f(z_0)$  entonces  $h \circ f(z) = h(f(z))$  también es continua en  $z_0$ .

*Ejemplos 2.2.* Las funciones

1.  $f(z) = az + b$
2.  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$
3.  $f(z) = a_0 z^n + \dots + a_n$
4.  $f(z) = \frac{a_0 z^n + \dots + a_n}{b_0 z^m + \dots + b_m}$
5.  $f(z) = \bar{z}$
6.  $f(z) = |z|$   
son continuas en sus dominios de definición,
7.  $f(z) = \arg_\tau z$  es continua en  $\mathbb{C} \setminus \gamma_\tau$ ,  $\gamma_\tau = \{te^{i\tau} : \theta \geq 0\}$ ,
8.  $f(z) = \sqrt[n]{z}$  donde

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \text{Arg } z/n},$$

designa la rama principal de la raíz  $n$ -ésima, es continua en  $\mathbb{C} \setminus \{x < 0\}$  y lo mismo sucede con las restantes  $n - 1$  ramas. Si usamos  $\arg_\tau$  en la definición entonces las  $n$  ramas  $f_1, \dots, f_n$  son continuas en  $\mathbb{C} \setminus \gamma_\tau$ ,  $(\mathbb{C} \setminus \{x > 0\})$  si trabajamos con  $\arg z$ ).

Recordemos que con  $\sqrt[n]{z}$  se designa la rama principal de la raíz  $n$ -ésima de  $z$ .

**Ejemplo 2.3.** Sea  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  derivable en  $t_0$  con  $\varphi(t_0)$ , entonces  $\frac{1}{\varphi}$  es derivable en  $t_0$  con derivada

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)' = -\frac{\varphi'(t_0)}{\varphi(t_0)^2}.$$

En efecto

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{\varphi(t_0 + h)} - \frac{1}{\varphi(t_0)} \right\} \\ = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\varphi(t_0 + h)\varphi(t_0)} \frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h} = -\frac{\varphi'(t_0)}{\varphi(t_0)^2}. \end{aligned}$$

La siguiente definición apenas tendrá relevancia dentro del presente curso.

**Definición 2.9.** Sea  $G \subset \mathbb{C}$  abierto y  $f = u + iv$  una función compleja definida en  $G$ . Se dice  $f$  es  $C^k$  en sentido real ( $1 \leq k \leq \infty$ ) si  $u, v \in C^k(G)$

**Ejemplos 2.4.**

1.  $f(z) = z^n = P(x, y) + iQ(x, y)$  donde  $P, Q$  son polinomios homogéneos de grado  $n$ . Por tanto  $f$  es  $C^\infty$  en sentido real y tanto polinomios  $p(z)$  como cocientes de polinomios  $p(z)/q(z)$  son funciones  $C^\infty$  en sentido real (en sus dominios de definición).
2. La función  $\theta(x, y) = \arg_\tau(z)$  es  $C^\infty$  en sentido real en  $\Omega \setminus \gamma_\tau$  y

$$\theta_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \theta_y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

En particular  $\sqrt[n]{z}$  es  $C^\infty$  en  $\mathbb{C}^2 \setminus \{z \leq 0\}$ .

## 2.2. Series

**Definición 2.10.** La sucesión  $z_n$  es de Cauchy si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - a_m| < \varepsilon$  para  $n, m \geq n_\varepsilon$ .

**Definición 2.11.** Dada la sucesión  $z_n$  se dice que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  converge y tiene suma  $z$  si la sucesión  $S_n = z_1 + \dots + z_n$  es convergente y tiene límite  $z$ . La serie es divergente si  $S_n$  no es convergente.

**Teorema 2.12.** La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es convergente si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left| \sum_{k=n}^m z_k \right| < \varepsilon$$

para  $m \geq n \geq n_\varepsilon$ . En particular, si  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  converge entonces  $\lim z_n = 0$ .

**Proposición 2.13.** *La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  es convergente si y sólo si las series  $\sum_{n=1}^{\infty} \Re z_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \Im z_n$  son convergentes. Además:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \Re z_n + \sum_{n=1}^{\infty} \Im z_n.$$

**Proposición 2.14.** *Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  es convergente entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  también converge y*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

## 2.3. Conexidad

Los subconjuntos compactos y conexos de  $\mathbb{C}$  son los de  $\mathbb{R}^2$  con la topología usual. Merece la pena resaltar una propiedad útil de conexidad.

**Definición 2.15.** *Dados  $z, w \in \mathbb{C}$  el segmento  $[z, w]$  de extremos  $z, w$  se define como:*

$$[z, w] = \{tz + (1-t)w : t \in [0, 1]\}.$$

Una poligonal  $\gamma$  de  $a \in \mathbb{C}$  a  $b \in \mathbb{C}$  es

$$\gamma = \cup_{k=1}^n [z_k, w_k],$$

donde  $z_k = w_{k-1}$ ,  $2 \leq k \leq n$ ,  $a = z_1$ ,  $b = w_n$ . Se dice en este caso que  $\gamma$  conecta a con b.

En el presente curso llamaremos dominio o región  $G$  a todo abierto conexo de  $\mathbb{C}$ . Se tiene la siguiente caracterización.

**Proposición 2.16.** *Un abierto  $G \subset \mathbb{C}$  es conexo si y sólo si todo par de puntos de  $G$  se pueden conectar mediante una poligonal  $\gamma \subset G$ .*

La misma demostración permite probar que la poligonal  $\gamma$  en la proposición anterior puede elegirse con todos los segmentos paralelos a uno de los ejes.

Recordemos ahora que si  $D \subset \mathbb{C}$  es un conjunto cualquiera, una componente conexa  $C$  de  $D$  es toda parte conexa maximal de  $D$ . Las componentes de  $D$  siempre son cerradas en  $D$  y la familia  $C_i$  de las componentes de  $D$  conforman una partición de  $D$ . Si  $D$  es abierto entonces se puede probar que sus componentes también son abiertas. Todas estas cuestiones forman parte de un curso de topología general y se recapitulan en [7] (ver [26]).

## 2.4. Compactificación de $\mathbb{C}$ . Proyección de Steiner

A muchos efectos conviene introducir en  $\mathbb{C}$  el punto del infinito. Esto se puede hacer por dos vías. Una analítica, topológica la otra. En éste último caso

se trata de la compactificación de Alexandroff de  $\mathbb{C}$ , en el primero de los límites infinitos o en el infinito que ahora introducimos.

**Definición 2.17.** *Se dice que:*

$$\lim z_n = \infty$$

si para todo  $M$  existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $|z_n| > M$  para todo  $n \geq m$ . Análogamente:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

si para  $M > 0$  arbitrario existe  $\delta$  tal que  $|f(z)| > M$  para  $0 < |z - z_0| < \delta$ . Finalmente:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w$$

si para  $\varepsilon > 0$  arbitrario existe  $M$  con  $|f(z) - w| < \varepsilon$  para  $|z| > M$ . Una mínima modificación de este último caso permite extender la definición al caso  $w = \infty$ .

Una primera vía para introducir el punto del infinito consiste en identificar cada  $z \in \mathbb{C}$  con las sucesiones complejas  $z_n$  tales que  $z_n \rightarrow z$  (ver [13]). Esta identificación preserva las operaciones algebraicas de  $\mathbb{C}$ . El punto del infinito  $\infty$  es por definición la clase de las sucesiones  $z_n$  con  $\lim z_n = \infty$ . El cuerpo ampliado  $\widehat{\mathbb{C}}$  consiste en  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Se tiene la

**Proposición 2.18.** *Sean  $z_n, w_n$  sucesiones complejas tales que  $\lim z_n = \infty$  y  $\lim w_n = w$ . Entonces*

1.  $\lim z_n + w_n = \infty$ , incluso si  $\lim w_n = \infty$ .
2.  $\lim z_n w_n = \infty$  si  $\lim w_n \neq 0$ ,  $\lim w_n = \infty$  incluido.
3.  $\lim \frac{w_n}{z_n} = 0$  si  $z_n \neq 0$ .
4.  $\lim \frac{w_n}{u_n} = \infty$  si  $u_n \neq 0$ ,  $\lim u_n = 0$  y  $w \neq 0$  (incluyendo  $\lim w_n = \infty$ ).

Las propiedades precedentes se interpretan en  $\widehat{\mathbb{C}}$  como  $\infty + w = \infty$ ,  $\infty w = \infty$  ( $w \neq 0$ ),  $w/\infty = 0$  ( $w \neq \infty$ ),  $w/0 = \infty$  ( $w \neq 0$ ).

Los siguientes ejemplos en nada difieren del caso de una variable real.

**Ejemplos 2.5.** 1. Sean  $p(z) = a_0 z^n + \dots + a_n$ ,  $q(z) = b_0 z^m + \dots + b_m$  polinomios. Entonces

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{p(z)}{q(z)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & n = m \\ 0 & n < m \\ \infty & n > m. \end{cases}$$

2. Para  $p(z), q(z)$  como en el caso anterior,  $q(z_0) = 0$ ,  $p(z_0) \neq 0$  se tiene:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \infty.$$

Hablemos ahora de compactificaciones. El espacio  $\mathbb{C}$  no es compacto:  $\{D(0, n)\}$  no admite subrecubrimientos finitos. Una compactificación de un espacio topológico  $(X, T)$  es un espacio topológico compacto  $(X', T')$  que contiene a  $(X, T)$  en el sentido siguiente: existe  $h : X \rightarrow X'$  continua e inyectiva tal que  $h(X)$  es homeomorfo  $X$  y  $\overline{h(X)} = X'$ . Si  $X' \setminus h(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$  se dice que  $X$  se ha compactificado tras la adición de un número finito de puntos. Las compactificaciones por adición de un solo punto revisten particular interés. Se sabe [18] que todo espacio Hausdorff  $X$  localmente compacto admite una *única* compactificación  $X'$  por un solo punto denominada “compactificación de Alexandroff”. Se construye así. Primero  $X' = X \cup \{P_\infty\}$  donde  $P_\infty$  no es un elemento de  $X$  (por ejemplo  $P_\infty = (0, 0, 1)$  en el caso de  $\mathbb{C}$ ). Al tal  $P_\infty$  se le llama  $\infty$ , el “punto del infinito”. La topología  $T'$  en  $X'$  se obtiene de la de  $X$  manteniendo los entornos de los puntos de  $X$  y tomando  $\{(X \setminus K) \cup \{\infty\} : K \subset X \text{ compacto}\}$  como base de entornos de  $\infty$ .

**Proposición 2.19.** *Sea  $(X, T)$  localmente compacto y  $T_2$ . Entonces, el espacio  $(X', T')$  es compacto,  $T_2$  y la inclusión  $h(x) = x$ ,  $h : X \rightarrow X'$  cumple las propiedades de compactificación señaladas más arriba.*

*Demostración.* En efecto  $X'$  es  $T_2$  porque si  $x \neq P_\infty$  y  $K$  es entorno compacto de  $x$ ,  $X' \setminus K$  es entono de  $P_\infty$ .

Asimismo, si  $G'$  abierto en  $X'$ ,  $G = G' \setminus P_\infty$  es abierto en  $X$ . Si además  $P_\infty \in G'$  tomando  $G = G' \setminus P_\infty$  resulta que  $X' \setminus G' = X \setminus G$  y  $X' \setminus G' \subset K$  para algún compacto. En efecto  $(X \setminus K) \cup \{P_\infty\} \subset G'$  para algún compacto  $K \subset X$ . Por tanto  $X' \setminus G'$  es compacto en  $X$  si  $G'$  es abierto y  $P_\infty \in G'$ .

Probamos que  $X'$  es compacto. Si  $\{G'_i\}$  recubre  $X'$ ,  $P_\infty \in G'_{i_0}$  para algún  $i_0$ . Así  $\{G_i = G'_i \setminus \{P_\infty\} : i \neq i_0\}$  recubre  $X \setminus G_{i_0}$  que es compacto. Tomando el correspondiente subrecubrimiento  $\{G_{1_1}, \dots, G_{i_N}\}$  resulta que  $\{G'_{i_0}, G'_{1_1}, \dots, G'_{i_N}\}$  también recubre  $X'$ .  $\square$

En el caso de  $\mathbb{C}$  el espacio compacto resultante se llama la *esfera de Riemann* y se denota  $\mathbb{C}_\infty$ . A diferencia de la recta real  $\mathbb{R}$  que admite compactificaciones por adición de un punto y por adición de dos puntos, es consecuencia de un teorema de K. D. Magill (1965) que la única compactificación ( $T_2$ ) de  $\mathbb{C}$  por adición de un número finito de puntos es la de Alexandroff <sup>1</sup>. La siguiente propiedad es inmediata.

**Proposición 2.20.** *Una sucesión  $z_n \rightarrow \infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$  si y sólo si  $z_n \rightarrow \infty$  de acuerdo a la Definición 2.17. Análogamente  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$  si y sólo si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  de acuerdo con la Definición 2.17. Lo mismo sucede con el caso  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w$ .*

*Observaciones 2.6.*

a) Las aplicaciones bilineales

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

<sup>1</sup>Con más precisión, Magill caracteriza las compactificaciones Hausdorff por un número finito de puntos de espacios no compactos que también son Hausdorff.

$c \neq 0$  definen homeomorfismos de  $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$  en  $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ . Tales aplicaciones se extienden en forma única a homeomorfismos  $\tilde{f}$  de  $\mathbb{C}_\infty$ . Basta hacer  $\tilde{f} = f$  en  $\mathbb{C}$  y

$$\tilde{f}\left(-\frac{c}{d}\right) = \infty, \quad \tilde{f}(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Cuando una aplicación bilineal  $f$  se observe en  $\mathbb{C}_\infty$  supondremos que se ha efectuado esta extensión y nos referiremos a ella como  $f$  (no usaremos  $\tilde{f}$ ).

b) En el caso de semejanzas ( $c = 0$ )

$$f(z) = az + b,$$

la extensión  $\tilde{f}$  consiste en hacer  $\tilde{f}(\infty) = \infty$ .

Que la compactificación de  $\mathbb{C}$  se llama la esfera de Riemann se debe a la siguiente propiedad. Allí  $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  y  $N = (0, 0, 1) \in S_2$ , designa el polo norte de  $S_2$ . Afirma que  $S^2$  es una compactificación de  $\mathbb{C}$  por un sólo punto y por tanto ha de ser homeomorfa a  $\mathbb{C}_\infty$ .

**Teorema 2.21.** *La aplicación*

$$T : \begin{array}{ccc} S_2 \setminus N & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P = (\xi, \eta, \zeta) & \longmapsto & z = x + iy \end{array},$$

definida como:

$$T(P) = \left( \frac{\xi}{1-\zeta}, \frac{\eta}{1-\zeta} \right) = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta},$$

es un homeomorfismo conforme, con inverso  $h : \mathbb{C} \rightarrow S_2 \setminus N$  definido por:

$$h(z) = \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

*Observación 2.7.* La aplicación  $T$  se llama la proyección de Steiner.

**Teorema 2.22.**  $\mathbb{C}_\infty$  es homeomorfo a  $S_2$ .

*Demostración.* La aplicación  $h : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$  se extiende a  $H : \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$  tomando

$$H(\infty) = N.$$

Que  $H$  es un homeomorfismo se sigue de que  $H$  es continua en  $\infty$ . En efecto, una base de entornos de  $N$  es:

$$\{\mathcal{U} = \{x_3 > r\} \cap S^2 : r < 1\}.$$

Como

$$H^{-1}(\mathcal{U}) = \{z : |z| > \frac{1+r}{1-r}\} \cup \{\infty\},$$

es un entorno de  $\infty$ ,  $H$  es continua en  $\infty$ .

Ahora  $H$  es continua y biyectiva.  $H$  es además cerrada:  $C \subset \mathbb{C}_\infty$  cerrado implica  $C$  compacto y  $H(C)$  es cerrado en  $S^2$  porque es compacto. Por tanto  $H$  es un homeomorfismo. □

La siguiente propiedad habla de circunferencias en  $S_2$  y de rectas y circunferencias en  $\mathbb{C}$ . Una circunferencia  $C$  en  $S_2$  es la intersección de un plano  $\pi$  con  $S_2$ . Esto coincide con el conjunto de puntos  $\{x \in S_2 : |x - x_0| = r\}$ , con  $x_0 \in S_2$ . En efecto

$$\begin{cases} |x|^2 = 1 \\ |x - x_0|^2 = r^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|^2 = 1 \\ -2\langle x, x_0 \rangle = r^2 - |x_0|^2 - 1, \end{cases}$$

y  $\pi$  tiene  $-2\langle x, x_0 \rangle = r^2 - |x_0|^2 - 1$  por ecuación.

Si el origen  $O$  y  $N$  pertenecen a  $\pi$ ,  $C$  se denomina un meridiano, si  $\pi$  es paralelo al plano  $x, y$ ,  $C$  se llama un paralelo.

*Observación 2.8.* Las rectas  $r$  de  $\mathbb{C}$  se completan con el punto  $\infty$  cuando se las observa en  $\mathbb{C}_\infty$ . Esto permite dar un tratamiento unificado a las propiedades del resto del capítulo.

Por ejemplo la propiedad: “ $f(z) = \frac{1}{z}$  transforma rectas que pasan por  $z = 0$  en rectas  $r'$  que también pasan por  $z = 0$ ” se prueba en  $\mathbb{C}_\infty$  añadiendo  $\infty$  a las rectas. En efecto  $f(0)$  es el punto  $\infty$  de  $r'$  mientras la imagen  $f(\infty)$  del punto  $\infty$  de  $r$  es el punto  $z = 0$  de  $r'$ .

Similarmente  $f(z) = \frac{1}{\tilde{z}}$  transforma una circunferencia  $C$  que pasa por  $z = 0$  en una recta pues a  $0 \in \tilde{C}$  le asigna el punto  $\infty$  de  $r$ .

Con más generalidad  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $c \neq 0$ , transforma rectas o circunferencias que pasan por  $z_\infty = -\frac{d}{c}$  en rectas que contienen a  $\infty = f(z_\infty)$ . Aplica rectas  $r$  que no pasan por  $z_\infty$  en circunferencias que pasan por  $w_\infty = \frac{a}{c}$  y circunferencias que no pasan por  $z_\infty$  en circunferencias.

Bajo este convenio todas las rectas comparten en punto  $\infty$ . Este hecho se hace patente cuando proyectamos las rectas de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $S^2$  mediante  $H$ : tales proyecciones son las circunferencias de  $S^2$  que pasan por el polo norte  $N$ .

**Teorema 2.23.**  *$T$  transforma circunferencias de  $S_2$  que no pasan por  $N$  en circunferencias de  $\mathbb{C}$  y circunferencias de  $S_2$  que pasan por  $N$  en rectas de  $\mathbb{C}_\infty$ . Recíprocamente,  $h$  transforma circunferencias de  $\mathbb{C}$  en circunferencias de  $S_2$  y rectas de  $\mathbb{C}_\infty$  en circunferencias de  $S_2$  que pasan por  $N$ .*

*Demostración.* Si  $A\xi + B\eta + C\zeta = D$  es el plano que define  $C$  en  $S_2$ ,  $T(C)$  tiene ecuación:

$$(C - D)|z|^2 + 2Ax + 2By = D + C.$$

Nótese que  $N \in \pi$  si y sólo si  $C = D$ . La afirmaciones del teorema son ahora evidentes.

Para demostrar el recíproco tomamos  $C_1 \subset \mathbb{C}$  una circunferencia y tres puntos  $A, B, C \in C_1$ . Si  $A', B', C' \in S_2$  son sus imágenes, sólo pasa un plano  $\pi$  por tales puntos y  $C$  es la circunferencia que determinan en  $S_2$ . Ahora  $T(C)$  es una circunferencia que contiene a  $A, B, C$ , luego  $T(C) = C_1$ . Por tanto  $h(C_1) = C$ .

Si  $r$  es una recta de  $\mathbb{C}$ ,  $r$  y  $N$  determinan un plano  $\pi$  y  $h(r)$  es por definición  $\pi(\cap S_2 \setminus \{N\})$ , una circunferencia por  $N$ .  $\square$

Gracias a la proyección de Steiner se puede dotar a  $\mathbb{C}_\infty$  de una métrica que describe su topología. A saber:

$$d_c(z_1, z_2) = |h(z_1) - h(z_2)| \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{\infty\}, \quad d_c(z, \infty) = |h(z) - N|.$$

Se llama a  $d_c$  la métrica cordal (allí  $|\cdot|$  es la distancia euclídea de  $\mathbb{R}^3$ ). Para calcularla se tiene que si  $P, P' \in S_2$  entonces

$$|P - P'|^2 = 2\{1 - \xi\xi' - \eta\eta' - \zeta\zeta'\}.$$

De ahí:

$$d_c(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2 + 1}\sqrt{|z_2|^2 + 1}} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{\infty\},$$

$$d_c(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}}.$$

*Ejercicio 2.1.* Ya se sabe que  $g : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  definida como  $\frac{1}{z}$  para  $z \neq 0, z \neq \infty$ ,  $g(0) = \infty$ ,  $g(\infty) = 0$  es un homeomorfismo. La aplicación  $g$  induce en  $S_2$  la aplicación  $\tilde{g} : S_2 \rightarrow S_2$  definida por  $\tilde{g}(P) = (H \circ g \circ H^{-1})(P) = h(g(T(P)))$ . ¿Qué aplicación es  $\tilde{g}$ ?

*Ejercicio 2.2.* Los puntos de  $S_2$  pueden expresarse en la forma:

$$\xi = \cos \varphi \cos \phi, \quad \eta = \cos \varphi \sin \phi, \quad \zeta = \sin \varphi,$$

con  $0 \leq \phi < 2\pi$  (la longitud),  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$  (la latitud). Pruébese que:

$$T(\xi, \eta, \zeta) = \operatorname{tag} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{i\phi}.$$

*Ejercicio 2.3.* Pruébese que  $d_c(z, \infty) = \lim_{z_1 \rightarrow \infty} d_c(z, z_1)$ .

## 2.5. Transformaciones bilineales. 2ª nota

Designamos por

$$\mathcal{M} = \left\{ f(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0 \right\}$$

el conjunto de las transformaciones bilineales.

Cuando  $f = \frac{az + b}{cz + d}$  y  $c \neq 0$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \frac{a}{c}, \quad \lim_{z \rightarrow -d/c} f(z) = \infty.$$

y como ya se dijo,  $f$  constituye un homeomorfismo de  $\mathbb{C}_\infty$  cuando se definen  $f(\infty) = a/c$ ,  $f(-d/c) = \infty$ . En el caso de las semejanzas  $f = az + b$  se define  $f(\infty) = \infty$ .

Por tanto, en lo que sigue consideraremos siempre a todas las aplicaciones bilineales  $f \in \mathcal{M}$  extendidas a aplicaciones de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ .

Hablamos ahora de los puntos fijos en  $\mathbb{C}_\infty$  de una  $f \in \mathcal{M}$ . Si  $c \neq 0$ ,  $f(\infty) \neq \infty$  mientras  $z \in \mathbb{C}$  es un punto fijo si

$$az + b = z(cz + d).$$

Por tanto  $f$  posee uno o dos puntos fijos en  $\mathbb{C}_\infty$  (de hecho en  $\mathbb{C}$ ). Por otra parte  $\infty$  es punto fijo de  $f$  si y sólo si  $c = 0$ . El otro posible punto fijo saldría de resolver:

$$(d - a)z = b.$$

Si  $d \neq a$  el punto fijo adicional es  $z = \frac{b}{d - a}$ .

Si  $d = a$  pero  $b \neq 0$  no hay más puntos fijos.

Finalmente, si  $d = a$  y  $b = 0$  nuestra aplicación

$$f(z) = \frac{az}{d} = z$$

es la identidad, que tiene a todos los puntos de  $\mathbb{C}_\infty$  como puntos fijos.

Hemos demostrado por tanto lo siguiente.

**Proposición 2.24.** *La única  $f \in \mathcal{M}$  con más de dos puntos fijos en  $\mathbb{C}_\infty$  es la identidad  $f(z) = z$ .*

Para construir aplicaciones bilineales es importante la siguiente propiedad.

**Proposición 2.25.** *Dados  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$  distintos y  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$  distintos, existe a lo más una  $f \in \mathcal{M}$  tal que  $f(z_i) = w_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* Si  $f, g \in \mathcal{M}$  cumplen  $f(z_i) = g(z_i)$  entonces  $f^{-1} \circ g$  tiene tres puntos fijos y ha de ser la identidad.  $\square$

Una consecuencia importante es que se requieren tres condiciones para determinar un elemento  $f \in \mathcal{M}$ .

Para estudiar propiedades adicionales de  $f \in \mathcal{M}$  introducimos la razón doble  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  de cuatro puntos distintos  $z_i$  de  $\mathbb{C}_\infty$ . Ésta se define como:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

cuando los  $z_j \in \mathbb{C}$  mientras que si uno de los  $z_i = \infty$  se toma como valor de la razón doble el del límite de  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  cuando  $z_i \rightarrow \infty$ . Por ejemplo:

$$(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}.$$

Algunas veces abreviaremos  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  como  $(z_i)$ .

La aplicación

$$S(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$$

(abreviado  $S(z) = (z, z_i)$ ) es el elemento de  $\mathcal{M}$  que asigna a  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$  la tríada  $1, 0, \infty$ .

**Proposición 2.26.** *Si  $f \in \mathcal{M}$  y  $z_1, z_2, z_3$  son puntos distintos de  $\mathbb{C}_\infty$  entonces*

$$(z, z_i) = (f(z), f(z_i)) \quad (2.1)$$

para todo  $z \in \mathbb{C}_\infty$ .

*Demostración.* Llamamos  $S_1(w) = (w, f(z_i))$  y  $S(z) = (z, z_i)$  y nos llevamos la sorpresa de que  $S_1 \circ f$  y  $S$  asignan los mismos valores a los puntos  $z_i$ .  $\square$

Un problema pendiente es hallar la  $f \in \mathcal{M}$  que cumple  $f(z_i) = w_i$  para dos tríadas  $z_i$  y  $w_i$  de puntos distintos. Si  $S$  y  $S_1$  son las aplicaciones precedentes la solución es evidentemente  $f(z) = S_1^{-1}(S(z))$ .

En la práctica  $w = f(z)$  se calcula despejando  $w$  en la ecuación:

$$(w, w_i) = (z, z_i).$$

Ya hemos visto que rectas y circunferencias de  $\mathbb{C}_\infty$  no son sino la imagen de circunferencias en  $S_2$  por la proyección de Steiner. De hecho las rectas son las circunferencias de  $S_2$  que pasan por el polo norte  $N \in S_2$ . Por tanto el término circunferencia también abarcará en lo que sigue a las rectas de  $\mathbb{C}_\infty$  (rectas de  $\mathbb{C}$  a las que se ha añadido el punto  $\infty$ ).

**Proposición 2.27.** *Cuatro puntos distintos  $z_j$ ,  $1 \leq j \leq 4$ , de  $\mathbb{C}_\infty$  yacen en una circunferencia si y sólo si*

$$(z_j) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

*Demostración.* En efecto si  $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$  sabemos que  $S^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$  es una circunferencia  $C$  (incluyendo el caso de una recta de  $\mathbb{C}_\infty$ ) pues  $S^{-1} \in \mathcal{M}$ . Así  $z_1 \in C$  junto con los otros tres puntos.

Recíprocamente, si formamos la circunferencia  $C$  que pasa por  $z_2, z_3, z_4$ ,  $S$  aplica este triplete en  $1, 0, \infty$  y la imagen de  $C$  es  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Si por hipótesis  $z_1 \in C$  entonces  $S(z_1) = (z_j) \in \mathbb{R}$ .  $\square$

*Observación 2.9.* Sea  $C$  la circunferencia de  $\mathbb{C}_\infty$  que pasa por los puntos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ . Es consecuencia de la propiedad que

$$\Im(z, z_1, z_2, z_3) > 0$$

representa los puntos de una de las componentes conexas de  $\mathbb{C} \setminus C$  mientras

$$\Im(z, z_1, z_2, z_3) < 0$$

caracteriza los puntos de la otra componente de  $\mathbb{C} \setminus C$ .

Si  $C$  no es una recta,  $\infty \notin C$  y pertenece a una de las dos componentes. Se llama componente exterior aquella a la que pertenece  $\infty$ .

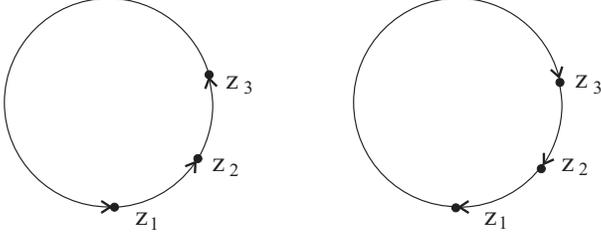


Figura 2.1: Orientaciones equivalentes a  $\{z_1, z_2, z_3\}$  y orientaciones equivalentes a  $\{z_2, z_1, z_3\}$ .

**Proposición 2.28.** Sea  $f \in \mathcal{M}$ ,  $C$  la circunferencia que pasa por  $z_1, z_2, z_3$ ,  $C'$  su imagen por  $f$ . Entonces  $f$  transforma las componentes  $C_1, C_2$  de  $\mathbb{C} \setminus C$  en las componentes  $C'_1, C'_2$  de  $\mathbb{C} \setminus C'$ .

*Observación 2.10.* La propiedad es consecuencia inmediata del hecho de que  $f$  es un homeomorfismo en  $\mathbb{C}_\infty$ .

*Demostración.* Si  $C$  es una circunferencia su ecuación se escribe:

$$\Im(z, z_1, z_2, z_3) = \Im(f(z), w_1, w_2, w_3) \quad w_j = f(z_j).$$

Si  $C_1$  es por ejemplo la componente  $\Im(z, z_j) > 0$  entonces  $f(C_1)$  es la componente  $\Im(z, w_j) > 0$ .  $\square$

En las construcciones con funciones bilineales es importante la noción de orientación.

**Definición 2.29.** Dada una circunferencia  $C$  una orientación consiste en un triplete ordenado  $\{z_1, z_2, z_3\}$  de puntos de  $C$ . El lado derecho  $C_+$  (respectivamente, izquierdo  $C_-$ ) de  $C$  relativo a  $\{z_1, z_2, z_3\}$  consiste en la componente de  $\mathbb{C} \setminus C$  caracterizada por

$$\Im(z, z_j) > 0 \quad (\Im(z, z_j) < 0).$$

Se dice que otra orientación  $\{z'_1, z'_2, z'_3\}$  de  $C$  equivale a la anterior si sus lados derechos coinciden.

Las orientaciones cambian si se intercambian dos  $z_j$  entre sí. En particular, son invariantes frente a permutaciones circulares y  $\{z_1, z_2, z_3\}$ ,  $\{z_2, z_3, z_1\}$ ,  $\{z_3, z_1, z_2\}$  representan la misma orientación. La orientación  $\{z_1, z_2, z_3\}$  puede identificarse con el sentido de recorrido de  $C$  cuando se va de  $z_1$  a  $z_3$  pasando por  $z_2$ . En la Figura 5.1 se da una imagen geométrica.

**Proposición 2.30.** Sea  $\{z_1, z_2, z_3\}$  una orientación de  $C$ . Entonces  $\{z_2, z_1, z_3\}$ ,  $\{z_1, z_3, z_2\}$  y  $\{z_3, z_2, z_1\}$  constituyen orientaciones de  $C$  distintas de  $\{z_1, z_2, z_3\}$ .

*Demostración.* Es consecuencia de las identidades:

$$(z, z_2, z_1, z_3) = 1 - (z, z_1, z_2, z_3)$$

y

$$(z, z_1, z_3, z_2) = \frac{1}{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

□

**Teorema 2.31.** Sean  $C$  una circunferencia,  $\{z_1, z_2, z_3\} \subset C$ ,  $C_{\pm}$  los correspondientes lados de  $C$  y  $f$  una aplicación bilineal. Si  $C' = f(C)$ ,  $w_i = f(z_i)$  y se considera en  $C'$  la orientación definida por  $\{w_1, w_2, w_3\}$  entonces  $f(C_-) = C'_-$  y  $f(C_+) = C'_+$ .

*Demostración.* Consecuencia directa de la Proposición 2.26. □

**Proposición 2.32.** Sea  $C$  la recta  $z = a + bt$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Para  $z_j = a + t_j b$  con  $t_1 < t_2 < t_3$ . Entonces el lado izquierdo de  $C$  con respecto a  $\{z_1, z_2, z_3\}$  es

$$\Im\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0,$$

es decir, el semiplano que queda a la izquierda de  $C$  cuando se recorre en sentido creciente de acuerdo a  $b$ .

Análogamente si  $C$  es  $z = z_0 + re^{is}$ ,  $z_j = z_0 + re^{is_j}$  con  $0 \leq s_1 < s_2 < s_3 < 2\pi$  y se considera en  $C$  la orientación  $\{z_1, z_2, z_3\}$  entonces el lado izquierdo  $C_-$  es la componente acotada de  $\mathbb{C} \setminus C$  (es decir la región que queda a “mano” izquierda cuando se recorre  $C$  en sentido positivo).

## 2.6. El teorema fundamental del álgebra

Vamos a probar con métodos elementales que todo polinomio complejo

$$p(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$$

admite una raíz en  $\mathbb{C}$ .

La prueba se fracciona en los siguientes lemas.

**Lema 2.33.** Dados un polinomio complejo  $p(z)$  y  $z_0 \in \mathbb{C}$  existen  $b_1, \dots, b_n$  complejos tales que:

$$p(z) = p(z_0) + b_1(z - z_0) + \cdots + b_n(z - z_0)^n = \sum_{l=0}^n a_{n-l} z^l.$$

Más aún:

$$b_k = \frac{1}{k!} \sum_{l=k}^n \frac{l!}{(l-k)!} a_{n-l} z_0^{l-k}.$$

**Lema 2.34.** Si  $p(z)$  es un polinomio complejo,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty.$$

**Lema 2.35.** Sea  $p(z)$  un polinomio complejo. Entonces existe  $z^* \in \mathbb{C}$  tal que:

$$|p(z^*)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |p(z)|.$$

Finalmente:

**Lema 2.36** (Lema de d'Alembert). Sea  $p(z)$  un polinomio complejo y  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $p(z_0) \neq 0$ . Existe entonces  $h \in \mathbb{C}$  tal que:

$$|p(z_0 + h)| < |p(z_0)|.$$

**Teorema 2.37** (Teorema fundamental del álgebra). Todo polinomio complejo admite al menos una raíz.

*Demostración.* Por el lema 2.35  $|p(z)|$  alcanza el mínimo en un  $z^*$  quien, del lema de d'Alembert, tiene que ser una raíz de  $p$ .  $\square$

## 2.7. Ejercicios

- Transformaciones de Möbius.

1. Hallar las aplicaciones de Möbius que transforman:

a)  $1, i, -1$  en  $-1, i, 1$ .

b)  $-i, 0, i$  en  $0, i, 2i$ .

c)  $-i, i, 2i$  en  $\infty, 0, \frac{1}{3}$ .

2. Hallar los puntos fijos de las aplicaciones:

$$T(z) = \frac{z-1}{z+1}, \quad T(z) = \frac{z}{z+1}.$$

3. Pruébese que si cuatro puntos distintos  $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$  son colineales o yacen en una circunferencia entonces  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  es real (el recíproco es cierto, según se vio en teoría).

4. Hallar las imágenes de la circunferencia unidad  $\{|z| = 1\}$  bajo las transformaciones:

$$w = \frac{1}{z}, \quad w = \frac{1}{z-1}, \quad w = \frac{1}{z-2}.$$

5. Hallar la imagen de  $\{\Im z > 0\}$  bajo  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc < 0$ .

6. Determinar una aplicación bilineal  $T$  que transforme  $\{\Re z > 0\}$  en  $\{|z| < 1\}$ .  
Misma cuestión transformando  $\{\Re z < 0\}$  en  $\{|z| > 1\}$ .

7. Calcular una aplicación bilineal  $T$  que transforme:

$$\{|z| < 1, \Im z > 0\},$$

en

$$\{\Re z > 0, \Im z > 0\}.$$

8. (♣) Hállese una transformación bilineal que aplique: 1) la circunferencia  $|z - 4i| < 2$  en el semiplano  $\Im w > \Re w$ , 2) el centro de la circunferencia en el punto  $-4, 3$ ) el punto  $2i$  de la circunferencia en el origen.

• *Proyección de Steiner*

9. Sea  $\mathbb{C}_\infty$  la esfera de Riemann  $\mathbb{C}_\infty = \{(\xi, \eta, \zeta) : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$ ,  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$  la proyección de Steiner:

$$\Re T = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad \Im T = \frac{\eta}{1 - \zeta}.$$

Demuéstrese que si  $C$  es una circunferencia en  $\mathbb{C}$  entonces  $T^{-1}(C)$  también es una circunferencia en  $\mathbb{C}_\infty$ .

10. Pruébese que la proyección de Steiner  $T : \mathbb{C}_\infty \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  define un homeomorfismo.
11. ¿Qué transformación de la esfera  $\mathbb{C}_\infty$  asigna  $T^{-1}(1/z)$  a  $T^{-1}(z)$ ?
12. Hallar las imágenes inversas  $T^{-1}$  de los conjuntos: 1)  $\Im z > 0$ , 2)  $\Im z < 0$ , 3)  $\Re z > 0$ , 4)  $\Re z < 0$ , 5)  $|z| < 1$ , 6)  $|z| > 1$ .
13. Se define la distancia cordal  $d_c$  en  $\mathbb{C}_\infty$  como:

$$d_c(z, z') = |T^{-1}(z) - T^{-1}(z')|, \quad d_c(z, \infty) = |T^{-1}(z) - N|,$$

con  $N = (0, 0, 1)$ . Probar que:

$$d_c(z, z') = \begin{cases} \frac{|z - z'|}{(1 + |z|^2)^{1/2}(1 + |z'|^2)^{1/2}} & z, z' \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{(1 + |z|^2)^{1/2}} & z \in \mathbb{C}, z' = \infty. \end{cases}$$

Demostrar que  $d_c(z, \infty) = \lim_{z' \rightarrow \infty} d_c(z, z')$ .

• *Continuidad, sucesiones, series*

14. Probar que los únicos automorfismos continuos de  $\mathbb{C}$  son  $f(z) = z$  y  $f(z) = \bar{z}$ .

15. Se consideran las funciones  $f, g : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G \subset \mathbb{C}$  abierto. Si  $f, g$  continuas en  $z_0 \in G$  pruébese que  $\lambda f + \mu g$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ,  $fg$  y  $f/g$  (en éste último caso añadiendo  $g(z_0) \neq 0$ ) también son continuas en  $z_0$ . Si  $h : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Omega$  abierto,  $w_0 = f(z_0) \in \Omega$  y  $h$  es continua en  $w_0$  demuéstrese que  $h(f(z))$  es continua en  $z_0$ .
16. Probar que  $|z|$  es Lipschitziana en  $\mathbb{C}$  de constante 1.
17. Sea  $f(z) = z^n$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Demostrar que  $u, v$  son polinomios homogéneos de grado  $n$  en  $x, y$ . Conclúyase de ahí que si  $p(z)$  es un polinomio de grado  $n$ ,  $p(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , entonces  $u, v$  son polinomios en  $x, y$  de grado  $n$ .
18. Sean  $p(z), q(z)$  polinomios complejos, grado  $q \leq$  grado  $p$ . El algoritmo de la división asegura la existencia de polinomios únicos  $c(z), r(z)$ , grado  $r <$  grado  $q$  tales que:

$$p(z) = c(z)q(z) + r(z).$$

Úsese el teorema fundamental del álgebra para probar que si  $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  es un polinomio complejo de grado  $n \geq 1$  entonces existen  $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{C}$  y enteros  $m_1, \dots, m_s$ ,  $m_1 + \dots + m_s = n$  tales que:

$$p(z) = (z - a_1)^{m_1} \dots (z - a_s)^{m_s}. \quad (1)$$

Conclúyase que la descomposición (1) es única.

19. [Polinomio de Taylor de un polinomio] Sea  $p(z)$  un polinomio de grado  $n$ ,  $z, h \in \mathbb{C}$ . Demostrar que:

$$p(z+h) = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k!} h^k,$$

para coeficientes  $c_k$  que deben expresarse en función de  $z$ .

20. Sea  $p(z)$  un polinomio. Demuéstrese que  $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$ .
21. Sea  $f(z)$  una función racional,  $z = a$  un cero del denominador. Pruébese la existencia de  $\lambda \in \mathbb{C}$  y de  $n \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  tales que:

$$f(z) \sim \lambda(z-a)^n \quad z \rightarrow a.$$

22. Demuéstrese que las funciones racionales  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  definen funciones continuas de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ .

23. Estudiar los límites:

$$a) \lim_{z \rightarrow i} 2z^2 - iz^3 + z \operatorname{Arg} \bar{z}, \quad b) \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^4 + 1}{z + i}, \quad c) \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^4 - 1}{z + i}, \quad d) \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 - iz + 2}{z^2 + 4},$$

$$e) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sqrt{z} - 1}{z - 1}, \quad f) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z + z \operatorname{Log} z}{1 - z^2 \operatorname{Arg} z}, \quad d) \lim_{z \rightarrow 0} e^{-1/z^2}.$$

24. Hallar el límite de  $z_n = n(\sqrt[n]{z} - 1)$ .
25. Se sabe que la serie  $\sum z_n$  converge con  $|\text{Arg } z_n| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Demostrar la convergencia de  $\sum |z_n|$ .
26. [Fórmula de sumación por partes]. Fijando  $A_n = a_1 + \dots + a_n$ , probar que:

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_{m-1} b_m.$$

27. Supóngase que la sucesión  $A_n = a_1 + \dots + a_n$  está acotada y que  $b_n$  es decreciente con  $\lim b_n = 0$ . Pruébese que la serie  $\sum a_n b_n$  es convergente.
28. Demostrar que (criterio de Gauss):

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

con  $a_n > 0$ ,  $a < -1$ , implica la convergencia de  $\sum a_n$ . Como aplicación establézcase la convergencia de la serie hipergeométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)}{(n+1)!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n)},$$

en el régimen  $\Re(\alpha + \beta - \gamma) < 0$ .

29. Estudiar la convergencia de las series:

$$\begin{aligned} a) \sum \frac{n}{(2i)^n}, \quad b) \sum \frac{n!}{(in)^n}, \quad c) \sum e^{in}, \\ d) \sum \frac{e^{in}}{n}, \quad e) \sum \frac{e^{\pi i/n}}{n}, \quad f) \sum \frac{\cos in}{2^n}. \end{aligned}$$

# CAPÍTULO 3

## Series de potencias. Funciones analíticas

El estudio de las funciones de una variable compleja se puede abordar desde dos ópticas independientes que a la postre resultan ser equivalentes. Una, la de Weierstrass, basada en la teoría de las series de potencias. Otra, sustentada en la representación integral (la integral de Cauchy) de las funciones regulares y que se debe esencialmente a Riemann y Cauchy. En este capítulo nos vamos a ocupar del tratamiento de Weierstrass relegando el enfoque de Cauchy y Riemann para los dos siguientes capítulos.

### 3.1. Preliminares

**Definición 3.1.** Sea  $D$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f_n : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una sucesión de funciones.

- a) La sucesión  $f_n$  converge uniformemente a una función  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon$  que sólo depende de  $\varepsilon$  tal que  $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$  para  $n \geq n_\varepsilon$  y todo  $z \in D$ .
- b)  $f_n$  satisface la condición de Cauchy uniformemente en  $D$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon$  que sólo depende de  $\varepsilon$  tal que  $|f_n(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon$  para  $n, m \geq n_\varepsilon$  y todo  $z \in D$ .

**Proposición 3.2.** Una sucesión  $f_n : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  converge uniformemente en  $D$  si y sólo si satisface la condición de Cauchy uniformemente en  $D$ .

**Proposición 3.3.** Sea  $f_n$  una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función  $f$  en  $D$ . Si todas las  $f_n$  son continuas en  $z_0 \in D$  entonces  $f$  es continua en  $z_0$ . En particular, si todas las  $f_n \in C(D, \mathbb{C})$  entonces  $f \in C(D, \mathbb{C})$ .

*Ejercicio 3.1.* Sean  $D \subset \mathbb{C}$  un abierto,  $z_0 \in D$ ,  $f_n : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  una sucesión de funciones que converge uniformemente en  $D \setminus \{z_0\}$  a una función  $f$ . Supongamos

además que para cada  $n$  existe:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_n(z) = l_n.$$

Entonces:

- a) Existe  $l = \lim l_n$ .  
 b) Existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  y además:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l.$$

En otras palabras, el paso al límite cuando  $z \rightarrow z_0$  permuta con el paso al límite en la sucesión de funciones:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \{ \lim f_n \} = \lim \{ \lim_{z \rightarrow z_0} f_n \}.$$

El siguiente resultado es clave para los objetivos del capítulo.

**Teorema 3.4** (Teorema M de Weierstrass). *Sea  $f_n \in C(D, \mathbb{C})$  una sucesión de funciones tales que  $|f_n(z)| \leq M_n$  para  $z \in D$  donde la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  es convergente. Entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente en  $D$  y, por consiguiente, la función*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

es continua en  $D$ .

*Ejercicio 3.2. Probar que:*

- a)  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$  es continua en  $|z| < 1$ .  
 b)  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z}$  es continua en  $\{\Re z \geq 0\}$ .

Recapitulamos las definiciones de límite superior e inferior.

**Definición 3.5.** *Si  $a_n$  es una sucesión de números reales los límites superior e inferior  $\overline{\lim} a_n$ ,  $\underline{\lim} a_n$  se definen como:*

- a)  $\overline{\lim} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{ \sup_{k \geq n} a_k \}$ .  
 b)  $\underline{\lim} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{ \inf_{k \geq n} a_k \}$ .

Siempre existen los límites superior o inferior de una sucesión, aunque posiblemente puedan valer  $\infty$  o  $-\infty$ .

**Proposición 3.6.** *Sea  $L = \overline{\lim} a_n$ . Entonces:*

- a)  $-\infty < L < \infty$  si y sólo si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon$  tal que  $a_n < L + \varepsilon$  para todo  $n \geq n_\varepsilon$  mientras existen infinitos  $n$  tales que  $a_n > L - \varepsilon$ .  
 b)  $L = \infty$  si y sólo si para cada  $M$  existen infinitos  $n$  tales que  $a_n > M$ .

c)  $L = -\infty$  si y sólo si para cada  $M$  existe  $n_M$  tal que  $a_n < M$  para todo  $n \geq n_M$ .

*Observación 3.1.* Se dice que  $l$  es un valor de aglomeración de  $a_n$  si es el límite de alguna subsucesión suya  $a_{n'}$ . La propiedad que sigue relaciona los límites superiores con los valores de aglomeración. Nótese que  $\underline{\lim} a_n$  y  $\overline{\lim} a_n$  son valores de aglomeración de la sucesión.

**Proposición 3.7.** *Existen subsucesiones  $a_{n'}$ ,  $a_{n''}$  de una sucesión  $a_n$  tales que:*

$$\lim a_{n'} = \underline{\lim} a_n \quad \lim a_{n''} = \overline{\lim} a_n.$$

Más aún, si  $a_{n''}$  es cualquier subsucesión convergente de  $a_n$  entonces se tiene:

$$\underline{\lim} a_n \leq \lim a_{n''} \leq \overline{\lim} a_n.$$

Como es natural, la sucesión  $a_n$  converge a  $l$  si y sólo si:

$$\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n,$$

siendo  $l$  el valor común de tales límites.

## 3.2. Series de potencias

**Definición 3.8.** Una serie (formal) de potencias<sup>1</sup> de  $z - a$  se define como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

donde  $a_n, a \in \mathbb{C}$ . Por simplicidad tomamos  $a = 0$  en lo que sigue.  $C[[z]]$  designa el conjunto de las series (formales) de potencias de  $z$  ( $\mathbb{C}[z]$  designa los polinomios complejos en  $z$ ) en el que se definen las operaciones:

a) Suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

b) Producto por un escalar  $c \in \mathbb{C}$ :

$$c \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n := \sum_{n=0}^{\infty} (c a_n) z^n.$$

c) Producto (de Cauchy):

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

<sup>1</sup>La serie de potencias puede también definirse como una serie funcional.

Es un ejercicio sencillo probar que  $\mathbb{C}[[z]]$  es una álgebra conmutativa con elemento unidad y sin divisores de cero.

Nos ocupamos ahora del problema de la convergencia de las series de potencias de  $z - a$ . Es obvia la convergencia a  $a_0$  de la serie en  $z = a$ .

**Proposición 3.9.** *Una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$  o bien converge solamente en  $z = a$ , o bien converge para todo  $z \in \mathbb{C}$ , o bien existe  $\rho > 0$  tal que la serie converge en  $z$  si  $|z - a| < \rho$  y diverge si  $|z - a| > \rho$ . Más aún, en los dos últimos casos la serie converge absolutamente en  $\mathbb{C}$  (respectivamente en  $D(a, \rho)$ ) incluso uniformemente en cada compacto  $K \subset \mathbb{C}$  (respectivamente,  $K \subset D(a, \rho)$ ).*

*Demostración.* Supongamos que la serie converge en  $z_0 \neq a$  y diverge en algún  $z_1 \in \mathbb{C}$  resulta entonces que

$$|a_n||z_0 - a|^n \leq M,$$

para todo  $n$ . Se tiene entonces que

$$|a_n||z - a|^n \leq M \left( \frac{|z - a|}{|z_0 - a|} \right)^n$$

y la serie converge absolutamente para todo  $z$  tal que  $|z - a| < |z_0 - a|$ . Resulta así que:

$$\rho = \sup\{|z - a| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n \text{ converge}\},$$

cumple  $|z_0 - a| \leq \rho \leq |z_1 - a|$  y la serie diverge para  $|z - a| > \rho$ .  $\square$

La proposición dice que el conjunto de convergencia de una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$  cuando no es trivial (es decir  $\{a\}$ ) o todo el plano complejo  $\mathbb{C}$  consiste en un disco abierto  $D(a, \rho)$  junto con algunos puntos (quizás todos o quizás ninguno) de la circunferencia  $|z - a| = \rho$ .

**Definición 3.10.** *El radio de convergencia  $0 \leq \rho \leq \infty$  de una serie de potencias se define como el número  $\rho = 0$  si sólo converge en  $z = a$ ,  $\rho = \infty$  si converge para todo  $z \in \mathbb{C}$  o finalmente, el valor  $\rho$  de la Proposición 3.9.*

*Observación 3.2.* Se desprende de la proposición precedente que si  $\rho > 0$  la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$  define una función continua en el círculo  $D(a, \rho)$ .

*Ejemplos 3.3.*

- El radio de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  es  $\rho = 1$ .
- El radio de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  es  $\rho = \infty$ .
- El radio de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$  es  $\rho = 0$ .

La matemática nos obsequia en algunos ocasiones con resultados “redondos” y el que sigue es sin duda uno de ellos. Se recoge originalmente a la tesis de J. Hadamard (1865-1963).

**Teorema 3.11** (Hadamard, 1892). *El radio de convergencia  $0 \leq \rho \leq \infty$  de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$  viene dado por la expresión:*

$$\rho = \frac{1}{\{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}\}}. \quad (3.1)$$

*Observación 3.4.* Como la expresión (3.1) se da en términos del límite superior, no se requiere ninguna condición extra sobre los coeficientes  $a_n$  de la serie.

*Demostración del Teorema de Hadamard.* Asumimos para abreviar que  $a = 0$ . Ponemos  $L = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$  y suponemos que  $0 \leq L < \infty$ . Probamos que la serie converge absolutamente si  $\frac{1}{|z|} > L$ . De la definición de límite superior existen  $\theta > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{|z|} \quad n \geq n_0.$$

Por tanto

$$|a_n||z|^n < \left(\frac{|z|}{\theta}\right)^n \quad n \geq n_0,$$

y la serie converge absolutamente. Luego si  $L = 0$ ,  $\rho = \infty$  y si  $L < \infty$ ,  $\frac{1}{L} \leq \rho$  ( $\rho$  el radio de convergencia).

Suponemos ahora  $0 < L \leq \infty$  y demostramos que la serie diverge si  $\frac{1}{|z|} < L$ . En efecto, de la definición de límite superior se sigue que

$$\frac{1}{|z|} < \sqrt[n]{|a_n|},$$

para infinitos  $n \in \mathbb{N}$ . Esto dice por ejemplo que  $\overline{\lim} |a_n||z|^n \geq 1$  y la serie no puede converger. Por tanto, diverge para todo  $z \neq 0$  si  $L = \infty$  o diverge para  $|z| > \frac{1}{L}$  si  $L$  es finito. En el primer caso  $\rho = 0$ , en el segundo  $\rho \leq \frac{1}{L}$ . La prueba ha terminado.  $\square$

*Ejemplo 3.5.* Supongamos  $\lambda \in \mathbb{C}$ . La serie binomial se define como:

$$f_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} z^n$$

donde

$$\binom{\lambda}{n} := \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}, \quad \binom{\lambda}{0} := 1.$$

Fue introducida por Newton (coincide de hecho con el valor  $(1+z)^\lambda$  cuando  $\lambda \in \mathbb{N}$ ) y estudiada en detalle por Abel. Se demuestra –usando el Ejercicio 3 (v. también el Ejercicio 15)– que tiene radio de convergencia la unidad.

Puede probarse que

$$f_{\lambda_1+\lambda_2}(z) = f_{\lambda_1}(z)f_{\lambda_2}(z).$$

Véase la solución al Ejercicio 15.

La siguiente propiedad afirma que la serie de potencias obtenida formalmente tras derivar  $k$  veces una serie dada, tiene el mismo radio que la original.

**Proposición 3.12.** *Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$  una serie de potencias con radio de convergencia  $\rho$ . Entonces para cada  $k \in \mathbb{N}$  la serie:*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-a)^{n-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+k)!}{m!} a_{m+k} (z-a)^m$$

*tiene radio de convergencia  $\rho$ .*

**Proposición 3.13.** *Sean  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  series complejas absolutamente convergentes y definamos*

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

*Entonces la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  converge absolutamente y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

**Teorema 3.14.** *Sean  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$  series de potencias con radios positivos  $\rho_1, \rho_2$ . Entonces las series suma  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-a)^n$  y producto  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  tienen radio de convergencia  $\rho_s$  y  $\rho_p$ , respectivamente, mayor o igual que  $\min\{\rho_1, \rho_2\}$  satisfaciéndose las igualdades:*

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \right) + \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-a)^n$$

$$|z-a| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$$

y

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad |z-a| < \min\{\rho_1, \rho_2\}.$$

*Observaciones 3.6.*

a) Para  $|z| < \rho$  se puede calcular la potencia  $m$ -ésima de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  y el resultado es de nuevo otra serie de potencias. En efecto:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a^{(m)}_n z^n \quad (3.2)$$

donde

$$a_n^{(m)} = \sum_{j_1 + \dots + j_m = n} a_{j_1} \dots a_{j_m}. \quad (3.3)$$

b) Un caso de interés se tiene cuando  $a_0 = 0$ . La serie “potencia  $m$ -ésima” comienza a partir del exponente  $m$  (los primeros  $m-1$  términos son cero) y además en la fórmula (3.3) sólo intervienen coeficientes  $a_j$  con  $j \leq n-1$  cuando  $m \geq 2$ .

*Ejercicio 3.3.* Pruébese que el coeficiente  $a_n^{(m)}$  de la potencia  $m$ -ésima se puede escribir como:

$$a_n^{(m)} = \sum \frac{m!}{\alpha!} a_0^{\alpha_0} \dots a_n^{\alpha_n},$$

en donde  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  con los  $\alpha_j \geq 0$  enteros,  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$  y la suma está extendida a todos los  $\alpha$  que cumplen:

$$|\alpha| := \alpha_0 + \dots + \alpha_n = m,$$

y además:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n.$$

Indicación: defínase  $\alpha_j$  en la fórmula (3.3) como el número de veces que aparece  $a_j$  en un producto dado  $a_{j_1} \dots a_{j_m}$  con  $j_1 + \dots + j_m = n$ .

### 3.3. Funciones analíticas

Las funciones analíticas constituían la única clase de funciones de curso legal durante el siglo XIX. Dominaron el cálculo antes de lo que hoy conocemos como Análisis Real, cuyo punto de partida fue la introducción de la integral de Lebesgue a comienzos del siglo XX. Una evidencia explícita del elevado estatus del que gozaban en la matemática de entonces es el papel preponderante que desempeñan tales funciones, en la sección de análisis de la célebre lista de problemas propuesta por David Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1900 ([1]).

**Definición 3.15.** Sea  $G \subset \mathbb{C}$  un abierto. Se dice que una función  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica si para todo  $z_0 \in G$  existen  $\rho > 0$  y una sucesión compleja  $\{a_n\}$ , que dependen de  $z_0$ , tales que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad |z - z_0| < \rho.$$

*Observación 3.7.* Está implícito en la definición que  $f$  se representa en el entorno de cada punto por una serie de potencias con radio de convergencia positivo, por tanto son funciones continuas. Comprobaremos en el siguiente capítulo que de hecho son funciones infinitamente derivables.

*Ejemplos 3.8.*

- 1) Un polinomio  $p(z) = a_0z^n + \dots + a_n$  es analítico en  $\mathbb{C}$ . En efecto, dado  $a \in \mathbb{C}$  se puede escribir –según se vio– como  $p(z) = b_0 + b_1(z-a) + \dots + b_n(z-a)^n$ .
- 2) La función  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . En efecto, para  $a \in \mathbb{C}$  dado:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a} \frac{1}{\left\{1 - \frac{z-a}{1-a}\right\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-a)^{n+1}} (z-a)^n.$$

Nótese que el radio de convergencia de ésta última serie es  $|a-1|$ .

- 3) Funciones racionales. Si

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

es racional y  $q(z)$  tiene raíces  $a_1, \dots, a_l$  la función  $f$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$ . A tal fin nótese que

$$f(z) = q_1(z) + \frac{A}{(z-a_1)} + \dots + \frac{B}{(z-a_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{C}{(z-a_l)^{\alpha_l}},$$

donde las  $\alpha_j$  son las multiplicidades de las raíces. Para desarrollar en serie de potencias de  $(z-a)$  donde  $a \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$  basta usar la idea del apartado

- 2). De hecho las funciones  $\frac{1}{(z-a)^{\alpha_i}}$  son analíticas porque son potencias de funciones analíticas.

La siguiente proposición establece que las propias series de potencias con radio de convergencia positivo definen funciones analíticas en su disco (círculo) de convergencia. A la luz de los resultados de los Capítulos IV y V demostraremos en su momento que esto también es consecuencia de la derivabilidad de las series de potencias. La que sigue es, no obstante, una prueba directa que *evita dicha derivabilidad*.

**Teorema 3.16.** *Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$  una serie de potencias con radio de convergencia  $\rho$ . Entonces, para cada  $z_0 \in D(a, \rho)$  la función:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

se puede representar en la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

con

$$b_n = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} a_m (z_0-a)^{m-n} = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m (z_0-a)^{m-n}$$

siendo la serie convergente en cada  $z$  cumpliendo  $|z-z_0| < \rho - |z_0-a|$ .

La prueba emplea algunos resultados básicos de series dobles.

Sea  $a_{nm}$  una sucesión doble de números *complejos*. Se dice ([3]) que la serie doble:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}$$

es convergente<sup>2</sup> y tiene suma  $s \in \mathbb{C}$  si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon$  tal que para  $\min\{M, N\} \geq n_\varepsilon$ :

$$\left| \sum_{0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M} a_{nm} - s \right| < \varepsilon.$$

Puede probarse que si  $a_{nm}$  es una sucesión doble de números *reales no negativos*  $b_{nm}$ , la serie doble:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm},$$

es convergente y tiene suma  $s$  si y sólo si

$$s = \sup \sum_{(n,m) \in F} b_{nm}$$

donde  $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  denota un conjunto finito y el supremo se extiende a todas las partes finitas  $F$  de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Asimismo, un camino útil para establecer la convergencia de series dobles de términos no negativos es el de las series “iteradas”

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} \right\} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b_{nm} \right\}.$$

Para series dobles de términos no negativos la convergencia equivale a la de las iteradas y de hecho se tiene siempre la igualdad (de valor  $+\infty$  en caso de divergencia de la serie)

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b_{nm} \right\}.$$

Finalmente, la suma  $s$  de una serie doble de términos no negativos  $\sum_{n,m=0}^{\infty} b_{nm}$  se puede obtener como el límite de sumas finitas de términos con tal que el número total de términos sumados acabe abarcando todo  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . En términos más precisos:

$$s = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(n,m) \in F_N} b_{nm},$$

donde  $F_N$  es cualquier sucesión de partes finitas de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  con la propiedad  $F_N \subset F_{N+1}$  y  $\cup_{N=0}^{\infty} F_N = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Se omiten los detalles por simplicidad.

<sup>2</sup>Podía haberse empleado la noción más restrictiva de familia sumable que ofrece la ventaja de que la convergencia equivale a la convergencia absoluta. Véanse detalles en [6].

Como en el caso de series simples una serie doble absolutamente convergente es también convergente y

$$\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} \right| \leq \sum_{n,m=0}^{\infty} |a_{nm}|.$$

La prueba del siguiente resultado se omite por brevedad (cf. [3]).

**Teorema 3.17.** *Sea  $a_{nm}$  una sucesión doble de números complejos y supongamos que la serie*

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}$$

*converge absolutamente.*

*Entonces:*

a) *Para  $n_0, m_0$  arbitrarios las series parciales:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm_0} \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_{n_0m}$$

*convergen absolutamente.*

b) *Las series “iteradas”*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \right\} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} \right\}$$

*convergen absolutamente.*

c) *Se tienen las igualdades:*

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} \right\}.$$

*Demostración del Teorema 3.16.* Dado  $z_0$  consideramos los  $z$  tales que:

$$|z - z_0| < \rho - |z_0 - a|,$$

$\rho$  el radio de convergencia de la serie. Como  $|z - z_0| + |z_0 - a| < \rho$  se tiene que la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z - z_0| + |z_0 - a|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} |a_n| |z - z_0|^m |z_0 - a|^{n-m} < \infty.$$

Esto quiere decir que la serie doble:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a_n (z - z_0)^m (z_0 - a)^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

es absolutamente convergente. El Teorema 3.17 autoriza a cambiar el orden de sumación para tener:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a_n (z - z_0)^m (z_0 - a)^{n-m} = \\ & \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (z_0 - a)^{n-m} \right) (z - z_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_0)^m. \end{aligned}$$

□

Para estimar el tamaño del conjunto de las funciones analíticas en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$  nada mejor que disponer de reglas que nos permitan generar funciones analíticas a partir de funciones analíticas conocidas. La siguiente propiedad es elemental.

**Proposición 3.18.** *Sean  $f, g$  analíticas en  $G \subset \mathbb{C}$  abierto. Entonces  $f + g$  y  $fg$  son analíticas en  $G$ .*

Dentro de la filosofía de fabricar nuevas funciones analíticas a partir de funciones conocidas el resultado que sigue también es natural. Su demostración es más delicada.

**Proposición 3.19.** *Si  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G, \Omega$  abiertos son analíticas y  $f(G) \subset \Omega$  entonces  $g \circ f$  es analítica en  $G$ .*

*Demostración.* Suponemos que  $z_0 \in G$ ,  $f(z_0) = a_0 \in \Omega$ . Hemos de probar que la composición  $g \circ f$  se puede representar en la forma:

$$g \circ f(z) = g(f(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - z_0)^m,$$

siendo la serie convergente para  $|z - z_0| < r$ . Se sabe que

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mientras  $g(w) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (w - w_0)^m$  con  $w_0 = a_0$ , en los respectivos círculos de convergencia. Si  $|f(z) - a_0| = |f(z) - w_0| < \rho_g$  ( $\rho_g$  el radio de la serie de  $g$ ) podemos escribir:

$$g(f(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (f(z) - w_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right)^m.$$

El –importante– lema que sigue nos garantiza la posibilidad de reorganizar la serie para –preservando la convergencia– sacar factor común las potencias de  $z - z_0$  y escribir, sumando en dichas potencias:

$$g(f(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - z_0)^m.$$

□

La proposición se sigue a su vez de la siguiente.

**Lema 3.20.** Sean  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  series de potencias con radio de convergencia positivo de forma que

$$a_0 = 0.$$

Entonces, la serie substitución:

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

tiene radio de convergencia  $\rho > 0$ . Además:

$$g(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

donde  $f$  y  $g$  son las funciones representadas por las series  $\sum a_n z^n$  y  $\sum b_n z^n$ , respectivamente.

*Demostración.* Si  $\rho_a$  y  $\rho_b$  designan los radios de convergencia de las series  $\sum a_n z^n$  y  $\sum b_n z^n$  se tiene que

$$g(f(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (f(z))^m = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left( \sum_{n \geq 1} a_n z^n \right)^m$$

está bien definida con tal que  $|f(z)| < \rho_b$ . Dicha serie es de hecho la serie iterada:

$$b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left( \sum_{n \geq 1} a_n z^n \right)^m = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(m)} z^n \right\},$$

donde  $a_n^{(1)} = a_n$  y los  $a_n^{(m)} = a_n^{(m)}((a_i)_{1 \leq i \leq n-1})$  son, para  $m > 2$ , polinomios homogéneos de grado  $m$  y coeficientes enteros positivos en los  $a_i$  con  $1 \leq i \leq n-1$ . La cuestión fundamental es que podemos cambiar el orden de sumación en la última serie para tener:

$$b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(m)} z^n \right\} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^n b_m a_n^{(m)} \right\} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

donde

$$c_0 = b_0 \quad c_1 = b_1 a_1$$

y

$$c_n = \sum_{m=1}^n b_m a_n^{(m)} = b_1 a_n + P_n(b_2, \dots, b_n; a_1, \dots, a_{n-1})$$

donde  $P_n$  es un polinomio lineal en los  $b_k$  ( $2 \leq k \leq n$ ), de grado  $n$  en los  $a_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ), cuyos coeficientes son *enteros positivos*.

Para justificar el cambio de orden nos basta con verificar que la serie doble:

$$b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(m)} z^n \right\} \quad (3.4)$$

es absolutamente convergente si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |z|^n < \rho_b.$$

En efecto, en tal caso, la serie doble de términos positivos:

$$b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} |b_m| \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |z|^n \right)^m = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} |b_m| \sum_{n=m}^{\infty} \tilde{a}_n^{(m)} |z|^n$$

con  $\tilde{a}_n^{(m)} = a_n^{(m)} (|a_i|_{1 \leq i \leq n-1})$ , converge y mayor a la serie (3.4) pues:

$$|b_m a_n^{(m)} z^n| \leq |b_m| \tilde{a}_n^{(m)} |z|^n.$$

Nótese que los coeficientes  $\tilde{a}_n^{(m)}$  son no negativos. Por tanto, hemos terminado.  $\square$

### 3.4. Funciones exponencial y logaritmo

**Definición 3.21.** Se define la función exponencial  $f(z) = e^z$  como la serie:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

La función exponencial se ha definido mediante una serie de potencias cuyo radio de convergencia es  $\rho = \infty$ . Llamaremos *enteras* a este tipo de funciones.

**Definición 3.22.** Se dice que una función compleja  $f$  es entera si

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$$

donde la serie converge en todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Proposición 3.23.** Se satisfacen las siguientes propiedades:

- 1)  $e^0 = 1$ .
- 2)  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ .
- 3)  $e^z \neq 0$  para todo  $z$ . Más aún  $e^{z-1} = e^{-z}$ .
- 4)  $e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$ .

La fórmula de Euler del Capítulo I está recogida en 4).

**Proposición 3.24.** *La función  $e^{iz}$  es periódica de periodo  $2\pi i$ . Más aún:*

$$e^{z'} = e^z,$$

si y sólo si  $z' = z + 2k\pi i$  para  $k \in \mathbb{Z}$ .

Nótese que  $e^z$  es la extensión compleja de la función exponencial real la cual, según sabemos, se representa mediante el desarrollo:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En el apéndice del Capítulo I se introdujeron asimismo las funciones reales  $y(x) = \operatorname{sen} x$  y  $y(x) = \operatorname{cos} x$  como las soluciones de la ecuación diferencial  $y'' + y = 0$  que satisfacen las condiciones  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  y  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ . Observamos que tales funciones se representan mediante los desarrollos en serie de potencias de  $x$ :

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \operatorname{cos} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}.$$

La definición que sigue introduce las correspondientes funciones trigonométricas elementales, por el simple procedimiento de asignarle a  $x$  valores complejos.

**Definición 3.25.** *Se definen las funciones seno y coseno:*

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \operatorname{cos} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}.$$

**Proposición 3.26.** *Las funciones  $\operatorname{sen} z$  y  $\operatorname{cos} z$  son periódicas de periodo  $2\pi$ . Se tienen además las relaciones:*

$$e^{iz} = \operatorname{cos} z + i \operatorname{sen} z,$$

y

$$\operatorname{cos} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Se satisfacen la mayoría de las propiedades elementales de las funciones trigonométricas que se relegan a los problemas. Se sobrentienden asimismo las definiciones habituales de  $\operatorname{tag} z, \operatorname{sec} z$ , etc.

El que la función  $e^z$  sea periódica implica que admite múltiples maneras de ser invertida. Esto ya se observó en el caso de la inversa de  $z^n$ . De hecho, se da la misma situación en el caso de una variable real con las funciones trigonométricas (arcoseno, arcotangente, etc.). Las inversas de la función exponencial se denominan “funciones logaritmo” cuyo estudio –idéntico al de la función argumento– iniciamos ahora.

**Definición 3.27.** Se dice que  $w$  es un logaritmo de  $z$  si  $e^w = z$ .

Para  $z \neq 0$  dado todos los logaritmos de  $z$  son:

$$w = w_0 + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde  $w_0$  es un logaritmo particular. Específicamente, si  $z = |z|e^{i\theta}$  los logaritmos de  $z$  son  $w = \log |z| + i\theta + 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ahora bien, nos interesa el logaritmo como función de  $z$  y no como una mera "reata" de valores que dependen de  $z$ . Se trata entonces de invertir la función exponencial. Una consecuencia de nuestro estudio de la función argumento es la siguiente propiedad.

**Proposición 3.28.** Para cada  $\tau \in \mathbb{R}$  la aplicación  $f(z) = e^z$ :

$$f : \{\tau \leq \Im z < \tau + 2\pi\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

es biyectiva, con inversa:

$$f^{-1}(z) = \log |z| + i \arg_{\tau} z.$$

Más aún:

$$f^{-1} : \Omega_{\tau} = \mathbb{C} \setminus \{te^{i\tau} : t \geq 0\} \longrightarrow \{\tau < \Im z < \tau + 2\pi\},$$

es continua.

*Demostración.* Llamamos  $\mathcal{G} = \{\tau \leq \Im z < \tau + 2\pi\}$  y  $f$  es inyectiva pues:

$$e^{z'} = e^z \quad \Rightarrow \quad x = x' \quad \& \quad y' - y = 2k\pi,$$

con lo que  $y' = y$ . Para probar la sobreyectividad escribimos  $g(z) = \log |z| + i \arg_{\tau} z$ , cuyo dominio es  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $g(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \subset \mathcal{G}$  y

$$f(g(w)) = w.$$

De ahí mismo sale que  $f^{-1}(z) = g(z)$ . □

La función  $f^{-1}$  de la proposición se denomina:

$$\log_{\tau} z = \log |z| + i \arg_{\tau} z.$$

En particular, la elección de  $\mathcal{G}_0 = \{0 \leq \Im z < 2\pi\}$  en la proposición da lugar a la función:

$$\log z = \log |z| + i \arg z,$$

que es continua en  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \geq 0\}$ .

Se llama función *logaritmo principal* a la inversa de  $e^z$  cuando en la proposición se toma  $\mathcal{G}_{-\pi}^* = \{-\pi < \Im z \leq \pi\}$ . Se la representa por:

$$\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z,$$

y define una función continua en  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$ .

El logaritmo principal satisface las propiedades elementales:

$$\text{Log } z_1 z_2 = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 + 2k\pi i,$$

$$\text{Log } z^n = n \text{Log } z + 2k\pi i,$$

y

$$\text{Log } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Log } z.$$

Como en el caso real, se usa el logaritmo principal para introducir la función potencial de exponente complejo:

$$z^\lambda = e^{\lambda \text{Log } z},$$

así como la función exponencial,

$$a^z = e^{z \text{Log } a}.$$

Hemos encontrado inversas  $g$  de la función exponencial que son continuas en ciertos dominios  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Por ejemplo:  $g = \text{Log } z$  definida en  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\Re z \leq 0\}$ .

Resulta evidente que si el par  $(g, \Omega)$  define una inversa de la exponencial entonces la familia  $(g + 2k\pi i, \Omega)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , comprende infinitas inversas de la exponencial.

Se suelen usar los términos “hoja”, “rama” o “determinación” del logaritmo para referirse a todas estas funciones. Más generalmente se tiene la siguiente definición.

**Definición 3.29.** Sea  $G \subset \mathbb{C}$  un abierto y  $f \in C(G, \mathbb{C})$ . Se dice que  $(g, \Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un dominio y  $g \in C(\Omega, \mathbb{C})$ , es una rama de inversa de  $f$  o una determinación de  $f^{-1}$  si  $g(\Omega) \subset G$  y

$$f(g(z)) = z. \quad (3.5)$$

*Observación 3.9.* Se desprende de (3.5) que  $\Omega \subset f(G)$ . No es difícil comprobar que  $f : g(\Omega) \rightarrow \Omega$  es biyectiva, por tanto un homeomorfismo, de donde se tiene que  $g(\Omega)$  también es un dominio.

**Proposición 3.30.** Si  $(f, \Omega)$  es una determinación del logaritmo entonces todas las demás determinaciones posibles  $(h, \Omega)$  del logaritmo en  $\Omega$  son de la forma:

$$h(z) = f(z) + 2k\pi i,$$

para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . Por otra parte no existen determinaciones  $(f, \Omega)$  del logaritmo tales que  $\Omega$  contenga un círculo perforado  $\{z : 0 < |z| < r\}$ .

Una consecuencia inmediata es que todas las determinaciones (ramas)  $g$  del logaritmo en  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$  tienen la forma:

$$g_k(z) = \log |z| + i \text{Arg } z + 2k\pi i,$$

para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . Precisamente, llamamos logaritmo principal a la rama  $k = 0$ :

$$g_0(z) = \log |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Bajo la óptica de las ramas de inversa no está de más que caractericemos las determinaciones de la raíz  $n$ -ésima en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . En la sección de Ejercicios se justifica el por qué se suprime 0 de  $\Omega$ .

**Proposición 3.31.** *Si  $(f, \Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , es una rama de la raíz  $n$ -ésima entonces las otras ramas de la raíz  $n$ -ésima en  $\Omega$  tienen la forma:*

$$f_k(z) = e^{\frac{2k\pi}{n}i} f(z) \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

*Más aún ninguna de tales determinaciones es tal que  $0 \in \Omega$ .*

*Demostración.* Si  $(f, \Omega)$  y  $(g, \Omega)$  son determinaciones  $f(z)/g(z)$  es continua en  $\Omega \setminus \{0\}$  –que sigue siendo un dominio– y  $(f(z)/g(z))^n = 1$  en dicho dominio. En efecto,  $f(z)^n = z$  significa que  $f(z) \neq 0$  si  $z \neq 0$ .

En particular,  $f/g$  toma valores en el conjunto discreto  $\{1, \zeta, \dots, \zeta_{n-1}\}$  de las raíces  $n$ -ésimas de la unidad. Por tanto  $f/g$  es constante en  $\Omega \setminus \{0\}$ .

La última afirmación es consecuencia de que, por ejemplo, la función  $\sqrt[n]{z}$  no es continua en un tal círculo perforado.  $\square$

Continuamos ahora con un análisis de la función seno. La función seno real  $\operatorname{sen} x$  es biyectiva de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sobre su imagen  $[-1, 1]$ . Inspirándonos en ello comprobamos que  $\operatorname{sen} z$  es biyectiva en la región  $\mathcal{B}^*$  sobre su imagen  $\mathbb{C}$  donde

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \{z = -\frac{\pi}{2} + it : t \geq 0\} \cup \{z = \frac{\pi}{2} + it : t \leq 0\},$$

y

$$\mathcal{B} = \{-\frac{\pi}{2} < \Re z < \frac{\pi}{2}\}.$$

Asimismo,  $\operatorname{sen} z$  es biyectiva cuando la restringimos a  $\mathcal{B}$  sobre su imagen  $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{x^2 \geq 1\}$ .

Probamos las afirmaciones. Primero la inyectividad, si  $z, z' \in \mathcal{B}^*$ ,  $z \neq z'$  y  $\operatorname{sen} z' = \operatorname{sen} z$  entonces

$$e^{iz'} - e^{-iz'} = e^{iz} - e^{-iz},$$

Como  $|\Re z' - \Re z| \leq \frac{\pi}{2}$  resulta  $e^{iz'} \neq e^{iz}$  por tanto:

$$e^{i(z+z')} = -1,$$

de donde  $z + z' = \pi + 2k\pi$ . Si las partes reales son  $x, x'$  resulta que  $x + x' = \pm\pi$ . Al ser  $x \neq x' \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  estas identidades no son posibles. Luego  $z = z'$ .

Para demostrar la sobreyectividad escribimos:

$$\operatorname{sen} z = w,$$

para llegar a:

$$z = -i \operatorname{Log} \{iw \pm \sqrt{1-w^2}\},$$

donde –por razones que vemos más abajo– tomamos el signo + designando la expresión por  $g(w)$ . Resulta que  $g(w) \in \mathcal{B}^*$  para todo  $w \in \mathbb{C}$ . Justificado esto se concluye que  $\operatorname{sen} z$  es biyectiva en  $\mathcal{B}^*$  con inversa  $g(z)$  definida en  $\mathbb{C}$ .

En la comprobación de  $g(w) \in \mathcal{B}^*$  primero suponemos que  $-1 \leq w \leq 1$  con lo que

$$g(w) = \operatorname{Arg} (\sqrt{1-w^2} + iw) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Si hubiéramos elegido el signo – más arriba no habríamos obtenido este resultado. Por otro lado si  $|w| > 1$ ,  $w$  todavía real, resulta:

$$g(w) = \operatorname{signo}(w) \frac{\pi}{2} + i \log |w + \sqrt{w^2 - 1}|,$$

y  $\log |w + \sqrt{w^2 - 1}|$  recorre  $(0, \infty)$  (respectivamente,  $(-\infty, 0)$ ) si  $w > 1$  ( $w < -1$ ).

Finalmente, consideramos  $w = x + iy$  con  $y \neq 0$  y probamos que

$$\Re\{iw \pm \sqrt{1-w^2}\} = -y + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|1-w^2| + (1-x^2+y^2)} > 0.$$

Esto equivale a:

$$\begin{aligned} |1-w^2| + (1-x^2+y^2) &> 2y^2, \\ (1-x^2+y^2)^2 + 4x^2y^2 &> (1-x^2-y^2)^2, \\ (1-x^2+y^2)^2 - (1-x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 &> 0, \\ 4(1-x^2)y^2 + 4x^2y^2 &> 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4y^2 > 0, \end{aligned}$$

y la comprobación  $g(\mathbb{C}) \subset \mathcal{B}^*$  queda terminada.

**Definición 3.32.** La función arcoseno principal se define como:

$$\operatorname{Arcsen} z = -i \operatorname{Log} \{iz + \sqrt{1-z^2}\}.$$

Es continua en  $\mathbb{C} \setminus \{w^2 \geq 1\}$ .

*Observaciones 3.10.*

a) Las funciones

$$f_k(z) = \operatorname{Arcsen} z + 2k\pi,$$

toman valores en  $\mathcal{B}^* + 2k\pi$  e invierten al seno (son ramas de inversa del seno cuando éste se observa con dominio  $\mathbb{C}$ ).

b) Se sabe que

$$\operatorname{sen}(\pi - z) = \operatorname{sen} z,$$

por tanto la función

$$g(z) = \pi - \operatorname{Arcsen} z,$$

que toma valores en  $\mathcal{B}^* + \pi$  también invierte a la función seno. Lo mismo sucede con las funciones

$$g_k(z) = \pi - \operatorname{Arcsen} z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Ejercicio 3.4. Analizar las transformadas de las curvas coordenadas:*

$$\Gamma_1 = \{\Re z = x_0\} \cap \overline{\mathcal{B}} \quad \Gamma_2 = \{\Im z = y_0\} \cap \overline{\mathcal{B}},$$

por medio de la función seno, usando para ello la representación:

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y.$$

*Pruébese que  $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ .*

*Ejercicio 3.5. Pruébense las siguientes propiedades:*

- a)  $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ ,  $\operatorname{sen} z' = -\operatorname{sen} z$  donde  $z' = 2k\pi - z$  para un  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 b)  $\operatorname{sen}(\pi + z) = -\operatorname{sen} z$ .

*Conclúyase que  $\operatorname{sen} z$  no puede ser inyectiva en ninguna banda  $\mathcal{B} = \{\alpha < \Re z < \beta\}$  cuyo ancho  $\beta - \alpha > \pi$ .*

Procedemos ahora con la función  $\operatorname{tag} z$  siguiendo métodos similares a los del seno, primero observando la función real en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Se concluye que la función tangente también es biyectiva de  $\mathcal{B}^{**} = \mathcal{B} \cup \{z = -\frac{\pi}{2} + it : t < 0\} \cup \{z = \frac{\pi}{2} + it : t > 0\}$  con valores en  $\Omega \setminus \{\pm i\}$  y su restricción a  $\mathcal{B}$  lo es sobre su conjunto imagen  $\mathbb{C} \setminus \{i(-\infty, -1) \cup i(1, \infty)\}$ .

En primer lugar

$$\operatorname{tag} z = i \frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}},$$

en donde como  $e^{2iz} \neq 1, \infty$  vemos que la imagen de  $\operatorname{tag} z$  excluye los valores  $\pm i$ . Como composición de aplicaciones inyectivas,  $\operatorname{tag} z$  es inyectiva en  $\mathcal{B}$  mientras

$$\operatorname{tag} z = i \frac{1 + u}{1 - u} \quad z = \frac{\pi}{2} + ti \quad u = e^{-2t},$$

con lo que  $\operatorname{tag} z$  recorre  $i(1, \infty)$  cuando  $z = \frac{\pi}{2} + ti$  con  $t > 0$ .

Para estudiar la sobreyectividad escribimos  $\operatorname{tag} z = w$  para concluir:

$$z = g(w) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left( \frac{1 + iw}{1 - iw} \right).$$

Es muy sencillo ver que  $g(\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}) \subset \mathcal{B}^{**}$  lo que concluye la comprobación de biyectividad.

### 3.5. Ejercicios

1. Estudiar la convergencia de las siguientes funciones en los dominios indicados:

a)  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k$  en  $\{|z| < 1\}$ .

- b  $f(z) = \sum \frac{1}{k^2 + z}$  en  $\{\Re z > 0\}$ .
2. Sea  $f_n : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una sucesión de funciones uniformemente continuas en  $D$ , un abierto de  $\mathbb{C}$ ,  $f = \lim f_n$  uniformemente en  $D$ . Probar que  $f$  es también uniformemente continua en  $D$ . Supóngase además que las  $f_n$  son Lipschitzianas de constante  $L_n$  con  $\sup L_n < \infty$ . Demostrar que  $f$  es Lipschitz en  $D$ . Estudiar qué sucede si se suprime la condición sobre las  $L_n$ .
3. Sea  $a_n$  una sucesión con  $\lim a_n = l$ . Probar que  $\lim \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = l$ . ¿Qué sucede si  $l = \pm\infty$ ? Aprovechese el resultado para probar que si  $a_n$  es una sucesión de términos positivos con:

$$\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = l,$$

entonces  $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$ .

4. Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  una serie de potencias para la que existe:

$$\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R.$$

Calcúlese su radio de convergencia.

5. Calcular los valores de aglomeración de las sucesiones: a)  $z_n = n^{-1} + (-1)^n$ , b)  $z_n = 2^{-n} + (-1)^n + i^n$ , c)  $z_n = [2 + \cos(n\pi)]e^{2n\pi i/5}$ , d)  $z_n = \operatorname{sen}(n\pi/2) + i \cos(n\pi/6)$ , e)  $z_n = n \operatorname{sen}(n\pi/2) + i \cos(n\pi/6)$ .
6. Probar que  $\underline{\lim} a_n, \overline{\lim} a_n$  son valores de aglomeración de  $a_n$ . Comprobar asimismo que la convergencia de  $a$  equivale a la igualdad de tales límites (N. B. estamos incluyendo en “convergencia” los casos  $a_n \rightarrow \pm\infty$ ).
7. Sean  $a_n, b_n$  son sucesiones tales que  $\lim a_n = a > 0$ . Probar que  $\underline{\lim} a_n b_n = a \underline{\lim} b_n, \overline{\lim} a_n b_n = a \overline{\lim} b_n$ .
8. Sea  $z = e^{i\theta}$  donde  $\frac{\theta}{\pi}$  es racional. Estúdiense los valores de aglomeración de  $z^n$ .
9. Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  una serie de potencias de radio  $r$ . Demostrar que para todo  $k \in \mathbb{N}$  la serie  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{n-k}$  también tiene radio de convergencia  $r$ .

10. Hallar el radio de convergencia de las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

11. Se sabe que el radio de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  es  $r > 0$ . Hallar el radio de convergencia de las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^p a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n.$$

12. Hallar el radio de convergencia de cada una de las siguientes series:

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n, & a \in \mathbb{C} \\ b) \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n, & a \in \mathbb{C}, \end{array} \quad \begin{array}{l} c) \sum_{n=0}^{\infty} k^n z^n, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ d) \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}. \end{array}$$

13. Usar la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  y el producto de series para calcular la suma de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$

14. Demostrar que el radio de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)},$$

es 1, discutiendo la convergencia de la serie en los valores  $z = 1, -1, i$ .

15. Para  $\lambda \in \mathbb{C}$  se introduce la serie binomial:

$$1 + \lambda z + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} z^n + \dots$$

Pruébese que tiene radio de convergencia 1. Llamamos  $f_\lambda(z)$  a la función definida por la serie en  $|z| < 1$ .

- a) Determinar  $f_\lambda$  para  $\lambda \in \mathbb{N}$ .  
 b) Calcular  $f_{-1}(z)$ .  
 c) Calcular  $f_{-n}(z)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
 d) Probar que  $f_{-n}(z) = (1+z)^{-n}$ . A tal fin compruébese que:

$$(1+z)^n f_{-n}(z) = 1,$$

para todo  $z \neq -1$ .

16. Desarrollar  $\sinh z$ ,  $\cosh z$  en serie de potencias de  $z$ .

17. Compruébese que:

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

18. Usando la definición de las funciones  $\operatorname{sen} z$ ,  $\operatorname{cos} z$  pruébense las relaciones clásicas:

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1, \quad \cos(-z) = \cos(z), \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \operatorname{sen} z, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z,$$

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w, \quad \operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w,$$

$$1 + \operatorname{tag}^2 z = \sec^2 z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z.$$

19. Demostrar que los ceros de las funciones  $\operatorname{cos} z$ ,  $\operatorname{sen} z$  coinciden con los de sus restricciones al eje real.
20. Determinése el mayor dominio  $G$  donde  $\operatorname{Log}(z^3 + 1)$  es continua.
21. Probar que la restricción  $g(z)$  de  $\operatorname{tag} z$  a  $G = \{-\frac{\pi}{2} < \Re z \leq \frac{\pi}{2}, z \neq \frac{\pi}{2}\}$  es biyectiva sobre su imagen  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ . Demostrar que:

$$f(z) := g^{-1}(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left( \frac{1+iz}{1-iz} \right).$$

Pruébese que dicha función es continua en  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{ti : t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$ . Se denomina al par  $(f, \Omega)$  la “rama” principal de la función arcotangente  $f(z) = \operatorname{Arctag} z$ .

22. Demostrar que la función:

$$f(z) = -i \operatorname{Log}(\sqrt{1-z^2} + iz),$$

es continua en  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \leq -1, z \geq 1\}$  y cumple  $\operatorname{sen}(f(z)) = z$ . Se la conoce como la “rama” principal de la función arcoseno:  $f(z) = \operatorname{Arcsen} z$ .

23. Determinar una función continua  $g$  definida en  $G := \mathbb{C} \setminus \{x \leq -1, x \geq 1\}$  tal que  $\operatorname{cos}(g(z)) = z$  en  $G$ . *Indicación.* Úsese la función  $\operatorname{Arcsen} z$ .
24. Dada  $f(z) = \sec z$ , pruébese que  $g(z) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsen} \left( \frac{1}{z} \right)$  es continua en  $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  y que  $\sec(g(z)) = z$  para todo  $z \in G$ .
25. Pruébese que todo polinomio  $p(z)$  define una función entera. Hallar su desarrollo en serie de potencias de  $z - z_0$ .
26. Demuéstrese que los polinomios complejos son sobreyectivos. ¿Y las funciones racionales? ¿y las enteras?
27. Estúdiese la sobreyectividad de las funciones seno y coseno (véase el Ejercicio 22).
28. Pruébese que si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$  en  $|z| < r$  entonces  $a_n = 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

29. Sea  $f$  la suma en  $D(a, r)$  de la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$  y  $\{z_k\}$  una sucesión en  $D(a, r) \setminus \{a\}$  tal que  $f(z_k) = 0$  y  $z_k \rightarrow a$ . Demuéstrase que  $f = 0$  en  $D(a, r)$ .

*Indicación.* Pruébese que  $a_n = 0$  para todo  $n$ .

30. Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$  una serie de potencias convergente en  $D(a, r)$ ,  $\{z_k\}$  una sucesión en  $D(a, r)$  tal que  $z_k \rightarrow b \in D(a, r)$ ,  $z_k \neq b$  para todo  $k$  y tal que

$$f(z_k) = 0,$$

para todo  $k$  donde  $f$  es la suma de la serie en  $D(a, r)$ . Pruébese que  $f = 0$  en  $D(a, r)$ .

*Indicación.* Usar el Ejercicio 29 en combinación con el Teorema 3.16.

31. Calcular el desarrollo en serie de potencias de  $z - z_0$  de la función:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con  $z_0 \neq -d/c$ ,  $c \neq 0$ .

32. Usando la descomposición en fracciones simples demuéstrase que toda función racional  $f(z)$  es analítica en su dominio de definición  $G$ . Dado un  $z_0 \in G$  ¿qué mide el radio de convergencia de su desarrollo en serie de potencias de  $z - z_0$ ?

*Indicación.* Puede ser útil el problema 15

33. Desarrollar en serie de potencias las funciones:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad g(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, \quad h(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3},$$

en cada uno de los puntos  $a$  de sus dominios de definición (que son el mismo).

34. Supóngase que  $f(z)$  es analítica en un dominio  $G$ . Definiendo  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  en el dominio  $z \in \bar{G} := \{z : \bar{z} \in G\}$  demostrar que  $g$  también es analítica.

35. Supongamos que  $f(z)$  es analítica y no constante en un dominio  $G$ . Demostrar que  $\overline{f(z)}$  no puede ser analítica en  $G$ .

36. Una serie de potencias formal en  $z = \infty$  se define como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

$a_n \in \mathbb{C}$ . Se define el radio de convergencia  $r$  de la serie como

$$r = \inf\{|z| : \text{la serie converge en } z, z \neq 0\},$$

poniendo  $r = 0$  si la serie diverge en todo  $z$ . Obténgase una expresión –al estilo Hadamard– del radio de convergencia de la serie, probando que ésta constituye una función continua en  $|z| > r$ , con límite finito en el infinito.

37. Se dice que un dominio  $G$  contiene al punto del infinito si  $G \supset \mathbb{C} \setminus \overline{D}$  para algún disco de  $\mathbb{C}$ . Diremos que  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica en  $G \cup \{\infty\}$  si es analítica en  $G$  (Definición 3.15) y se representa por una serie de potencias en  $z = \infty$  en un entorno  $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$  de dicho punto. Pruébese que  $f$  es analítica en  $G \cup \{\infty\}$  si y sólo si  $g(z) = f(1/z)$  es analítica en  $\Omega = \{\frac{1}{z} : z \in g\}$  y además admite una extensión analítica a un cierto disco  $D(0, R)$ .

Pruébese que toda función racional  $f(z)$  acotada cuando  $z \rightarrow \infty$  es analítica en el infinito.

38. Hallar el desarrollo de  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  en serie de potencias de  $1/z$  ( $c \neq 0$ ).

### Complementos

1. Demuéstrese que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z \sim z, \quad \cos z - 1 \sim -\frac{z^2}{2}, \quad \operatorname{tag} z \sim z, \\ e^z - 1 \sim z, \quad \operatorname{Log}(1 + z) \sim z, \end{aligned}$$

cuando  $z \rightarrow 0$ . A tal efecto resulta de utilidad el Ejercicio 9.

# CAPÍTULO 4

## Derivabilidad en $\mathbb{C}$

### 4.1. Derivabilidad

**Definición 4.1.** Sea  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función compleja,  $G \subset \mathbb{C}$  abierto. Se dice que  $f$  es derivable en  $z_0 \in G$  con derivada  $f'(z_0)$  si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

**Proposición 4.2.** Sea  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función compleja definida en  $G \subset \mathbb{C}$  abierto de  $\mathbb{C}$ . Que  $f$  sea derivable en  $z_0$  equivale a que exista  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + g(z), \quad (4.1)$$

donde  $g(z) = o(|z - z_0|)$  cuando  $z \rightarrow z_0$ .

*Observación 4.1.* Otra forma equivalente de escribir la relación (4.1) es poner:

$$g(z) = h(z)(z - z_0),$$

donde  $h$  es una función que cumple  $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$  ( $h = o(1)$  cuando  $z \rightarrow z_0$ ).

Por razones que se aclaran en el Capítulo V las funciones derivables en un dominio  $G \subset \mathbb{C}$  se denominan funciones *holomorfas* en  $G$ .

Las propiedades siguientes se prueban exactamente como en el caso de una variable real.

**Proposición 4.3.** Sean  $f, g : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones complejas definidas en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$  y derivables en  $z_0 \in G$ . Entonces:

a)  $f$  (y también  $g$ ) es continua en  $z_0$ . Más aún

$$|f(z) - f(z_0)| \leq L|z - z_0|,$$

si  $|z - z_0| \leq r$  para ciertas constantes  $L, r$ .

b) Para  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  la función  $\lambda f + \mu g$  es derivable en  $z_0$  con

$$(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0).$$

c) [Regla de Leibnitz]  $fg$  es derivable en  $z_0$  y

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

d) Supuesto  $g(z_0) \neq 0$  la función  $\frac{f}{g}$  es derivable en  $z_0$  y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Es también importante la propiedad siguiente.

**Proposición 4.4** (Regla de la Cadena). Sean  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G, \Omega$  abiertos de  $\mathbb{C}$ ,  $f(z_0) = w_0$  con  $z_0 \in G$ ,  $w_0 \in \Omega$  y  $f$  y  $g$  derivables en  $z_0$  y  $w_0$ , respectivamente. Entonces  $g \circ f(z) = g(f(z))$  es derivable en  $z_0$  y

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

*Demostración.* Se tiene:

$$g(w) = g(w_0) + g'(w_0)(w - w_0) + g_1(w),$$

y

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + f_1(z),$$

con  $g_1 = o(|w - w_0|)$  y  $f_1 = o(|z - z_0|)$  cuando  $w \rightarrow w_0$  y  $z \rightarrow z_0$ , respectivamente. Por substitución directa se tiene:

$$g(f(z)) = g(f(z_0)) + g'(w_0)f'(z_0)(z - z_0) + h(z),$$

con

$$h(z) = g'(w_0)f_1(z) + g_1(f(z)).$$

Como  $h(z) = o(|z - z_0|)$  cuando  $z \rightarrow z_0$  hemos terminado.  $\square$

*Ejemplo 4.2.* Los polinomios y las funciones racionales son derivables en sus dominios de definición. El cálculo de sus derivadas es idéntico al del caso real pues:

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

**Proposición 4.5.** Sea  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación derivable en  $G$ ,  $f'(z_0) \neq 0$  y  $\gamma_1, \gamma_2$  dos curvas  $C^1$  (Cap. I) incidentes en  $z_0$ . Entonces el ángulo de  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$  en  $z_0$  coincide con el ángulo de  $\gamma'_1 = f(\gamma_1)$  a  $\gamma'_2 = f(\gamma_2)$  en  $w_0 = f(z_0)$ .

*Demostración.* Si  $\varphi_i(t)$ ,  $t \in [a, b]$ ,  $i = 1, 2$ , son las parametrizaciones de las curvas,  $z_0 = \varphi_i(t_0)$  resulta:

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg \left( \frac{\varphi_2'(t_0)}{\varphi_1'(t_0)} \right) = \arg \left( \frac{f'(z_0)\varphi_2'(t_0)}{f'(z_0)\varphi_1'(t_0)} \right) = \angle(\gamma_1', \gamma_2'),$$

que es lo que se pretendía demostrar.  $\square$

Si una función  $f$  es derivable en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$  y su derivada  $f'$  es derivable en  $z_0$  entonces  $(f')'(z_0)$  se llama la derivada segunda de  $f$  en  $z_0$  y escribimos  $f''(z_0)$  en lugar de  $(f')'(z_0)$ . De manera análoga se introducen las derivadas de orden  $n$ . Una verdadera “gema” del análisis complejo es la propiedad que afirma que una función  $f$  que es derivable en un abierto  $G$  satisface a) que su derivada  $f'$  es una función continua en  $G$ , b) que admite derivadas de todos los órdenes en  $G$ , c) que es analítica en  $G$  (cf. Capítulo III). Todavía tardaremos lo suyo en esclarecer todo esto (los impacientes pueden acudir a los textos clásicos de la materia, [23] por ejemplo). La siguiente propiedad juega un papel fundamental en la prueba de este hecho.

**Proposición 4.6.** *Sea  $\sum_0^\infty a_n(z-a)^n$  una serie de potencias con radio de convergencia  $\rho > 0$ . Si representamos por  $D = D(z, a)$  el círculo de convergencia y  $f(z)$  la suma de la serie en  $D$  entonces  $f$  admite derivadas de todos los órdenes y*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}.$$

En particular

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n.$$

*Demostración.* Todo se reduce a probar que  $f$  es derivable en  $D$  y que su derivada vale:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}.$$

Como el segundo miembro posee el mismo radio de convergencia que la serie de partida, se le puede aplicar el resultado de derivabilidad para, tras repetir el proceso  $k$  veces, llegar a la conclusión deseada.

Haciendo  $z = a$  en la serie derivada  $k$  veces se obtiene:

$$k!a_k = f^{(k)}(a).$$

Daremos dos demostraciones de la derivabilidad de  $f$ . La primera es directa, mientras la segunda hace uso del hecho de que las series de potencias definen funciones analíticas en su disco de convergencia (ver le Teorema 3.16 del Capítulo III).

A) *Primera demostración.* Probamos que  $f$  es derivable en cada disco  $D(a, r)$  con  $0 < r < \rho$ .

Poniendo  $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$  demostramos que:

$$f(z) - f(z_0) - f_1(z_0)(z - z_0) = o(|z - z_0|),$$

cuando  $z \rightarrow z_0$ . A tal fin es útil recordar que:

$$\sum n|a_n|r^{n-1} < \infty,$$

mientras escribimos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^N a_n(z-a)^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z-a)^n = S_N(z) + f_N(z),$$

y

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^N a_n(z-a)^{n-1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1} = S'_N(z) + f_{1,N}(z).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) - f_1(z_0)(z - z_0) &= S_N(z) - S_N(z_0) - S'_N(z_0)(z - z_0) \\ &\quad + f_N(z) - f_N(z_0) - f_{1,N}(z_0)(z - z_0) = I + II. \end{aligned}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned} II &= \sum_{N+1}^{\infty} a_n ((z-a)^n - (z_0-a)^n - n(z_0-a)^{n-1}(z-z_0)) \\ &= (z-z_0) \sum_{N+1}^{\infty} a_n ((z-a)^{n-1} + (z-a)^{n-2}(z_0-a) + \dots + (z_0-a)^{n-1} - n(z_0-a)^{n-1}), \end{aligned}$$

de donde

$$|II| \leq \left( 2 \sum_{N+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \right) |z - z_0| < \frac{\varepsilon}{2} |z - z_0|,$$

para  $N \geq N_\varepsilon$ . Por otra parte, tomando  $N = N_\varepsilon$  en  $I$  resulta:

$$|I| \leq \frac{\varepsilon}{2} |z - z_0|,$$

si  $|z - z_0| < \delta$ . Por tanto  $|\Delta f - f_1(z_0)\Delta z| = |I + II| \leq \varepsilon|\Delta z|$  si  $|\Delta z| < \delta$ , donde  $\Delta z = z - z_0$ . Esto prueba la derivabilidad de  $f$  en  $z_0$ .

B) *Segunda demostración.* Primero comprobamos que la derivada de  $f$  en  $z = a$  es  $a_1$ . En efecto,

$$f(z) = f(a) + a_1(z-a) + (z-a)^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z-a)^{n-2}.$$

Como:

$$f_2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-2}$$

es continua en  $D$  la derivabilidad se sigue de manera inmediata.

Tomamos ahora  $z_0 \in D$  y recordamos que  $f(z)$  se puede representar en la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n,$$

donde la serie converge en  $|z-z_0| < \rho - |z_0-a|$ ,  $b_0 = f(z_0)$  y

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_0-a)^{n-1},$$

(ver el Capítulo III). Por tanto,  $f$  es derivable en  $z_0$  y su derivada es  $b_1$ . Eso es precisamente lo que teníamos que demostrar.  $\square$

*Observación 4.3. Acabamos de probar que las series de potencias se pueden derivar término a término en su círculo de convergencia tantas veces como se quiera.*

Una consecuencia directa de esta proposición es la siguiente propiedad.

**Proposición 4.7.** *Sea  $f$  una función analítica en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$ . Entonces  $f$  es infinitamente derivable en  $G$  y para cada  $z_0 \in G$ ,  $f$  se representa en la forma:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z-z_0)^n. \quad (4.2)$$

La expresión (4.2) se conoce como el desarrollo de Taylor de  $f$  en  $z_0$ .

*Ejemplos 4.4.*

- a) La función  $f(z) = e^z$  es infinitamente derivable en  $\mathbb{C}$  con derivada  $f'(z) = e^z$ .
- b) Las funciones  $f(z) = \cos z$  y  $g(z) = \sin z$  son infinitamente derivables en  $\mathbb{C}$  con derivadas  $f'(z) = -\sin z$  y  $g'(z) = \cos z$ .
- c) [Raíces  $n$ -ésimas]. Sea

$$f(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{\text{Arg } z + 2k\pi}{n} i}$$

$0 \leq k \leq n-1$  una rama de la raíz  $n$ -ésima y  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{x \leq 0\}$ . Entonces  $f$  es derivable en  $z_0$  y

$$f'(z_0) = \frac{1}{n f(z_0)^{n-1}}.$$

En la siguiente propiedad desenterramos el “esqueleto” real de una función derivable. Si  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f = u + iv$ , es una función compleja y  $G$  un abierto entonces  $f$  define al mismo tiempo la aplicación real  $f_{\mathbb{R}} : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $f_{\mathbb{R}}(x, y) = (u, v)$ . Se recuerda que una aplicación  $F : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es diferenciable en  $(x_0, y_0) \in G$  si existe  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineal tal que:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + L(x - x_0, y - y_0) + \mathcal{G}(x, y), \quad (4.3)$$

donde  $\mathcal{G}(x, y) = o(r)$  cuando  $r \rightarrow 0$  con  $r = |(x - x_0, y - y_0)|$ . Si  $F = (u(x, y), v(x, y))$  la matriz de  $L$  tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Usando la notación vectorial  $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$ ,  $\bar{h} = (h_1, h_2)$  la relación (4.3) se escribe equivalentemente como:

$$F(\bar{x}_0 + \bar{h}) = F(\bar{x}_0) + L\bar{h} + o(|\bar{h}|),$$

cuando  $|\bar{h}| \rightarrow 0$ .

**Teorema 4.8.** Sean  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ ,  $f_{\mathbb{R}} : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f_{\mathbb{R}} = (u, v)$  la aplicación real asociada a  $f$ .

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1)  $f$  es derivable en  $z_0$ .
- 2)  $f_{\mathbb{R}}$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$  y se satisfacen las siguientes relaciones (ecuaciones de Cauchy-Riemann):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

En particular se tiene que:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

*Demostración.* a)  $\Rightarrow$  b). Si  $f$  es derivable en  $z_0$ :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z),$$

con  $f'(z_0) = \alpha + i\beta$ ,  $g = g_1 + ig_2 = o(|z - z_0|)$  cuando  $z \rightarrow z_0$ . Llamando  $F(x, y) = f_{\mathbb{R}}(x, y) = (u, v)$ ,  $\mathcal{G} = (g_1, g_2)$ , se tiene:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \mathcal{G}(x, y),$$

y  $F$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$  con

$$u_x = v_y = \alpha, \quad u_y = -v_x = -\beta.$$

b)  $\Rightarrow$  a). Se tiene:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{21} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \mathcal{G}(x, y),$$

donde  $\mathcal{G}(x, y) = (g_1, g_2) = o(|(x - x_0, y - y_0)|)$  cuando  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ . Llamando  $\lambda = a_{11} + ia_{12}$ ,  $g(z) = g_1 + ig_2$  tal igualdad implica:

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + g(z),$$

y  $f$  es derivable en  $z_0$  con derivada  $f'(z_0) = \lambda$ .  $\square$

*Observación 4.5.* Si  $f$  es derivable el determinante jacobiano de  $f_R$  vale:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z_0)|^2.$$

*Ejemplo 4.6.* La función

$$\text{Log } z = \log r + i\theta,$$

con  $r = |z|$ ,  $\theta = \text{Arg } z$  es derivable en  $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$  pues  $u = \log r$  y  $v = \theta$  cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Además:

$$f'(z) = (\log r)_x + i\theta_x = \frac{x}{r^2} - i\frac{y}{r^2} = \frac{1}{z}.$$

Algunas de las propiedades que siguen hacen uso de la estructura real de una función derivable  $f$ .

**Proposición 4.9.** *Sea  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función derivable en un dominio  $G$  tal que  $f' = 0$  en  $G$ . Entonces  $f$  es constante en  $G$ .*

**Proposición 4.10.** *Una función derivable en un dominio  $G$ ,  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , que sólo toma valores reales es necesariamente constante.*

**Proposición 4.11.** *Para una función derivable y no constante en un abierto  $G$ ,  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , se tiene que  $\bar{f}$  nunca es derivable en  $G$ . Por otro lado si se define  $g(z) = \bar{f}(\bar{z})$  con  $z \in \bar{G} = \{z : \bar{z} \in G\}$ ,  $g$  sí es derivable en  $\bar{G}$ .*

Los siguientes resultados guardan relación con el teorema de la función inversa. El primero viene a decir que las ramas de inversa de funciones derivables son ellas mismas derivables. El segundo afirma que las funciones con derivada no nula son localmente invertibles. Según se probará en su momento, en el caso de funciones de variable compleja  $f'(z_0) \neq 0$  no sólo es condición suficiente para la invertibilidad local sino que es también condición necesaria para que  $f$  sea localmente inyectiva. Esto claramente no ocurre en el caso real (ejemplo  $f(x) = x^3$  en un entorno de  $x = 0$ ).

**Proposición 4.12.** Sean  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función derivable en un abierto  $G$ ,  $(g, \Omega)$  una rama de inversa de  $f$ ,  $z_0 \in G$ . Si  $w_0 = f(z_0)$  y  $f'(z_0) \neq 0$  entonces  $g$  es derivable en  $w_0$  y

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

*Demostración.* Escribimos ( $w \neq w_0$ ):

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)},$$

donde  $z = g(w)$ ,  $z_0 = g(w_0)$ . Basta entonces tomar límites cuando  $w \rightarrow w_0$  y usar la continuidad de  $g$ .  $\square$

**Proposición 4.13.** Sea  $f$  una función derivable en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in G$ ,  $w_0 = f(z_0)$  y  $f'(z_0) \neq 0$ . Existen entonces entornos abiertos  $U$  de  $z_0$ ,  $V$  de  $w_0$  tales que  $f : U \rightarrow V$  es un homeomorfismo,  $f^{-1}$  es derivable en  $V$  y

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f(z))}.$$

*Demostración.* Aplicando el teorema de la función inversa a  $f_R$  obtenemos la existencia de  $U, V$  y que  $f_R^{-1}$  es  $C^1$  en  $V$  desde el punto de vista real. Como en particular  $f^{-1}$  es un homeomorfismo entonces  $(f^{-1}, V)$  define una rama de inversa de  $f$  y hemos terminado.  $\square$

*Observación 4.7.* Puede darse una prueba usando directamente la versión real del teorema. En efecto si  $\lambda = f'(z_0)$  la diferencial  $D(f_R^{-1})$  puede codificarse en  $\mathbb{C}$  como la aplicación lineal asociada a  $\lambda^{-1}$ . Esto significa, obviamente, que  $f_R^{-1}$  cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

*Ejemplos 4.8.*

a) Si  $(f, \Omega)$  es cualquier rama (determinación) del logaritmo entonces:

$$f'(z) = \frac{1}{z}. \quad (4.4)$$

b) Si  $(f, \Omega)$  es una rama de inversa de la tangente (una determinación de la arcotangente) entonces

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2}. \quad (4.5)$$

c) Si  $(f, \Omega)$  es una rama de inversa del seno (una determinación del arcoseno) entonces:

$$f'(z) = \pm \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

donde el signo depende específicamente de cada rama. Si  $f(z) = \text{Arcsen}(z)$ ,  $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z^2 \geq 1\}$  el signo es “más”. Sin embargo para la rama  $f(z) = \pi - \text{Arcsen } z$  (que toma valores en  $\frac{\pi}{2} < \Re z < \frac{3\pi}{2}$ ) el signo es obviamente “menos”. Como puede observarse por inspección directa del caso real este no es un fenómeno nuevo desde el punto de vista complejo.

d) Si  $(g, \Omega)$  es una rama de inversa de  $f(z) = z^n$ , es decir una determinación de la raíz  $n$ -ésima y si  $z_0 \in \Omega$ :

$$g'(z_0) = \frac{1}{ng(z_0)^{n-1}}.$$

Algunos de los cálculos precedentes nos permiten hallar los desarrollos en serie de algunas funciones. Considerando que:

$$(\operatorname{Log}(1+z))' = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots,$$

es fácil concluir que:

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

Análogamente:

$$\operatorname{Arctag} z = z - \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Otra cuestión que nos planteamos en el capítulo anterior fue el desarrollo en serie de potencias de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}.$$

A estos efectos se observa que:

$$\begin{aligned} (z-a)^{-n} &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} [(z-a)^{-1}]^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} a^{-1} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} z^k \right]^{(n-1)} \\ &= \sum_{k=n-1}^{\infty} (-1)^n a^{-(k+1)} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!} z^{k-n+1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+l}} \binom{n-1+l}{n-1} z^l. \end{aligned}$$

Dejamos al lector la tarea de encontrar los dominios de convergencia de las series implicadas.

## 4.2. Funciones armónicas

Supongamos que  $f(z) = u + iv$  es derivable en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$ . Entonces  $u$  y  $v$  admiten derivadas parciales de primer orden en  $\Omega$  las cuales satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x.$$

Si se sabe además<sup>1</sup> que  $u$  y  $v$  admiten derivadas parciales de segundo orden en  $G$  entonces

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

El grupo  $u_{xx} + u_{yy}$  se representa como  $\Delta u$  y se llama el laplaciano de  $u$ . La relación  $\Delta u = 0$  se conoce como la ecuación de Laplace.

**Definición 4.14.** Se dice que una función  $u \in C^2(G)$  es armónica en  $G$  si

$$\Delta u = 0,$$

en  $G$ .

Suponiendo que se es capaz de fabricar funciones armónicas  $u$  en un dominio  $G$  la pregunta natural es saber si existe otra función armónica  $v$  tal que  $f(z) = u + iv$  es derivable en  $G$ , es decir, de suerte que  $u, v$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

**Definición 4.15.** Si  $u \in C^2(G)$  es armónica se dice que  $v \in C^2(G)$  es armónica conjugada de  $u$  si  $f(z) = u + iv$  es derivable en  $G$ .

**Teorema 4.16.** Sea  $G$  un abierto convexo, en particular  $\mathbb{C}$  ó  $D(a, r)$  para  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ . Si  $u \in C^2(G)$  es armónica en  $G$  entonces existe una función armónica conjugada  $v \in C^2(G)$ . Además, todas las posibles funciones armónicas conjugadas de  $u$  en  $G$  difieren en una constante.

*Demostración.* Consideramos el caso  $G$  convexo donde suponemos sin pérdida de generalidad que  $0 \in \Gamma$ . Para  $u$  dato hemos de resolver en  $v$  las ecuaciones:

$$v_x = P, \quad v_y = Q,$$

donde  $P = -u_y$ ,  $Q = u_x$ . Al ser  $u$  armónica la forma  $\omega = Pdx + Qdy$  es cerrada y el lema de Poincaré ([25]) implica que  $\omega = dv$  para alguna  $v$  que se comprueba inmediatamente que es armónica. En este caso resulta inmediato reproducir el argumento del lema de Poincaré, cosa que hacemos por completitud. Nótese que sólo usamos el hecho de que  $G$  es estrellado con respecto a  $z = 0$ . Definimos:

$$v(x, y) = \int_0^1 \{xP(tx, ty) + yQ(tx, ty)\} dt = \int_{\Gamma} P dx + Q dy,$$

$\Gamma = [0, z]$ . Comprobamos que  $v_x = P(x, y)$ , en efecto:

$$\begin{aligned} v_x &= \int_0^1 \{P(tx, ty) + xtP_x(tx, ty) + ytQ_x(tx, ty)\} \\ &= \int_0^1 \{P(tx, ty) + t \frac{d}{dt}(P(tx, ty))\} dt \\ &= \int_0^1 P(tx, ty) dt + P(x, y) - \int_0^1 P(tx, ty) dt \\ &= P(x, y). \end{aligned}$$

Se prueba igualmente que  $v_y = Q(x, y)$ . □

<sup>1</sup>Es consecuencia de los resultados del capítulo siguiente que la mera derivabilidad de  $f$  ya implica que  $u, v$  son de clase  $C^\infty$  así que esta condición se cumple siempre.

*Observación 4.9.*

- a) Una vez asegurado que  $\omega = dv$ ,  $v$  puede definirse alternativamente como  $v(z) = \int_{\Gamma(z_0, z)} Pdx + Qdy$  donde  $\Gamma$  es cualquier curva  $C^1$  a trozos que conecta  $z_0$  con  $z$ .
- b) La construcción práctica de  $v$  procede como sigue. Primero integrar, por ejemplo en  $x$  para tener:

$$v(x, y) = \varphi(y) + \int_{x_0}^x P(t, y) ds.$$

Después derivar en  $y$  para, usando  $P_y = Q_x$ , concluir  $\varphi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, s) ds$ . Se puede empezar integrando en  $y$  para llegar, gracias a a), al mismo resultado.

*Ejemplo 4.10.* Hallar las funciones enteras  $f$  cuya parte real es  $u = x^3 - 3xy$ .

La función  $v = \Im f$  ha de cumplir:

$$\begin{aligned} v_x &= -u_y = 6xy \\ v_y &= u_x = 3x^2 - 3y^2, \end{aligned}$$

de donde, integrando la primera ecuación en  $x$  resulta:

$$v = 3x^2y + \varphi(y),$$

derivando con respecto a  $y$  y usando la segunda ecuación:

$$\varphi'(y) + 3x^2 = 3x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -y^3 + C \quad \Rightarrow \quad v = 3x^2y - y^3 + C.$$

Por tanto las funciones buscadas son:

$$f(z) = z^3 + C,$$

con  $C$  una constante compleja.

### 4.3. Apéndice: diferenciabilidad de funciones de varias variables complejas

Supongamos que  $f : G \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ ,  $G$  abierto de  $\mathbb{C}^n$ , es una función compleja,  $f(z) = (f_k(z)) = (f_1(z), \dots, f_m(z))$ ,  $z = (z_j) = (z_1, \dots, z_n)$ . Se dice que  $f$  es derivable en  $z_0$  si existe  $L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$   $\mathbb{C}$ -lineal tal que:

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + L(h) + g(h),$$

donde  $g(h) = o(|h|)$  cuando  $h \rightarrow 0$  en  $\mathbb{C}^n$ .

La función  $f$  induce una aplicación real:

$$f_R : \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2,$$

donde  $f_R(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (u_1, v_1, \dots, u_m, v_m)$ , las  $u_k, v_k$  son funciones reales de  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  y se tiene que  $f_k(z) = u_k(z) + iv_k(z)$  con  $z = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$ .

Con una demostración enteramente similar a la del Teorema 4.8 se establece sin esfuerzo el siguiente resultado.

**Teorema 4.17.** *Sea  $f : G \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ ,  $G$  abierto,  $z_0 \in G$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- a)  $f$  es diferenciable en  $z_0$ .
- b)  $f_R$  es diferenciable –en sentido real– en  $z_0$  y además (ecuaciones de Cauchy-Riemann):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \\ \frac{\partial u_k}{\partial y_j} = -\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \end{cases}$$

para  $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m$ .

#### 4.4. Ejercicios

- ¿En qué puntos es derivable la función  $f(z) = |z|^2$ ?
- Estudiar la validez de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en  $z = 0$  para la función  $f(z) = \sqrt{|xy|}$ . ¿Es derivable en el origen?, ¿es derivable en algún otro punto?
- Estudiar la diferenciabilidad de la función  $f(z) = x^2 + iy^2$ .
- Calcúlense las derivadas de las siguientes funciones:
 

a)  $\operatorname{tag} z$ ,    b)  $\operatorname{cotang} z$ ,    c)  $\operatorname{sec} z$ ,    d)  $\operatorname{cosec} z$ ,    e)  $\operatorname{arctag} z$ ,

f)  $\operatorname{arcsen} z$ ,    g)  $\operatorname{arccosen} z$ ,    h)  $\operatorname{arcsec} z$ ,    i)  $\operatorname{arccosec} z$ ,

 en donde para las funciones circulares inversas “arc” se toman las ramas principales (ver los Ejercicios del Capítulo III).

- Compruébense las siguientes relaciones:

$$a) \operatorname{Argch} z = \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad b) \operatorname{Argsh} z = \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$c) \operatorname{Argth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{z+1}{z-1},$$

donde se ha usado la rama principal de la raíz cuadrada. Calcúlense las derivadas de dichas funciones.

- Estudiar la derivabilidad de la función  $\log(\log(\log z))$ .

7. Para cada una de las funciones siguientes hállese el dominio de holomorfia y su derivada:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}, \quad f(z) = \operatorname{cosec} \sqrt{z}, \quad f(z) = \sec \sqrt{z}, \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} e^{\operatorname{tag} z},$$

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{iz+1})}{z^2+1}, \quad f(z) = \cos \sqrt{e^z - 1}.$$

8. Las mismas cuestiones que en el ejercicio 7 para las funciones:

$$f(z) = \sqrt[3]{z^4 - 1}, \quad f(z) = \operatorname{Arcsen} z^2, \quad f(z) = e^{\operatorname{Arctag} i\sqrt{z}},$$

$$f(z) = (z^2+1)^z, \quad f(z) = \operatorname{Log}(\operatorname{Log} z), \quad f(z) = (1+e^z) \operatorname{Log}(1+e^z).$$

9. Para  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  se define la rama principal de  $z^a$  como:

$$z^a = e^{a \operatorname{Log} z},$$

donde  $\operatorname{Log} z$  designa la rama principal del logaritmo.

- a) Pruébese que la definición dada coincide con  $z^n$ ,  $z^{-n}$  y la rama principal de  $z^{1/n}$  para  $n \in \mathbb{N}$ .
- b) Pruébese que  $z^a z^b = z^{a+b}$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ .
- c) Pruébese que  $z^a$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$  con  $(z^a)' = az^{a-1}$ .

10. Hallar todas las funciones  $f(z)$  holomorfas en  $\mathbb{C}$  que cumplen:

$$f'(z) = \lambda f(z),$$

para un número complejo dado  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

11. Usar el ejercicio 10 para dar una nueva demostración de que:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

*Indicación.* Compárense las funciones  $e^{\lambda+z}$  y  $e^\lambda e^z$ .

12. Hallar todas las funciones enteras  $f(z)$  tales que:

$$f''(z) + f(z) = 0$$

en  $\mathbb{C}$ .

*Indicación.* Imitar argumentos similares al caso real.

13. Se introdujo en el capítulo anterior la serie binomial:

$$g_\lambda(z) = 1 + \lambda + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} z^n + \dots$$

Hállense las derivadas de todos los órdenes de  $g_\lambda$  en  $z = 0$ . Recuérdese que  $g_\lambda(z)$  coincide con  $(1+z)^\lambda$  para valores significativos de  $\lambda$ .

14. Se considera la rama principal de  $(1+z)^\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ). Tras determinar el dominio de holomorfía de dicha función calcúlense las derivadas sucesivas de  $(1+z)^\lambda$  en dicho dominio. ¿Cuánto valen éstas derivadas en  $z=0$ ? Comparar con el Ejercicio 13.
15. ¿Existen funciones holomorfas  $f$  tales que  $u = \Re f = x^2 + y^2$ ?
16. Hallar las funciones holomorfas  $f$  tales que  $\Re f = x^2 - y^2$ .
17. Se sabe que  $f$  es entera con:

$$f(z) = u(x) + iv(y).$$

Probar que  $f$  es lineal.

18. Determinar la función entera  $f(z)$  que satisfaga  $\Re f'(z) = 3x^2 - 4y - 3y^2$ ,  $\Re f(0) = 6$  y  $f(1+i) = 0$ .
19. Demostrar que si  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en un dominio  $G$  y  $f(z) \in \mathbb{R}$  para todo  $z \in G$  entonces  $f$  es constante.
20. Sea  $G$  un dominio y  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa que toma sus valores en  $\{|z|=1\}$ . Demostrar que  $f$  es constante.
21. Se expresan las partes real e imaginaria  $u(x,y), v(x,y)$  de una función compleja  $f$  en coordenadas polares para tener  $U(r,\theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,  $V(r,\theta) = v(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Admitiendo la existencia de todas las derivadas parciales primeras, determínese la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Aplicar el resultado para estudiar la holomorfía de las funciones,

$$\begin{aligned} a) & r^n \cos n\theta + ir^n \sin n\theta, & b) & r^{1/n} \cos \frac{\theta}{n} + ir^{1/n} \sin \frac{\theta}{n}, & c) & \log r^2 + 2\theta i, \\ d) & r^\alpha e^{-\beta\theta} \cos(\alpha\theta + \beta \log r) + ir^\alpha e^{-\beta\theta} \sin(\alpha\theta + \beta \log r) & & & & \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Solución:*  $rU_r = V_\theta$ ,  $U_\theta = -rV_r$ .

22. Estudiar el dominio de holomorfía de la función:

$$f(z) = \exp \left\{ -i \operatorname{Log} \left[ i \left( \frac{1+z}{1-z} \right) \right]^{1/2} \right\},$$

calculando su derivada. ¿Cuál es la imagen del disco unidad  $\{|z| < 1\}$  mediante  $f$ ?

*Indicación.* Es un anillo.

23. Sea  $f$  una función holomorfa en un dominio  $G \subset \mathbb{C}$ . En  $G^* = \{\bar{z} : z \in G\}$  se define  $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ . Probar que  $f^*$  es también holomorfa.

24. Sea  $\gamma$  una curva  $C^1$  a trozos parametrizada por  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  con  $\phi(a) = z_0, \phi(b) = z_1$ . Supongamos que  $f = u + iv$  es holomorfa en un dominio convexo  $G$  y que  $\gamma \subset G$ . Pruébese que la integral:

$$\int_{\gamma} -u_y dx + u_x dy,$$

sólo depende de  $z_0, z_1$ .

25. Sean  $f_n : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  diferenciables en  $G$  con derivadas continuas<sup>2</sup> y tales que  $f_n \rightarrow f, f'_n \rightarrow g$  uniformemente en  $G$ . Pruébese que  $g = f'$ .
26. Sean  $f_n : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  diferenciables en  $G$  con derivadas continuas de forma que  $|f_n(z)|, |f'_n(z)| \leq M_n$  en  $G$  con  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ . Si se define:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

pruébese que  $f$  es derivable con:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z).$$

27. Se considera la serie de potencias con centro en el infinito:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

y radio de convergencia  $R > 0$  (véase el Capítulo III). Estúdiase la derivabilidad de  $f$  en  $|z| > R$  y el comportamiento asintótico de las derivadas cuando  $z \rightarrow \infty$ .

28. Sea  $\theta = \theta(x, y) = \theta(z)$  una función real y continua definida en un dominio  $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Se dice que  $\theta$  es una rama del argumento si:

$$e^{i\theta(z)} = \frac{z}{|z|} \quad z \in G.$$

- a) Si  $\theta$  es una rama de  $\arg z$  en  $G$  ¿cómo son las otras posibles ramas de  $\arg z$  en  $G$ ?
- b) ¿Puede existir una rama de  $\arg z$  definida en un entorno “perforado” de cero de la forma  $D(0, r) \setminus \{0\}$ ?
- c) Demuéstrese que si  $\theta$  es una rama de  $\arg z$  en  $G$  entonces  $\theta$  es armónica en  $G$ .

<sup>2</sup>Esta condición es innecesaria en virtud del teorema de Goursat.

- d) En las condiciones de c), pruébese que  $r^n \cos n\theta$ ,  $r^n \operatorname{sen} n\theta$  son armónicas ( $r = |z|$ ).

*Nota.* Se conoce a las expresiones  $\sum_{n=0}^N r^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$ ,  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , como polinomios armónicos de grado  $N$ .

29. Sea  $G$  un dominio y  $g$  una rama de la raíz  $n$ -ésima de  $z$ . Hállense todas las otras ramas.
30. Pruébese que no puede existir una rama de la raíz  $n$ -ésima de  $z$  definida en un entorno de cero  $\{z : |z| < r\}$ .
31. Se sabe que  $g$  es continua en un dominio  $G \subset \mathbb{C}$ ,  $0 \notin G$  (cf. Ejercicios 28, 30) y que cumple:

$$g(z)^n = z,$$

es decir que  $g$  es una rama de la raíz  $n$ -ésima. Pruébese que  $g$  es derivable determinando una expresión de su derivada en términos de  $g$ .

32. Demostrar que no existe una rama del logaritmo definida en  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
33. Pruébese que  $\log |z|$  es armónica en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . ¿Admite allí una función armónica conjugada?

*Indicación.* Véase el Ejercicio 32

34. Sean  $G, \Omega$  dominios de  $\mathbb{C}$ ,  $f, h : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h, g$  holomorfas,  $h$  inyectiva,  $f$  continua, de forma que:

$$h(z) = g(f(z)) \quad z \in G,$$

junto con  $g'(w) \neq 0$  en  $\Omega$ .

- a) Probar que  $f$  es inyectiva.
- b) Probar que  $f$  es holomorfa en  $G$  dando una expresión de su derivada.

# CAPÍTULO 5

## Integración compleja

### 5.1. Integral de Riemann compleja

Para su uso inmediato llamamos partición  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  de  $[a, b]$  a toda sucesión de valores reales  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . Designamos por  $\mathcal{P}$  al conjunto de tales particiones. Para una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $P \in \mathcal{P}$  una suma de Riemann asociada consiste en la expresión:

$$s(P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta t_i,$$

donde  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

**Definición 5.1.** Una función acotada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es Riemann integrable (R-integrable) si existe  $\zeta \in \mathbb{C}$  tal que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $P_\varepsilon \in \mathcal{P}$  cumpliéndose:

$$|s(P) - \zeta| < \varepsilon$$

para toda  $P \in \mathcal{P}$ ,  $P \supset P_\varepsilon$ . Denotamos  $\mathcal{R}[a, b]$  el conjunto de las funciones Riemann-integrables en  $[a, b]$ . Es costumbre asimismo escribir

$$\zeta = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f = \int_I f,$$

donde  $I = [a, b]$ .

**Proposición 5.2.** Una función acotada  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  si sólo si  $\Re f \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\Im f \in \mathcal{R}[a, b]$  y se cumple:

$$\int_a^b f = \int_a^b \Re f + i \int_a^b \Im f.$$

*Observación 5.1.* Una definición equivalente de función compleja  $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$  Riemann-integrable consiste en pedir que  $f_1$  y  $f_2$  sean Riemann-integrables.

Se incluye a continuación una relación de propiedades básicas de la integral de Riemann. Remitimos al lector a la referencia [3].

**Proposición 5.3** (Linealidad). *Sean  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Entonces  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}[a, b]$  y*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

**Proposición 5.4** (Aditividad en el intervalo de integración). *Sea  $f$  una función acotada en  $[a, b]$  y  $a < c < b$ .*

a) *Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  entonces  $f \in \mathcal{R}[a, c]$ ,  $f \in \mathcal{R}[c, b]$  y:*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

b) *Si  $f \in \mathcal{R}[a, c]$  y  $f \in \mathcal{R}[c, b]$  entonces  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  y se tiene la identidad precedente.*

Para uso posterior adoptamos los convenios:

$$\int_a^a f = 0, \quad \int_b^a f = - \int_a^b f.$$

Una definición relevante para lo que sigue es la siguiente.

**Definición 5.5** ( $C^1$  a trozos). *Se dice que una función  $\alpha : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  es  $C^1$  a trozos si o bien es  $C^1$  en  $[c, d]$  o bien  $\alpha$  es continua en  $[c, d]$  y existe una partición  $P$  de  $[c, d]$  tal que  $\alpha$  es  $C^1$  en cada intervalo  $[t_{k-1}, t_k]$  –entendiéndose las derivadas en  $t_{k-1}$  y  $t_k$  por la derecha e izquierda respectivamente– aunque quizás  $\alpha'(t-) \neq \alpha'(t+)$  en los puntos de  $P$ .*

**Proposición 5.6** (Cambio de variable). *Sea  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  y  $\alpha : [c, d] \rightarrow [a, b]$  una función monótona,  $C^1$  a trozos,  $\alpha([c, d]) = [a, b]$ . Entonces  $f \circ \alpha \in \mathcal{R}[c, d]$  y*

$$\int_{\alpha(c)}^{\alpha(d)} f(t) dt = \int_c^d f(\alpha(s))\alpha'(s) ds.$$

El siguiente resultado importante caracteriza la integrabilidad Riemann de las funciones acotadas.

**Teorema 5.7** (Lebesgue). *Sea  $f$  acotada en  $[a, b]$  y*

$$D = \{t \in [a, b] : f \text{ no es continua en } t\}.$$

*Entonces  $f$  es integrable Riemann en  $[a, b]$  si y sólo si  $D$  es un conjunto con medida de Lebesgue cero.*

*Observación 5.2. Nótese que los conjuntos numerables (sucesiones, pongamos por caso) son ejemplos de conjuntos con medida de Lebesgue cero.*

**Proposición 5.8** (Valor absoluto). *Si  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  entonces  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$  y se tiene:*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

*Demostración.* La integrabilidad se sigue de que el conjunto donde  $|f|$  es discontinua es menor que aquél donde lo es  $f$ .

Merece la pena probar la estimación de  $|\int_a^b f|$  usando el curioso argumento de [4]. Escribiendo:

$$\int_a^b f = R e^{i\theta},$$

$e^{-i\theta} f = g = g_1 + i g_2$  resulta:

$$\left| \int_a^b f \right| = R = \int_a^b g = \int_a^b g_1 \leq \int_a^b |g| = \int_a^b |f|.$$

□

El resultado siguiente se conoce como teorema fundamental del cálculo.

**Teorema 5.9** (Teorema fundamental del cálculo). *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua. Entonces:*

1) *Si para cada  $t \in [a, b]$  ponemos,*

$$F(t) = \int_a^t f(s) ds,$$

*entonces  $F$  es derivable en  $[a, b]$  con  $F'(t) = f(t)$ .*

2) *Si  $f$  es  $C^1$  a trozos en  $[a, b]$  entonces:*

$$\int_{t_0}^{t_1} f' = f(t_1) - f(t_0),$$

*para  $t_0, t_1 \in [a, b]$  arbitrarios.*

Una consecuencia importante es la siguiente propiedad.

**Proposición 5.10.** *Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  de clase  $C^1$  a trozos y  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  derivable con derivada continua en un abierto  $G$ . Si  $\gamma(t) \in G$  para todo  $t$  entonces:*

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

## 5.2. Integrales complejas

Una aplicación  $C^1$  a trozos  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\gamma'(t) \neq 0$  para todo  $t$  se denomina una *parametrización*  $C^1$  (omitiremos con frecuencia el calificativo “a trozos” para abreviar).

Dos parametrizaciones  $C^1$ ,  $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2$ , se dicen equivalentes y escribiremos  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  si existe una transformación (cambio de parámetro)  $C^1$   $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$  tal que  $\varphi'(s) > 0$  y  $\gamma_1(s) = \gamma_2(\varphi(s))$  para todo  $s \in [a_1, b_1]$ .

Llamamos curva *orientada*  $C^1$  a una parametrización  $\gamma$  y todas sus parametrizaciones equivalentes. Más formalmente, la relación “ $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ” es de equivalencia entre las parametrizaciones y así una curva consiste en una clase de equivalencia. Si  $z_0 = \gamma(a)$ ,  $z_1 = \gamma(b)$  decimos que  $\gamma$  es una “curva de  $z_0$  hasta  $z_1$ ” dando a entender que estamos recorriéndola en un sentido preciso. Con frecuencia identificaremos la curva  $\gamma$  con su órbita  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma(t), t \in [a, b]\}$ , teniendo presente que en cálculos de integrales hay que asignarle “un sentido” a su recorrido.

Dada una curva orientada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  su opuesta  $-\gamma$  es la definida por la parametrización  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t)$  con dominio  $[a_1, b_1] = [-b, -a]$ . Si  $\gamma$  va de  $z_0$  a  $z_1$  entonces  $-\gamma$  va de  $z_1$  a  $z_0$ .

Suma de curvas. Dadas dos curvas orientadas con sendas parametrizaciones  $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2$ , se define la curva suma  $\gamma_1 + \gamma_2$  mediante la parametrización  $\gamma : [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & a_1 \leq t \leq b_1 \\ \gamma_2(a_2 + (t - b_1)) & b_1 < t \leq b_1 + (b_2 - a_2). \end{cases}$$

Esto significa que primero recorremos  $\gamma_1$  y a continuación recorremos  $\gamma_2$ . La operación “suma de curvas” se introduce pensando en la integración compleja y por tanto no es necesario que  $\gamma_1 + \gamma_2$  sea de nuevo una parametrización. No obstante y por claridad de ideas asumiremos por el momento que  $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ . En este caso,  $\gamma_1 + \gamma_2$  sí parametriza una curva  $C^1$ .

Curvas cerradas orientadas son aquellas que corresponden a parametrizaciones  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tales que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Si  $\gamma$  es una curva cerrada y  $n \in \mathbb{N}$  escribiremos

$$n\gamma = \gamma + \overset{n)}{\cdots} + \gamma,$$

que equivale a recorrer  $n$  veces  $\gamma$  en el mismo sentido. Si  $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ ,  $t \in [0, 1]$ , entonces  $n\gamma$  se parametriza por  $\psi(t) = e^{2\pi it}$  con  $t$  ahora recorriendo el intervalo  $[0, n]$ . Análogamente  $-n\gamma = n(-\gamma)$ . En el ejemplo anterior  $-\gamma(t) = e^{-2\pi it}$ ,  $t \in [-1, 0]$ , aunque puede darse por una parametrización equivalente tomando  $t \in [0, 1]$ . En este sentido  $-n\gamma$  se parametriza por  $\psi(t) = e^{-2\pi it}$ ,  $t \in [0, n]$ .

Curvas de Jordan. Una curva cerrada continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\gamma$  es inyectiva en  $[a, b]$  se llama una curva (orientada) de Jordan. Si también representamos por  $\gamma$  su órbita  $\{z = \gamma(t) : t \in [a, b]\}$  está claro que  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  posee una componente conexa no acotada. Esto es cierto para todas las curvas cerradas  $\gamma$  y la llamaremos la “componente exterior”  $\mathcal{C}_e$  de  $\gamma$ . Además las restantes posibles

componentes de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  han de ser acotadas. En el caso de curvas de Jordan  $\gamma$  se demuestra –y no es tarea sencilla– que  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  posee exactamente dos componentes cuya frontera común es  $\gamma$ , la componente exterior  $\mathcal{C}_e$  y otra componente que en este caso se denomina la componente “interior”  $\mathcal{C}_i$  de  $\gamma$ . Tal es el contenido del célebre teorema de la curva de Jordan (véanse [3], [19], [8]).

**Definición 5.11.** Dada una parametrización  $C^1$  a trozos<sup>1</sup> se define la variación total de  $\gamma$ :

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Si  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  son parametrizaciones equivalentes  $V(\gamma_1) = V(\gamma_2)$  (se deja como ejercicio). Tal cantidad se denomina la *longitud de arco*  $\Lambda(\gamma)$  de la curva  $\gamma$  que definen.

**Definición 5.12.** Si  $\gamma$  es una curva  $C^1$  en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$  y  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  es continua se define la integral (de línea) compleja de  $f$  sobre  $\gamma$  como:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Definimos asimismo:

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)| dt.$$

*Ejemplos 5.3.*

1.  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ ,  $z = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

2.  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^n} = 0$ ,  $z = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $n \geq 2$ .

3.  $\int_{\gamma} z^n dz = \frac{1}{n+1}[b^{n+1} - a^{n+1}]$ ,  $\gamma = [a, b]$ .

**Proposición 5.13.** Consideremos  $f$  y  $g$  en las condiciones de la Definición 5.12. Entonces:

1.  $\int_{\gamma} f$  no depende de la parametrización.

2.  $\int_{-\gamma} f = -\int_{\gamma} f$ .

3.  $|\int_{\gamma} f dz| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \leq \sup_{\gamma} |f| V(\gamma)$ .

4. Si  $\gamma_1, \gamma_2$  son parametrizaciones  $C^1$  en  $G$  y  $\gamma_1 + \gamma_2$  es una parametrización  $C^1$ :

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

<sup>1</sup>En lo que sigue sobrentendemos el calificativo a trozos.

**Definición 5.14.** Una función continua  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$ , admite una primitiva si existe una función derivable  $F$  en  $G$  tal que  $F'(z) = f(z)$  para todo  $z \in G$ .

**Proposición 5.15.** Si  $f$  admite una primitiva  $F$  en un abierto  $G$  y  $\gamma \subset G$  es  $C^1$  entonces:

$$\int_{\gamma} f dz = F(z_1) - F(z_0),$$

donde  $z_0 = \gamma(a)$ ,  $z_1 = \gamma(b)$ . En particular, la integral es cero si  $\gamma$  es cerrada.

*Observación 5.4.* En  $\mathbb{R}$  las funciones continuas siempre admiten una primitiva. Esto no es cierto en el caso complejo.  $f(z) = \frac{1}{z}$  es continua en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , sin embargo no admite primitiva alguna pues:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

donde  $\gamma(s) = e^{is}$ ,  $s \in [0, 2\pi]$ .

### 5.3. El teorema de Cauchy en círculos: consecuencias

Empezamos con un resultado auxiliar

**Teorema 5.16.** Sea:

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (s, t) &\longmapsto \varphi(s, t) \end{aligned}$$

una aplicación continua tal que  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  también es continua en  $[a, b] \times [c, d]$ . Entonces:

$$g(t) = \int_a^b \varphi(s, t) ds,$$

es derivable en  $[c, d]$  con derivada,

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) ds.$$

**Lema 5.17.** Sea  $\gamma = \partial D(a, r)$  parametrizado por  $\gamma(s) = a + re^{is}$ ,  $s \in [0, 2\pi]$ . Entonces:

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i,$$

para todo  $z \in D(a, r)$ .

*Demostración.* Probaremos más adelante que la integral no depende de  $z \in D(a, r)$  (Teorema 5.40) y por tanto su valor ha de ser  $2\pi i$ , el que corresponde a  $z = a$ . No obstante deduciremos el resultado usando el Lema 5.16 y un argumento de continuidad.

Para  $t \in [0, 1]$  ponemos:

$$g(t) = \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - a - t(z - a)}$$

que es continua y derivable en  $[0, 1]$  con derivada:

$$g'(t) = (z - a) \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - a - t(z - a))^2} = (z - a) \int_{\hat{\gamma}} \frac{d\zeta}{\zeta^2},$$

con  $\hat{\gamma}$  la curva cerrada  $\hat{\gamma}(s) = re^{is} - t(z - a)$ ,  $s \in [0, 2\pi]$ . Por tanto  $g'(t) = 0$ , así  $g(1) = g(0)$  y  $g(0) = 2\pi i$ .  $\square$

*Observación 5.5.* En el Ejercicio 15 se propone otra demostración directa del lema.

El que sigue es el resultado crucial del curso.

**Teorema 5.18** (Fórmula de Cauchy en círculos). *Sea  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  derivable con derivada continua<sup>2</sup>. Si  $\overline{D(a, r)} \subset G$ ,  $\gamma(s) = a + re^{is}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  parametriza  $\partial D(a, r)$  entonces  $f$  se puede representar en la forma:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (5.1)$$

para  $z \in D(a, r)$ .

*Demostración.* En virtud del lema previo, hemos de probar que:

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Para  $t \in [0, 1]$  definimos:

$$g(t) = \int_{\gamma} \frac{f(t(\zeta - z) + z) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

que es continua y derivable en  $[0, 1]$  con:

$$g'(t) = \int_{\gamma} f'(t(\zeta - z) + z) d\zeta = \frac{1}{t} \int_{\hat{\gamma}} f'(\zeta_1) d\zeta_1,$$

donde  $\hat{\gamma}(s) = z + t(\gamma(s) - z)$ ,  $\gamma(s) = re^{is} + a$ , define una curva cerrada. Por tanto  $g'(t) = 0$ . Ello significa que  $g(0) = g(1) = 0$ .  $\square$

<sup>2</sup>Esta hipótesis es innecesaria en virtud del Teorema de Goursat (Teorema 5.29).

**Lema 5.19.** Sea  $\gamma \subset G$  una curva  $C^1$  a trozos en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$  y  $f_n$  una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a  $f$  sobre  $\gamma$ . Entonces:

$$\lim \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f.$$

El siguiente teorema establece que las funciones derivables con continuidad son analíticas, en particular  $C^\infty$ .

**Teorema 5.20.** Sea  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $G$  abierto, una función derivable con derivada continua, mientras  $D(a, r) \subset G$ . Entonces:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \quad (5.2)$$

para  $z \in D(a, r)$  siendo la serie absolutamente convergente. Por tanto,  $f$  es analítica en  $G$  y (5.2) es el desarrollo de Taylor de  $f$ :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . En consecuencia los coeficientes  $a_n$  no dependen del radio  $r$  del disco  $D(a, r)$ . Más aún:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^{(n+1)}} dz \quad (5.3)$$

para cualquier  $0 < R < r$  donde  $|z - a| = R$  se recorre en sentido positivo.

*Observación 5.6.* Las identidades (5.1) y (5.3) se conocen como las fórmulas de Cauchy. Más adelante se extienden a curvas cerradas muchos más generales que la circunferencia.

**Corolario 5.21.** Sea  $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función derivable con derivada continua en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$ ,  $a \in G$  y  $\rho_0 = \text{dist}(a, \partial G)$ . Entonces la serie de Taylor (5.2) de  $f$  en  $a$  tiene radio de convergencia  $\rho \geq \rho_0$ .

*Ejemplo 5.7.* La función  $f(z) = \text{Log}(1+z)$  es derivable en  $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$  con derivada continua. La serie de Taylor de  $f$  en  $z = z_0 \in G$  es:

$$g(z) = \text{Log}(1+z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1+z_0)^{-n} (z-z_0)^n,$$

cuyo radio de convergencia es exactamente  $|z_0+1|$ . Sin embargo, para  $\Re z_0 < -1$  la distancia de  $z_0$  a la frontera de  $G$  es exactamente  $|\Im z_0|$  que es estrictamente menor que  $|z_0+1|$ . Así pues  $f(z)$  coincide con su serie de Taylor en  $|z-z_0| < |\Im z_0|$  aunque ésta última converja en una región mayor.

Una cuestión planteada y resuelta “ad hoc” en el Capítulo III se vuelve a establecer ahora de manera más directa.

**Corolario 5.22.** Si  $f(z)$  es la suma de una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$  en su disco de convergencia  $D(b, \rho)$  entonces  $f$  es analítica en  $D(b, \rho)$ .

**Corolario 5.23.** Si  $f$  es derivable en  $\mathbb{C}$  con derivada continua entonces:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

para  $z \in \mathbb{C}$ . En particular el radio de convergencia de la serie es  $r = \infty$  y  $f$  es una función entera (Capítulo III).

**Teorema 5.24** (Teorema de Cauchy en un círculo). Sea  $f$  derivable en un círculo  $D(a, r)$  con derivada continua en  $D(a, r)$ . Si  $\gamma$  es una curva cerrada y  $C^1$  a trozos en  $D(a, r)$  se tiene que

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

**Corolario 5.25** (Estimaciones de Cauchy). Sea  $f$  una función derivable con derivada continua en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$ . Si  $D(a, R) \subset G$  y  $M = \sup_{D(a, R)} |f|$  entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

**Teorema 5.26** (Teorema de Liouville). Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es entera y acotada entonces  $f$  es constante.

*Demostración.* Sea  $M = \sup |f|$  y  $R > 0$  arbitrario. En virtud del Corolario 5.25 se tiene para  $z \in \mathbb{C}$  fijado

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

Por tanto  $f'(z) = 0$  y  $f$  es constante. □

El teorema de Liouville proporciona una prueba directa del Teorema Fundamental del Álgebra (véase el Capítulo II).

**Corolario 5.27.** Si  $p(z)$  es un polinomio de grado  $n \geq 1$  entonces existe  $a \in \mathbb{C}$  tal que  $p(a) = 0$ .

*Demostración.* Si fuese  $p(z) \neq 0$  para todo  $z$  entonces  $\frac{1}{p(z)}$  sería entera y acotada lo cual no es posible. □

## 5.4. Teoremas de Morera y de Goursat

Dados tres puntos  $\{z_0, z_1, z_2\}$  el triángulo orientado  $T$  de vértices  $\{z_0, z_1, z_2\}$  (cf. [23]), dados en ese orden, se define como la envolvente convexa de  $\{z_0, z_1, z_2\}$ :

$$T = \text{Co}(\{z_0, z_1, z_2\}) = \{t_0 z_0 + t_1 z_1 + t_2 z_2 : t_j \in [0, 1], t_0 + t_1 + t_2 = 1\}$$

El interior de  $T$  es:

$$\overset{\circ}{T} = \{t_0 z_0 + t_1 z_1 + t_2 z_2 : t_j \in (0, 1), t_0 + t_1 + t_2 = 1\}$$

mientras su frontera es la “traza” de la poligonal  $\gamma = [z_0, z_1, z_2, z_0]$  que se denomina  $\partial T$ . Nótese que se ha tomado una orientación en la frontera. Si  $f$  es continua en  $T$  entonces:

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{[z_0, z_1]} f(z) dz + \int_{[z_1, z_2]} f(z) dz + \int_{[z_2, z_0]} f(z) dz.$$

**Teorema 5.28** (Teorema de Morera). *Sea  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$  con la propiedad de que:*

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0,$$

sobre todo triángulo  $T \subset G$ . Entonces  $f$  es holomorfa en  $G$  y su derivada  $f'$  es continua en  $G$ .

*Demostración.* Es suficiente con demostrar el teorema en cada disco  $D(a, r) \subset G$ . En un tal disco definimos

$$F(z) = \int_{[a, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

La función  $F$  es derivable en  $D(a, r)$  y su derivada en  $D(a, r)$  es  $f$ . Por tanto  $F$  es de clase  $C^\infty$  y  $f = F'$  es derivable con continuidad en  $D(a, r)$ .  $\square$

Una consecuencia importante es el siguiente resultado.

**Teorema 5.29** (Teorema de Goursat). *Sea  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  una función derivable en  $G$ . Entonces la derivada  $f'$  es una función continua en  $G$ .*

*Demostración.* Se reduce a demostrar que se satisfacen las condiciones del Teorema de Morera en cada disco  $D(a, r) \subset G$  (cf. [7]).  $\square$

## 5.5. Ceros de las funciones holomorfas

**Definición 5.30.** *Sea  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  una función derivable en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$ . Se dice que  $z = a$  de  $G$  es un cero de orden  $m$  de  $f$  si*

$$f(z) = (z - a)^m g(z),$$

donde  $g$  es derivable en  $G$  y  $g(a) \neq 0$ .

*Observación 5.8.* Véase más abajo el Corolario 5.33 para una caracterización más razonable de los ceros de una función derivable.

**Teorema 5.31.** Sea  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  una función derivable en un dominio  $G \subset \mathbb{C}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $f \equiv 0$ .
2. Existe  $a \in G$  tal que  $f^{(n)}(a) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
3. El conjunto  $\{z : f(z) = 0\}$  posee un punto de acumulación en  $G$ .

**Corolario 5.32** (Principio de Prolongación Analítica). Sean  $f$  y  $g$  son dos funciones complejas derivables en un dominio  $G \subset \mathbb{C}$ . Si el conjunto:

$$\{z \in G : f(z) = g(z)\}$$

admite un punto de acumulación en  $\mathbb{C}$  entonces  $f = g$  en  $G$ .

El resultado precedente asegura que la estructura de una función derivable en un dominio  $G$  queda estrictamente controlada por sus valores en un conjunto muy pequeño. En otras palabras, no hay sino una única manera de extender una función derivable desde un pequeño conjunto (v.g. una bola) hasta un dominio  $G$  que la contenga. Por esta razón se denomina “holomorfas” a las funciones derivables. El término procede de los vocablos griegos “holos” (todo, total) y “morphos” (forma) y viene a querer decir “de una pieza”. Fue introducido por los matemáticos franceses Ch. Briot y J. C. Bouquet.

En lo que sigue usaremos ese apelativo para referirnos a las funciones derivables y por  $H(G)$  denotaremos el conjunto de las funciones holomorfas en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$ .

**Corolario 5.33.** Sea  $f \in H(G)$ . El punto  $z = a$  es un cero de orden  $m$  si y sólo si

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad k = 0, \dots, m-1, \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

**Corolario 5.34.** Los ceros de una función holomorfa no nula son siempre ceros de orden  $m$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . En particular tales ceros son siempre aislados.

## 5.6. Principio del módulo máximo

El siguiente resultado es de suma importancia especialmente en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales donde se le conoce como el principio del máximo ([14]).

**Teorema 5.35.** Sea  $f \in H(G)$  donde  $G$  es un dominio. Si existe  $a \in G$  tal que  $|f(z)| \leq |f(a)|$  para todo  $z \in G$  entonces  $f$  es constante en  $G$ .

La demostración se basa en la siguiente propiedad descubierta originalmente por Gauss en sus trabajos en teoría del potencial.

**Teorema 5.36** (Propiedad de la Media). *Sea  $f \in H(G)$  y  $\overline{D(a, r)} \subset G$ . Entonces:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

*Demostración.* Consecuencia inmediata de la fórmula de Cauchy.  $\square$

*Demostración del Teorema 5.35.* Se define:

$$\mathcal{M} = \{z \in G : |f(z)| = M\}.$$

con  $M = |f(a)|$ .  $\mathcal{M}$  es cerrado y no vacío. Como consecuencia de la propiedad de la media también es abierto y así  $\mathcal{M} = G$ .  $\square$

Como aplicación del teorema se obtiene una prueba del teorema fundamental del álgebra (véanse los ejercicios).

## 5.7. Índice de una curva

Sea  $\gamma_1(t) = a + re^{2\pi ti}$ ,  $t \in [0, n]$ . La parametrización recorre  $n$  veces la circunferencia en sentido positivo alrededor de  $a$ , mientras  $\gamma_2(t) = a + re^{-2\pi ti}$ ,  $t \in [0, n]$ , efectúa la misma operación pero en sentido negativo.

Nótese que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-a} = n \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-a} = -n.$$

A fin de generalizar esta observación se tiene en primer lugar.

**Proposición 5.37.** *Sea  $\gamma \subset \mathbb{C}$  una curva  $C^1$  a trozos y  $a \notin \gamma$ . Entonces la integral:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} \tag{5.4}$$

*siempre toma valores enteros.*

**Definición 5.38.** *El índice  $n(\gamma, a)$  de una curva  $\gamma$  con respecto a un punto  $a \notin \gamma$  se define como el valor de la integral (5.4). También se conoce como número de vueltas de  $\gamma$  en torno al punto  $a$ .*

*Observación 5.9.* Puede probarse que –como en el caso del ejemplo preliminar–  $n(\gamma, a)$  describe el número neto de circunvoluciones que efectúa  $\gamma$  alrededor de  $a$  (cf. [19]).

Las siguientes propiedades ayudan a “digerir” el concepto.

**Proposición 5.39.** *Sean  $\gamma_1, \gamma_2$  curvas cerradas de clase  $C^1$  a trozos.*

1.  $n(-\gamma_1, a) = -n(\gamma_1, a)$ .

2. Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  comparten un punto<sup>3</sup> y por tanto  $\gamma_1 + \gamma_2$  es de nuevo una curva cerrada, entonces:

$$n(\gamma_1 + \gamma_2, a) = n(\gamma_1, a) + n(\gamma_2, a).$$

Si  $\gamma$  es una curva cerrada  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  posee a lo más una cantidad numerable de componentes  $\mathcal{C}$  y sólo una de ellas es no acotada, la que designamos como la componente exterior  $\mathcal{C}_e$  de  $\gamma$ .

**Teorema 5.40.** Si  $\gamma$  es una curva cerrada  $C^1$  a trozos,  $n(\gamma, z)$  es constante sobre las componentes  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ . Además  $n(\gamma, z)$  se anula sobre la componente  $\mathcal{C}_e$ .

*Observación 5.10.* Dada una curva cerrada,  $C^1$  y no constante ¿puede asegurarse que  $n(\gamma, z)$  es no nulo en alguna componente? Posible respuesta: escribir  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  con  $\gamma_2$  de Jordan y tomar  $z$  en el interior de  $\gamma_2$ .

El siguiente resultado no es precisamente de los de demostración sencilla ([19]) salvo que se empleen herramientas adecuadas como el grado topológico (cf. [24]).

**Teorema 5.41.** Si  $\gamma$  es una curva de Jordan  $C^1$  entonces  $n(\gamma, z) = \pm 1$  en la componente interior de  $\gamma$ .

Como en el caso de  $\gamma_1(t) = a + re^{it}$ ,  $\gamma_2(t) = a + re^{-it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , las curvas de Jordan se clasifican en positivas o negativas de acuerdo con el signo de  $n(\gamma, z)$  en la componente interior.

Comprobaremos que  $n(\gamma, z)$  es invariante frente a homotopías siempre que el proceso de deformación no atravesase el punto  $z$  (cf. Sección 5.9. Esto contribuirá enormemente a conocer el índice de gran cantidad de curvas sencillas. Por ejemplo, todas las curvas poligonales convexas que se describen a favor de las agujas del reloj tienen índice 1 (medido desde la componente interior).

No obstante la siguiente versión más débil es lo suficiente versátil como para abarcar la mayoría de los ejemplos que consideramos.

**Proposición 5.42.** Sean  $\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2$ , curvas cerradas  $C^1$  definidas en  $I = [0, 1]$ ,  $\gamma_i(0) = \gamma_i(1)$ ,  $i = 1, 2$ . Supongamos que existe  $\Gamma : I \times I \rightarrow \mathbb{C}$  continua con  $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}$  continua tal que:

a)  $\Gamma(s, 0) = \gamma_1(s)$ ,  $\Gamma(s, 1) = \gamma_2(s)$ ,  $s \in I$ .

b)  $\Gamma(0, t) = \Gamma(1, t)$ ,  $t \in I$ .

Si  $z \notin \Gamma(I \times I)$  entonces:

$$n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z).$$

<sup>3</sup>Esto no es imprescindible porque la integral de línea se puede definir de forma tal que sea aditiva en las curvas  $\gamma$  aunque no se corten entre sí.

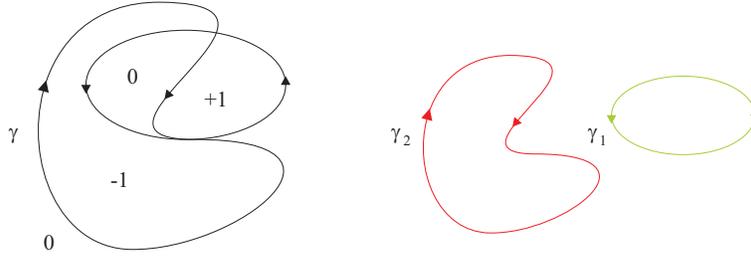


Figura 5.1: La curva  $\gamma$  es suma de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Obsérvense los distintos índices de las componentes.

Típicamente  $\gamma_1$  es una curva de Jordan dentro de otra curva de Jordan  $\gamma_2$  y es posible definir  $\Gamma$  como

$$\Gamma(s, t) = \gamma_1(s) + t(\gamma_2(s) - \gamma_1(s)).$$

Por este procedimiento se “ve” que las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  de la figura 5.1 tienen índices  $+1$  y  $-1$ . La curva  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . Se calculan así los índices de las diferentes componentes de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ .

## 5.8. Teorema de Cauchy: versión homológica

En ésta y la próxima sección tratamos de la cuestión siguiente. Si  $f$  es una función holomorfa  $f \in H(G)$  ¿será cierto que:

$$\int_{\gamma} f = 0 \tag{5.5}$$

para  $\gamma$  una curva cerrada de clase  $C^1$  en  $G$ ? Análogamente ¿será cierto que:

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{5.6}$$

para todo  $z \in G \setminus \gamma$ ?

Se ha respondido afirmativamente en el caso de la bola  $D(a, r)$ . Sin embargo, la geometría del dominio  $G$  (presencia de “agujeros”) y la posición relativa de  $\gamma$  dentro de  $G$  son importantes. En efecto  $1/z$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  y sin embargo  $\int_{\gamma} 1/z = 2\pi i$ ,  $\gamma = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

En esta sección nos ocupamos del siguiente problema: dada una curva cerrada  $\gamma$  en un abierto  $G$  ¿qué condiciones debe cumplir para que se satisfagan las relaciones (5.5), (5.6) cualquiera que sea la función holomorfa  $f \in H(G)$ ?

Introducimos la siguiente definición.

**Definición 5.43.** Se dice que una curva cerrada y  $C^1$  a trozos  $\gamma \subset G$ ,  $G \subset \mathbb{C}$  un abierto, es homóloga a cero en  $G$  y escribimos  $\gamma \approx 0$  si se tiene que:

$$n(\gamma, z) = 0,$$

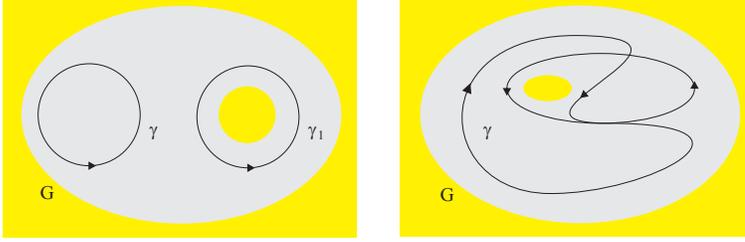


Figura 5.2: Las curvas  $\gamma$  cumplen  $\gamma \approx 0$  en  $G$ . En cambio  $\gamma_1 \not\approx 0$  en  $G$ .

para todo  $z \notin G$ .

*Observación 5.11.* Si  $\gamma$  hace válidas las propiedades (5.5), (5.6) para funciones holomorfas arbitrarias, entonces  $\gamma \approx 0$ . En efecto, basta tomar  $f(z) = \frac{1}{z-a}$  con  $a \notin G$  para concluir que  $\gamma$  tiene que ser homóloga a cero.

El mejor ejemplo se da en la siguiente propiedad.

**Proposición 5.44.** Sea  $\gamma$  una curva de Jordan  $C^1$  a trozos contenida en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$ . Entonces  $\gamma \approx 0$  en  $G$  si y sólo si su componente interior  $C_i \subset G$ .

En la figura 5.2 se muestran curvas de Jordan y no de Jordan homólogas a cero en  $G$ .

Para su uso en el resto del capítulo introducimos la siguiente noción. Dada una familia de curvas cerradas  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  introducimos la suma  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$  por el mismo procedimiento que en la Sección 5.2 aunque el resultado sea de facto una curva sólo continua a trozos. Para tales curvas se definen:

$$n(\gamma, z) = \sum_{k=1}^m n(\gamma_k, z), \quad \int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f,$$

donde  $z \notin \gamma_k$  para todo  $k$  y  $f$  es continua sobre los  $\gamma_k$ . Es costumbre llamar *cadena* a tal suma (cf. [25]). Como en el caso precedente se dice que una cadena  $\gamma$  es homóloga a cero  $\gamma \approx 0$  si

$$n(\gamma, z) = \sum_{k=1}^m n(\gamma_k, z) = 0,$$

para todo  $z \notin G$ .

En la figura 5.3 se dan ejemplos de cadenas homólogas a cero en  $G$ .

El resultado siguiente se debe a J. D. Dixon (1971) ([9]).

**Teorema 5.45** (Fórmula de Cauchy). Sea  $G$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f \in H(G)$ . Si  $\gamma$  es una curva cerrada  $C^1$  a trozos tal que  $\gamma \approx 0$  en  $G$  entonces:

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (5.7)$$

para todo  $z \in G \setminus \gamma$

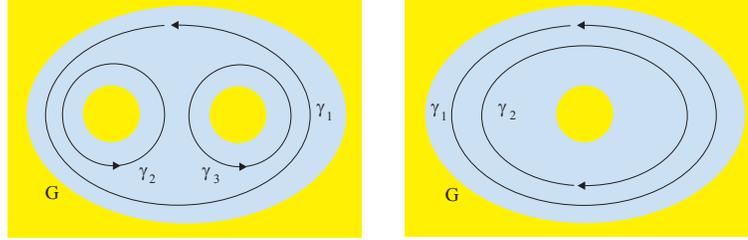


Figura 5.3: Cadenas homólogas a cero en  $G$ . A la izquierda  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ . A la derecha  $\gamma_1 + \gamma_2$ .

**Corolario 5.46** (Teorema de Cauchy). Si  $f \in H(G)$  y  $\gamma$  es una curva cerrada a trozos que es homóloga a 0 en  $G$  entonces:

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

**Corolario 5.47.** Sean  $G \subset \mathbb{C}$  un abierto,  $f \in H(G)$  y  $\gamma \subset \mathbb{C}$  una curva de Jordan  $C^1$  a trozos orientada positivamente con interior  $\mathcal{C}_i \subset G$ . Entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz,$$

para todo  $z \in \mathcal{C}_i$ .

La fórmula de Cauchy se extiende fácilmente a las derivadas. Sólo hace falta la propiedad siguiente.

**Proposición 5.48.** Sea  $\gamma \subset \mathbb{C}$  una curva cerrada  $C^1$  a trozos y  $g$  una función continua en  $\gamma$ . Entonces

$$f_m(z) := \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^m} dz$$

es derivable en  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  con derivada

$$f'_m(z) = m f_{m+1}(z).$$

En particular, si  $f(z) = f_1(z)$  se tiene que:

$$f^{(m)}(z) = m! f_{m+1}(z).$$

Se tiene entonces el siguiente resultado.

**Teorema 5.49.** En las condiciones del Teorema 5.45 se tiene que:

$$n(\gamma, z) f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta, \quad (5.8)$$

para todo  $z \in G \setminus \gamma$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . En particular, si  $\gamma$  cumple las condiciones del Corolario 5.47 se tiene que:

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta,$$

para todo  $z \in C_i$ .

*Demostración.* Basta con derivar  $m$  veces la igualdad (5.7) observando los dos miembros como una función de  $z$  en una bola  $D(z_0, r)$  que no corte a  $\gamma$ . Como  $n(\gamma, z)$  es constante en dicha bola ese término no se deriva y se tiene la identidad deseada en  $z_0$ , donde  $z_0$  varía arbitrariamente en  $G \setminus \{z_0\}$ .  $\square$

Los Teoremas 5.45 y 5.49 y el Teorema de Cauchy se extienden fácilmente a cadenas.

**Teorema 5.50.** Sea  $f \in H(G)$  y  $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$  una cadena  $C^1$  a trozos que cumple  $\gamma \approx 0$  en  $G$ . Entonces:

a)  $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z) dz = 0.$

b) Se tiene:

$$\left\{ \sum_{k=1}^m n(\gamma_k, z) \right\} f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (5.9)$$

para todo  $z \in G \setminus \gamma$ .

b) Se cumple asimismo:

$$\left\{ \sum_{k=1}^m n(\gamma_k, z) \right\} f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^m \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad (5.10)$$

para todo  $z \in G \setminus \gamma$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

Una bonita aplicación del Teorema 5.50 es la fórmula de Cauchy para anillos.

**Proposición 5.51.** Sea  $f \in H(A)$  donde  $A = A(a; R_1, R_2) = \{z : R_1 < |z - a| < R_2\}$ ,  $R_1 < R_2$ . Sean  $\gamma_j(s) = a + r_j e^{is}$ ,  $s \in [0, 2\pi]$ ,  $j = 1, 2$ ,  $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ .

Entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz.$$

Otra aplicación interesante.

**Proposición 5.52.** Sea  $f \in H(G \setminus \{z_1, \dots, z_m\})$  donde  $G \subset \mathbb{C}$  un abierto y  $\{z_1, \dots, z_m\} \subset G$ . Sea  $\gamma$  una curva de Jordan  $C^1$  a trozos con  $C_i \subset G$  y  $\{z_1, \dots, z_m\} \subset C_i$ . Sean  $\gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , circunferencias con centro en  $z_j$ ,  $\gamma_j \subset C_i$ , de la misma orientación que  $\gamma$  y tales que las  $\gamma_j$  son disjuntas dos a dos. Entonces:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

## 5.9. Teorema de Cauchy: versión homotópica

**Definición 5.53.** Sean  $\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $I = [0, 1]$ ,  $i = 0, 1$ , dos curvas cerradas  $C^1$  a trozos en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$ . Se dice que  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son homotopías en  $G$  y se escribe  $\gamma_0 \sim \gamma_1$  (en  $G$ ) si existe una aplicación  $\Gamma : I \times I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Gamma = \Gamma(s, t)$  (una homotopía) con las siguientes propiedades:

- a)  $\Gamma$  es continua.
- b)  $\Gamma(s, 0) = \gamma_0(s)$ ,  $\Gamma(s, 1) = \gamma_1(s)$ ,  $s \in I$ .
- c)  $\Gamma(0, t) = \Gamma(1, t)$ ,  $t \in I$ .
- d)  $\Gamma(I \times I) \subset G$

*Observación 5.12.* La definición de curvas cerradas homotópicas se introduce sin cambio alguno en el contexto de las curvas cerradas meramente continuas.

**Definición 5.54.** Se dice que una curva cerrada  $C^1$  a trozos  $\gamma$  en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$  es homotópica a cero en  $G$  y se escribe  $\gamma \sim 0$  (en  $G$ ) si  $\gamma \sim \gamma_0$  donde  $\gamma_0$  es una curva cerrada constante  $\gamma_0(s) = z_0$  para  $z_0 \in G$  y todo  $s \in I$ .

*Ejemplo 5.13.* Si  $G$  es un abierto convexo o un abierto estrellado con respecto a un cierto punto  $a \in G$  entonces todas las curvas cerradas  $\gamma$  de  $G$  son homotópicas a cero en  $G$ .

**Definición 5.55.** Se dice que un dominio  $G \subset \mathbb{C}$  (un conjunto abierto y conexo de  $\mathbb{C}$ ) es simplemente conexo si toda curva cerrada  $\gamma$  en  $G$  es homotópica a cero en  $G$ .

Podemos enunciar ya la versión homotópica del Teorema de Cauchy.

**Teorema 5.56.** Sea  $G \subset \mathbb{C}$  un abierto,  $f \in H(G)$  y  $\gamma$  una curva cerrada  $C^1$  a trozos en  $G$ . Si  $\gamma \sim 0$  en  $G$  entonces:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

El teorema es consecuencia del resultado más general siguiente.

**Teorema 5.57.** Sean  $G \subset \mathbb{C}$  un abierto,  $f \in H(G)$  y  $\gamma_i$ ,  $i = 0, 1$  dos curvas cerradas  $C^1$  a trozos en  $G$ . Si  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son homotópicas en  $G$  entonces:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz.$$

Otro corolario del teorema es el siguiente.

**Corolario 5.58.** Sea  $G \subset \mathbb{C}$  un abierto y  $\gamma$  una curva cerrada  $C^1$  a trozos en  $G$ . Si  $\gamma$  es homotópica a cero en  $G$  ( $\gamma \sim 0$  en  $G$ ) entonces  $\gamma$  es homóloga a cero en  $G$  ( $\gamma \approx 0$  en  $G$ ).

Análogamente.

**Corolario 5.59.** Sean  $\gamma_i$ ,  $i = 0, 1$  dos curvas cerradas  $C^1$  a trozos en  $\mathbb{C}$ ,  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  homotópicas en  $\mathbb{C}$  mediante una homotopía  $\Gamma : I \times I \rightarrow \mathbb{C}$ . Si  $z \in \mathbb{C}$  satisface que:

$$z \notin \Gamma(I \times I)$$

entonces se tiene que:

$$n(\gamma_1, z) = n(\gamma_0, z).$$

La noción de homotopía no se limita a curvas cerradas.

**Definición 5.60.** Sean  $\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $I = [0, 1]$ ,  $i = 0, 1$ , dos curvas  $C^1$  a trozos en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$  con los mismos extremos, es decir, tales que  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$  y  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ . Se dice que  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son homotopías en  $G$  y se escribe  $\gamma_0 \sim \gamma_1$  (en  $G$ ) si existe una aplicación  $\Gamma : I \times I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Gamma = \Gamma(s, t)$  (una homotopía) con las siguientes propiedades:

- a)  $\Gamma$  es continua.
- b)  $\Gamma(s, 0) = \gamma_0(s)$ ,  $\Gamma(s, 1) = \gamma_1(s)$ ,  $s \in I$ .
- c)  $\Gamma(0, t) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$  y  $\Gamma(1, t) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$  para todo  $t \in I$ .
- d)  $\Gamma(I \times I) \subset G$

Otro corolario del Teorema 5.61 es el siguiente.

**Corolario 5.61.** Sean  $G \subset \mathbb{C}$  un abierto,  $f \in H(G)$  y  $\gamma_i$ ,  $i = 0, 1$  dos curvas  $C^1$  a trozos en  $G$  definidas en  $I = [0, 1]$  y con los mismos extremos, es decir  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$  y  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ . Si  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son homotópicas en  $G$  entonces:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz.$$

Para concluir se tienen los siguientes resultados.

**Teorema 5.62.** Si  $G \subset \mathbb{C}$  es un dominio (abierto y conexo) simplemente conexo y  $f \in H(G)$  entonces  $f$  admite una primitiva en  $G$ .

**Teorema 5.63.** Sea  $G \subset \mathbb{C}$  un dominio (abierto y conexo) simplemente conexo y  $f \in H(G)$  tal que  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in G$ . Entonces existe una rama  $g(z)$  del  $\log(f(z))$  definida en todo  $G$ , es decir:

$$f(z) = e^{g(z)},$$

para todo  $z \in G$ . Más aún, si  $w_0$  es tal que  $f(z_0) = e^{w_0}$  es decir  $w_0$  es un logaritmo de  $f(z_0)$ , se puede elegir la rama  $g(z)$  tal que  $g(z_0) = w_0$ .

### 5.10. Teorema de la aplicación abierta

En el siguiente capítulo se prueba el Principio del Argumento (cf. Teorema 6.17) y el que sigue es un caso particular de aquél.

**Teorema 5.64.** *Sea  $f$  una función holomorfa en  $G$ ,  $G$  abierto de  $\mathbb{C}$ , cuyos ceros en  $G$  son  $b_1, \dots, b_m$ . Si  $\gamma$  es una curva cerrada  $C^1$  a trozos de  $G$  que es homóloga a cero en  $G$  entonces:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \sum_{k=1}^m n(\gamma, b_k) \beta_k$$

donde  $\beta_k$  designa la multiplicidad del cero  $b_k$ .

Si  $\gamma \subset G$  es en particular una curva de Jordan orientada positivamente con interior  $\mathcal{C}_i \subset G$  se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \sum_{b_k \in \mathcal{C}_i} \beta_k = Z,$$

donde  $Z$  es el número de ceros de  $f$  en  $\mathcal{C}_i$  (contados con su orden de multiplicidad).

**Teorema 5.65** (Teorema de Rouché). *Sean  $f, g \in H(G)$ ,  $\gamma \subset G$  una curva de Jordan  $C^1$  a trozos con interior  $\mathcal{C}_i \subset G$ . Si*

$$|f(z) + g(z)| < |g(z)|$$

para todo  $z \in \gamma$  entonces  $f$  y  $g$  poseen el mismo número de ceros en  $\mathcal{C}_i$ .

*Observación 5.14.* Del resultado precedente se siguen dos consecuencias directas. La primera el teorema fundamental del álgebra. La segunda, la continuidad de las raíces de un polinomio con respecto a sus coeficientes.

Supongamos que  $f \in H(G)$ ,  $G$  un dominio de  $\mathbb{C}$ , que  $f(z) = \alpha$  para algún  $z \in G$  y que  $f$  no es constante en  $G$ . Si la ecuación  $f(z) = \alpha$  posee infinitas soluciones en  $G$  éstas conforman una sucesión  $\{a_n\}$  con  $\text{dist}(a_n, \partial\Omega) \rightarrow 0$ . Resulta entonces útil el siguiente resultado.

**Lema 5.66.** *Sea  $\gamma \subset G$  una curva cerrada  $C^1$  a trozos, homóloga a cero en  $G$ . Se tiene entonces que:*

$$n(\gamma, z) = 0$$

para todo  $z \in G$  tal que  $\text{dist}(z, \partial\Omega) < \frac{r}{2}$  donde  $r = \text{dist}(\gamma, \partial\Omega)$ .

**Teorema 5.67.** *Sea  $f \in H(G)$  y  $a \in G$  tal que  $f(a) = \alpha$ . Si  $f(z) - \alpha$  posee un cero de orden  $m$  en  $z = a$  entonces existen  $\varepsilon, \delta > 0$  tales que para todo  $\zeta$  tal que:*

$$0 < |\zeta - \alpha| < \delta,$$

existen  $m$  raíces simples de la ecuación:

$$f(z) = \zeta$$

en la región:

$$0 < |z - a| < \varepsilon.$$

Una consecuencia inmediata es el siguiente resultado.

**Teorema 5.68** (Teorema de la Aplicación Abierta). *Sean  $G \subset \mathbb{C}$  un dominio y  $f \in H(G)$  no constante. Entonces  $f(G)$  es abierto en  $\mathbb{C}$ .*

Otra consecuencia sorprendente.

**Teorema 5.69.** *Sean  $G \subset \mathbb{C}$  un dominio y  $f \in H(G)$  e inyectiva. Entonces  $f'(z) \neq 0$  para todo  $z \in G$  y por lo tanto  $f^{-1}$  es holomorfa en  $\Omega = f(G)$ .*

### 5.11. Ejercicios

#### A) Integración compleja

1. Sea  $\gamma(t) = \exp((-1+i)t^{-1})$  para  $0 < t \leq 1$ ,  $\gamma(0) = 0$ . Demostrar que  $\gamma$  es rectificable calculando la longitud de arco.
2. Probar que  $\gamma(t) = t + it \operatorname{sen} 1/t$ ,  $0 < t \leq 1$ ,  $\gamma(0) = 0$  no es rectificable (nótese que  $\gamma$  es continuo pero no  $C^1$  a trozos).
3. Para  $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ , denotamos  $[z_{k-1}, z_k]$  el segmento de  $z_{k-1}$  a  $z_k$ , por  $[z_0, \dots, z_n]$  la poligonal constituida por tales segmentos. Sean  $\gamma_1 = [1, i]$ ,  $\gamma_2 = [1, 1+i, i]$ . Calcúlense:

$$\int_{\gamma_i} z^2 dz, \quad i = 1, 2.$$

4. Defínase  $\gamma(t) = \exp(int)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Calcular:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz.$$

5. Calcular:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz,$$

siendo ahora  $\gamma = [1-i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i]$ .

6. Calcular:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz,$$

donde a)  $\gamma$  es  $\{|z| = 1, \Im z \geq 0\}$  de  $+1$  a  $-1$ , b)  $\gamma$  es  $\{|z| = 1, \Im z \leq 0\}$  de  $+1$  a  $-1$ .

7. Se define  $\gamma(t) = r \exp(it)$ ,  $t \in [0, \pi]$ ,

$$I(r) = \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Calcular  $\lim_{r \rightarrow 0^+} I(r)$ .

8. Para  $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , hallar  $\int_{\gamma} (z^2 - 1)^{-1} dz$ .
9. Sea  $\gamma$  una curva cerrada  $C^1$  a trozos en un abierto  $G$  y supóngase que  $a \notin G$ . Pruébese que para  $n \geq 2$ ,  $\int_{\gamma} (z-a)^{-n} dz = 0$ .
10. Sean  $f, g$  funciones holomorfas en un abierto  $G \subset \mathbb{C}$  con derivadas  $f', g'$  continuas en  $G$ . Si  $\gamma$  es una curva  $C^1$  a trozos de extremos  $a, b$ , pruébese que:

$$\int_{\gamma} f g' dz = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_{\gamma} f' g dz.$$

11. El teorema de Cauchy en una bola  $B = B(a, R)$  establece que si  $f$  es holomorfa con derivada continua en  $B$  y  $\gamma$  es  $C^1$  a trozos entonces:

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Extender el teorema de bolas a "semitplanos".

12. Calcúlense las siguientes integrales ( $0 \leq t \leq 2\pi$  en todos los casos):

$$a) \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2} dz, \quad b) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}, \quad c) \int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} dz, \quad d) \int_{\gamma} \frac{\log z}{z^n} dz,$$

donde  $\gamma = e^{it}$  en a), c),  $\gamma = a + re^{it}$  en b),  $\gamma = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$  en d).

13. Calcular las integrales:

$$a) \int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz, \quad b) \int_{\gamma} \frac{1}{(z - \frac{1}{2})^n} dz, \quad c) \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz,$$

$$d) \int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z} dz, \quad e) \int_{\gamma} \frac{z^{1/m}}{(z-1)^m} dz,$$

en donde  $0 \leq t \leq 2\pi$  en todos los casos,  $\gamma = e^{it}$  en a), b), d),  $\gamma = 2e^{it}$  en c),  $\gamma = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$  en e).

14. Calcular:

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4)} dz,$$

$\gamma = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , para todos los valores posibles de  $r \in (0, 2) \cup (2, \infty)$ .

15. (♣) Usar la serie geométrica para probar que:

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i,$$

para  $z \in D(a, r)$ , donde  $\gamma(s) = a + re^{is}$ ,  $s \in [0, 2\pi]$ .

#### B) Desarrollos en serie de potencias

16. Hallar el desarrollo en serie de potencias de  $\operatorname{Log} z$  en  $z = i$ , ¿cuál es su radio de convergencia?
17. Calcular, determinando el radio de convergencia, el desarrollo en serie de potencias de  $\sqrt{z}$  en  $z = 1$ .

18. Se consideran las funciones

$$g_\lambda(z) = 1 + \lambda z + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda+n-1)}{n!} z^n + \dots$$

y  $(1+z)^\lambda$  (en su definición estándar, usando la parte principal). Demuéstrase que  $g_\lambda(z) = (1+z)^\lambda$  en  $|z| < 1$ .

19. Sea  $z_0$  un punto del dominio de holomorfía de  $f(z) = (1+z)^\lambda$ . Hállese el desarrollo en serie de potencias de  $f$  en  $z_0$  calculando el radio de convergencia.

20. Pruébese que:

$$f(z) = \frac{1}{2i} \log \left( \frac{1+iz}{1-iz} \right)$$

define, en un dominio  $G \subset \mathbb{C}$  por determinar, una rama de la función arcotangente (véase el Capítulo III). Es decir:

$$\text{tag}(f(z)) = z, \quad z \in G.$$

Tras comprobar que  $0 \in G$  pruébese que el desarrollo de  $f(z)$  en  $z = 0$  es:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

determinando el radio de convergencia de la serie.

21. Hallar el desarrollo en serie de  $\frac{e^z - 1}{z}$  en  $z = 0$  determinando el radio de convergencia. Definiendo:

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1},$$

y escribiendo su desarrollo en serie como:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k,$$

determinar el radio de convergencia.

Pruébese además que:

$$\binom{n}{n-1} a_{n-1} + \binom{n}{n-2} a_{n-2} + \dots + \binom{n}{1} a_1 + a_0 = 0,$$

para  $n \geq 2$ .

22. Si  $f$  es como en el problema 21 probar que  $f(z) + \frac{1}{2}z$  es una función par. Dedúzcase de ahí que  $a_k = 0$  para  $k = \dot{2} + 1$ . Los  $B_{2n} = (-1)^{n-1} a_{2n}$ ,  $n \geq 1$  se llaman los números de Bernoulli. Calcular  $B_2, B_4, B_6$ .

## C) Ceros, prolongación analítica

23. Si  $f, g$  son holomorfas con derivada continua en un dominio  $G$ ,  $f(z)g(z) = 0$  para cada  $z \in G$  demostrar que o bien  $f \equiv 0$  o bien  $g \equiv 0$ .

24. Siendo  $f$  y  $g$  funciones holomorfas con derivada continua en un dominio  $G$  se supone que  $\bar{f}g$  es también holomorfa con derivada continua en  $G$ . Pruébese que o bien  $f$  es constante o bien  $g \equiv 0$ .

25. Sea  $f$  una función entera (es decir holomorfa con derivada continua en  $\mathbb{C}$ ) que cumple:

$$f'(z)^2 + f(z)^2 = 0,$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . ¿Qué se puede decir de una tal  $f$ ?

26. [Regla de l'Hospital] Supongamos que  $f(z), g(z)$  tienen un cero de orden  $m$  en  $z = a$ . Probar que existe el  $\lim_{z \rightarrow a} f/g$  y que:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(z)}{g^{(n)}(z)}.$$

27. Si  $f, g$  holomorfas en  $G$  con derivada continua,  $f(a) = g(a) = 0$  para algún  $a \in G$ ,  $g \not\equiv 0$  en  $G$ , demostrar que siempre existe:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)},$$

(aunque sea  $\infty$  en algunos casos).

## D) Estimaciones de Cauchy. Principio del módulo máximo.

28. Sea  $f$  una función entera que satisface la estimación:

$$|f(z)| \leq M|z|^n,$$

para todo  $z$  con  $|z| \geq R$  y cierto  $n \in \mathbb{N}$ . Pruébese que  $f$  ha de ser un polinomio de grado no superior a  $n$ .

*Indicación.* Estímense las derivadas de  $f$  en  $z = 0$ .

29. Sea  $f$  derivable con derivada continua en un dominio  $G$  para la que existe  $a \in G$  cumpliendo:

$$|f(z)| \geq |f(a)|,$$

para todo  $z \in G$ . Demostrar que, o bien  $f(a) = 0$  o bien  $f$  es constante en  $G$ .

30. Usar 29 para dar una demostración alternativa del teorema fundamental del álgebra.

31. Sea  $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica,  $u(z) \geq 0$  en  $\mathbb{C}$ . Demostrar que  $u$  es constante.

*Indicación.* Constrúyase en primer lugar una función entera.

E) *Índice de una curva (número de vueltas). Fórmulas de Cauchy.*

32. (♣) Construir un ejemplo de curva cerrada  $\gamma$  de suerte que para todo entero  $m \in \mathbb{Z}$  exista un punto  $a \notin \gamma$  tal que:

$$n(\gamma, a) = m.$$

33. Dar una prueba directa de que si  $\gamma(t) = a + re^{is}$ ,  $0 \leq s \leq 2\pi$  (una parametrización de  $\partial B(a, r)$ ) y si  $z_0 \notin \bar{B}(a, r)$  entonces:

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 0.$$

*Indicación.* Buscar una primitiva de  $1/(z - z_0)$ .

34. (♣) Sea  $K$  un compacto convexo cuya frontera  $\gamma = \partial K$  es una curva cerrada  $C^1$  a trozos. Usando la idea de 33 pruébese asimismo que:

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 0.$$

*Indicación.* Se trata de encontrar toda una semirrecta por  $z_0$  en el exterior de  $K$ .

35. Si  $p(z)$  es un polinomio de grado  $n$  y  $R > 0$  es tal que  $p(z) \neq 0$  para  $|z| \geq R$ , pruébese que:

$$\int_{\gamma} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n,$$

donde  $\gamma(t) = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  y  $r$  es cualquier número  $r \geq R$ .

*Indicación.* Puede ser útil factorizar el polinomio.

36. Sean  $B_{\pm} = B(\pm 1, 1/2)$  y  $G = B(0, 3) \setminus \{B_- \cup B_+\}$ . Sean asimismo  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  las curvas cerradas  $|z - 1| = 1$ ,  $|z + 1| = 1$ ,  $|z| = 2$ . Defínense en las  $\gamma_i$  orientaciones adecuadas de suerte que:

$$n(\gamma_1, z) + n(\gamma_2, z) + n(\gamma_3, z) = 0,$$

para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus G$ .

37. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  continua que es además derivable con derivada continua en  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . Pruébese que  $f$  es en realidad una función entera.

*Indicación.* Puede venir bien acordarse de Morera.

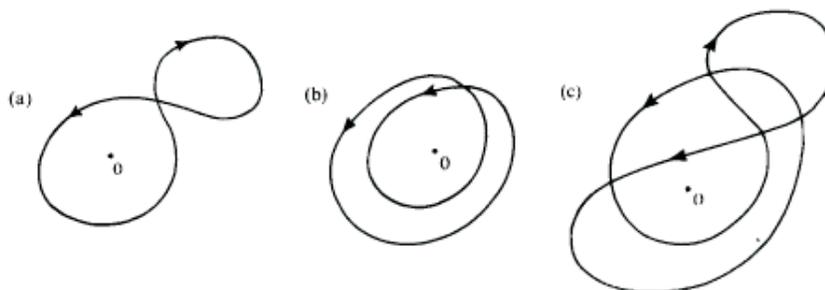
38. [Convergencia uniforme y holomorfía] Sean  $f_n \in H(G)$ ,  $f_n \rightarrow f$  uniformemente en  $G$ . Pruébese que  $f \in H(G)$ .
39. Se sabe que  $f$  es holomorfa en  $B(0, 1)$  y que  $|f(z)| \leq 1$  para  $|z| < 1$ . Demostrar que  $|f'(0)| \leq 1$ .
40. Sea  $\gamma(s) = se^{is}$ ,  $0 \leq s \leq 2\pi$ ,  $\gamma(s) = 4\pi - s$ ,  $2\pi \leq s \leq 4\pi$ . Calcular:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + \pi^2}.$$

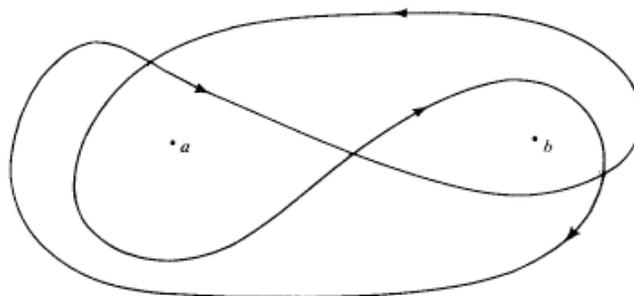
41. Evaluar:

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz,$$

donde  $\gamma$  es cada una de las curvas que se indican a continuación.



42. Sea  $G = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ ,  $a \neq b$  y sea  $\gamma$  la curva cerrada que se indica en la figura:



- a) Probar que  $n(\gamma, a) = n(\gamma, b) = 0$ . Conclúyase que  $\gamma$  es homóloga a cero en  $G$  ( $\gamma \approx 0$ ).
- b) Convéznase el lector (con el argumento intuitivo que me mejor le venga) de que  $\gamma$  no es homótopa a 0 en  $G$ .

43. Evaluar la integral:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}$$

donde  $\gamma(s) = 2|\cos 2s|e^{is}$ ,  $0 \leq s \leq 2\pi$ .

44. Se consideran la poligonal  $\gamma = [0, 2, 2 + 2i, 2i, 0]$ , los puntos:

$$z_1 = \frac{1}{2} + i, \quad z_2 = 1 + \frac{3}{2}i, \quad z_3 = 1 + \frac{i}{2}, \quad z_4 = \frac{3}{2} + i,$$

y la función:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)}.$$

Hallar:

$$\int_{\gamma} f.$$

45. Sea  $\gamma$  una curva cerrada  $C^1$  a trozos en  $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ . Se pide calcular todos los posibles valores de la integral:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1 + z^2}.$$

## CAPÍTULO 6

# Singularidades de las funciones complejas

En el presente capítulo usaremos el siguiente resultado (ver Capítulo V):  $f \in H(G)$ , no idénticamente nula en un dominio  $G \subset \mathbb{C}$ , posee un cero en  $z = a$  si y sólo si existe  $m \in \mathbb{N}$  con  $f^{(k)}(a) = 0$  para  $0 \leq k \leq m-1$  y  $f^{(m)}(a) \neq 0$ . Esto equivale a la existencia de  $g \in H(G)$  tal que  $g(a) \neq 0$  con  $f(z) = (z-a)^m g(z)$ .

### 6.1. Singularidades aisladas

**Definición 6.1.** Se dice que una función compleja  $f$  tiene en  $z = a$  una singularidad aislada si  $f \in H(D(a, r) \setminus \{a\})$  y  $f$  no es holomorfa en  $D(a, r)$ . La singularidad es evitable si existe  $g \in H(D(a, r))$  con  $g = f$  en  $D(a, r) \setminus \{a\}$ .

Obsérvese que en el último caso sólo puede existir una única función  $g \in H(D(a, r))$  que satisfice  $f = g$  en  $D(a, r) \setminus \{a\}$ .

*Ejemplos 6.1.*

a)  $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$  posee una singularidad evitable en  $z = 0$ .

b)  $f(z) = \frac{1}{z}$  y  $f(z) = e^{1/z}$  poseen una singularidad en  $z = 0$  que no es evitable.

**Teorema 6.2.** Sea  $z = a$  una singularidad aislada de una función compleja  $f$ . La singularidad es evitable si y sólo si

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0.$$

*Observación 6.2.* El resultado precedente no es válido en el caso real como muestra el ejemplo de la función  $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$  en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Definición 6.3.** Sea  $z = a$  una singularidad aislada de  $f$ . Se dice que  $z = a$  es un polo si

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

*Ejemplos 6.3.*

a)  $f(z) = \frac{1}{z^m}$  posee un polo en  $z = 0$ .

b) El punto  $z = 0$  no es un polo de  $f(z) = e^{1/z}$  pues ni siquiera posee límite cuando  $z \rightarrow 0$ .

**Teorema 6.4.** Sea  $f \in H(G \setminus \{a\})$  donde  $a \in G$ . Se tiene que  $z = a$  es un polo de  $f$  si y sólo si existen  $m \in \mathbb{N}$  y  $g \in H(G)$  únicos tales que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m},$$

para  $z \in G \setminus \{a\}$ , donde  $g$  es holomorfa en  $G$  con  $g(a) \neq 0$ .

*Observación 6.4.* La función  $g$  del Teorema 6.4 se puede escribir en la forma:

$$g(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m g_m(z),$$

donde  $g_m \in H(G)$ . Los primeros  $m$  sumandos son los del desarrollo de Taylor cuyos coeficientes hemos nombrado de manera distinta a la habitual.

Por tanto:

$$g(z) = S(z) + g_m(z),$$

donde

$$S(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)}.$$

**Definición 6.5.** Se llama orden del polo  $z = a$  al entero  $m$  del Teorema 6.4, asimismo se dice que  $S(z)$  es la parte singular de  $f$  en  $z = a$ . El coeficiente  $a_{-1}$  se denomina –por razones que se hacen claras más tarde– el residuo del polo. Se denota:

$$a_1 = \text{Res}(f, a).$$

**Proposición 6.6.** Si  $z = a$  es un polo de  $f$  entonces:

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} ((z-a)^m f(z)).$$

Si el polo  $z = a$  es simple ( $m = 1$ ) se tiene que:

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

**Proposición 6.7.** Sea  $f$  una función holomorfa en  $G \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$ ,  $G \subset \mathbb{C}$  un abierto y  $\{a_1, \dots, a_N\} \subset G$ . Supongamos que cada uno de los  $z = a_j$  es un polo de la función  $f$  de orden  $m_j$ . Entonces:

a)  $f$  se puede escribir en la forma:

$$f(z) = S_1(z) + \cdots + S_n(z) + g(z),$$

$z \in G \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$  donde para cada  $0 \leq j \leq N$

$$S_j(z) = \frac{a_{-m_j}^{(j)}}{(z - a_j)^{m_j}} + \dots + \frac{a_{-1}^{(j)}}{(z - a_j)}$$

y  $g$  es holomorfa en  $G$ .

b)  $f$  admite asimismo la representación:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a_1)^{m_1} \dots (z - a_N)^{m_n}}.$$

$z \in G \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$ , donde  $g$  (que no es la misma que en a)) es holomorfa en  $G$ .

*Demostración.* Probamos b), por ejemplo, usando inducción. Si  $f$  tiene  $N + 1$  polos  $\{a_1, \dots, a_{N+1}\}$  en  $G$ ,  $f$  tiene  $N$  polos en  $G_1 = G \setminus \{a_{N+1}\}$  de donde

$$f(z) = S_1(z) + \dots + S_n(z) + g(z),$$

con  $g \in H(G_1)$ . Como  $g$  tiene un polo en  $a_{N+1}$  entonces

$$g(z) = S_{N+1}(z) + \tilde{g}(z),$$

con  $\tilde{g} \in H(G)$ . Basta sustituir y hemos terminado.  $\square$

Introducimos ahora la noción de función meromorfa (cf. [23]).

**Definición 6.8.** Se dice que una función compleja es meromorfa en un abierto  $G$  si es holomorfa en  $G \setminus \{a_n\}$  donde todos los elementos de la sucesión  $\{a_n\} \subset G$  son polos o singularidades evitables y  $\{a_n\} \subset G$  carece de puntos de aglomeración en  $G$ .

*Ejemplos 6.5.*

- a) Toda función racional es meromorfa en  $\mathbb{C}$ .  
 b) Las funciones  $\tan z$ ,  $\cot z$ ,  $\sec z$ ,  $\csc z$ ,  $\tanh z$ ,  $\coth z$  son todas meromorfas en  $\mathbb{C}$ .

*Ejercicio 6.1.* Pruébese que si  $f \neq 0$  es meromorfa en un dominio  $G$  entonces  $1/f$  también lo es.

## 6.2. Desarrollos de Laurent

Comenzamos con una definición.

**Definición 6.9.** Se dice que la serie  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$  converge (respectivamente, converge absolutamente) si convergen (convergen absolutamente) las series  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$  escribiéndose:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

La misma convención se observa para la convergencia puntual y uniforme de series funcionales de este tipo.

**Teorema 6.10.** Sea  $f$  una función holomorfa en el anillo

$$A = A(a, R_1, R_2) = \{z : R_1 < |z - a| < R_2\} \quad 0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty.$$

Entonces la función se puede representar mediante la serie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad (6.1)$$

para todo  $z \in A$ . Además:

- 1) La representación (6.1) es única.
- 2) Los coeficientes  $a_n$  de la serie se representan en la forma

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz,$$

donde  $\gamma_r(s) = a + re^{is}$ ,  $s \in [0, 2\pi]$  y  $r$  es cualquier valor cumpliendo  $R_1 < r < R_2$ .

- 3) La serie converge absoluta y uniformemente sobre compactos de  $A(a, R_1, R_2)$  (es decir, uniformemente en cada subanillo cerrado  $\bar{A}(a, r_1, r_2)$  de  $A(a, R_1, R_2)$ ,  $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ ).

*Observación 6.6.* Nótese que el enunciado contempla diversas clases de anillos degenerados. Por ejemplo, el “disco perforado”  $D(a, R_2) \setminus \{a\}$  ( $R_1 = 0$ ), el exterior de un disco  $\mathbb{C} \setminus \overline{D(a, R_1)}$  ( $R_2 = \infty$ ) e incluso  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $R_1 = 0, R_2 = \infty$ ).

**Definición 6.11.** Si  $z = a$  es una singularidad aislada de una función compleja  $f$  se define el desarrollo de Laurent de la función en  $z = a$  al correspondiente a cualquier anillo  $D(a, r) \setminus \{a\}$  donde la función esté definida y sea holomorfa.

*Observación 6.7.* Si  $z = a$  es una singularidad aislada de  $f$  y (6.1) su desarrollo de Laurent, se suele designar a  $g_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$  la parte regular de  $f$  y a  $g_-(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - a)^{-n}$  la parte singular.

*Demostración del Teorema 6.10.* Comenzamos probando 1) y 2). La convergencia de la serie (6.1) en  $A$  implica la de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - a)^{-n}$$

en  $A$ . Por tanto la primera converge absoluta y uniformemente sobre compactos de  $|z - a| < R_2$  mientras la segunda converge absoluta y uniformemente sobre compactos de  $|z - a| > R_1$  (en éste último caso véanse los desarrollos en serie de potencias en el infinito introducidos en el Capítulo III, Ejercicios).

Como (6.1) converge uniformemente en  $\gamma_r(s) = a + re^{is}$ ,  $s \in [0, 2\pi]$ , con  $R_1 < r < R_2$  podemos multiplicar ambos miembros por  $(z - a)^m$  y  $m \in \mathbb{Z}$  e integrar en  $\gamma_r$  para concluir que:

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz = 2\pi i a_n.$$

De aquí se concluye la unicidad del desarrollo y la forma de los coeficientes.

Probamos ahora la validez del desarrollo y de ahí 3). De la fórmula de Cauchy se tiene que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para todo  $z \in A$  tal que  $r_1 < |z - a| < r_2$  y  $r_1, r_2 \in (R_1, R_2)$  con  $r_1 < r_2$ .

Procediendo como en la demostración de la fórmula de Cauchy en discos se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz.$$

Razonando de la misma manera

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - a)^{-n}$$

con

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} (z - a)^{n-1} f(z) dz, \quad n \geq 1.$$

Para concluir, nótese que “a posteriori” puede tomarse  $r_1 = r_2 = r \in (R_1, R_2)$  en la expresión integral de los coeficientes porque ésta no depende del valor de  $r$ .  $\square$

**Proposición 6.12.** Sea  $f \in H(G \setminus \{a_1, \dots, a_N\})$  con  $\{a_1, \dots, a_N\} \subset G$ . Entonces:

$$f(z) = g_{1,-} + \dots + g_{N,-}(z) + g(z),$$

donde  $g \in H(G)$  y  $g_{j,-}$  es la parte singular de  $f$  en  $z = a_j$ .

*Demostración.* Basta probar el caso  $N = 1$  y después proceder por inducción como en el Corolario 6.7. Usando el desarrollo de Laurent en  $z = a_1$ :

$$f(z) = g_-(z) + g_+(z) \quad 0 < |z - a_1| < r.$$

Nótese que  $g_- \in H(\mathbb{C} \setminus \{a_1\})$ ,  $g_+ \in H(D(a_1, r))$ . La función:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) - g_-(z) & z \neq a_1 \\ g_+(a_1) & z = a_1, \end{cases}$$

es obviamente holomorfa en  $G \setminus \{a_1\}$  mientras coincide con  $g_+$  en  $D(a_1, r)$ , luego también es holomorfa en  $G$ . Así:

$$f(z) = g_-(z) + g_+(z).$$

□

**Definición 6.13.** *Se dice que una singularidad aislada  $z = a$  de una función compleja  $f$  es esencial si no es una singularidad evitable ni un polo.*

El siguiente teorema clasifica las singularidades aisladas en términos del desarrollo de Laurent en tales singularidades.

**Teorema 6.14.** *Sea  $z = a$  una singularidad aislada de una función compleja  $f$  y sea*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

el desarrollo de Laurent de  $f$  en la bola perforada  $D(a, r) \setminus \{a\}$ . Entonces,

- a)  $z = a$  es evitable si y sólo si  $a_n = 0$  para  $n \leq -1$ .
- b)  $z = a$  es un polo de orden  $m$  si  $a_{-m} \neq 0$  y  $a_n = 0$  para todo  $n \leq -m - 1$ .
- c)  $z = a$  es una singularidad esencial si y sólo si  $a_n \neq 0$  para infinitos enteros negativos  $n$ .

*Demostración.* Las condiciones de a) y b) son claramente suficientes.

En el caso de la necesidad de a) se tiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

en  $z \in D(a, r) \setminus \{a\}$  donde el segundo miembro corresponde al desarrollo de la extensión  $g$  de  $f$  en  $D(a, r)$ . Como el desarrollo (6.1) es único, hemos terminado.

Para la necesidad de b) nótese que:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \right)$$

donde el desarrollo entre paréntesis es el de la función holomorfa  $g$  de Teorema 6.4. Como el desarrollo de Laurent en  $z = a$  es único hemos terminado.

□

**Teorema 6.15** (Teorema de Casorati-Weierstrass). *Sea  $z = a$  una singularidad esencial de una función compleja  $f$ . Entonces  $f(D(a, r) \setminus \{a\})$  es denso en  $\mathbb{C}$  para cada  $0 < r < r_0$  y cierto  $r_0$  positivo.*

*Demostración.* Si  $f(D(a, r) \setminus \{a\})$  no es denso en  $\mathbb{C}$ :

$$f(D(a, r) \setminus \{a\}) \cap D(c, \varepsilon) = \emptyset,$$

para ciertos  $c \in \mathbb{C}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Por tanto:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(z-a)} (f(z) - c) = \infty.$$

Esto significa que  $f(z) - c$  tiene un polo en  $z = a$  con lo que  $z = a$  es también un polo de  $f$  contra lo supuesto. □

### 6.3. Teorema de los residuos

**Teorema 6.16** (Teorema de los Residuos). *Sea  $f$  una función holomorfa en  $G \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ , donde  $G$  es un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $\{a_1, \dots, a_m\} \subset G$ . Si  $\gamma$  es una curva cerrada  $C^1$  a trozos de  $G$  que es homótopa (respectivamente, homóloga) a cero en  $G$  entonces:*

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{k=1}^m n(\gamma, a_k) \text{Res}(f, a_k)$$

*Si  $\gamma$  es en particular una curva de Jordan orientada positivamente se tiene:*

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{a_k \in \mathcal{C}_i} \text{Res}(f, a_k)$$

donde  $\mathcal{C}_i$  es la componente interior de  $\gamma$ .

*Demostración.* Escribiendo

$$f(z) = g_{1,-}(z) + \dots + g_{m,-}(z) + g(z),$$

e integrando sobre  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} f(z) = \int_{\gamma} g_{1,-}(z) + \dots + \int_{\gamma} g_{m,-}(z) + \int_{\gamma} g(z),$$

resulta:

$$\int_{\gamma} g_{j,-}(z) = 2\pi i \text{Res}(f, a_j), \quad \int_{\gamma} g(z) = 0.$$

□

El siguiente resultado se conoce con frecuencia como el principio del argumento (ver también el Capítulo V).

**Teorema 6.17.** Sea  $f$  una función holomorfa en  $G \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ ,  $G$  abierto en  $\mathbb{C}$ ,  $\{a_1, \dots, a_p\} \subset G$ , siendo cada  $a_i$  un polo de  $f$ . Sean  $b_1, \dots, b_q$  los ceros de  $f$  en  $G$ . Si  $\gamma$  es una curva cerrada  $C^1$  a trozos de  $G$  que es homótopa (homóloga) a cero en  $G$  entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \sum_{k=1}^q n(\gamma, b_k) \beta_k - \sum_{l=1}^p n(\gamma, a_l) \alpha_l$$

donde  $\alpha_l$  y  $\beta_k$  son las multiplicidades de  $a_l$  y  $b_k$ , respectivamente.

Si  $\gamma$  es en particular una curva de Jordan orientada positivamente se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \sum_{b_k \in C_i} \beta_k - \sum_{a_l \in C_i} \alpha_l = Z - P,$$

donde  $C_i$  es la componente interior de  $\gamma$ ,  $Z$  es el número de ceros en  $C_i$  y  $P$  es el número de polos en  $C_i$  (contados en ambos casos con sus órdenes de multiplicidad).

*Demostración.* Basta con escribir la función  $f$  en la forma:

$$f(z) = (z - a_1)^{-\alpha_1} \dots (z - a_p)^{-\alpha_p} (z - b_1)^{\beta_1} \dots (z - b_q)^{\beta_q} h(z),$$

donde  $h \in H(G)$ . □

*Observación 6.8.* A diferencia del resultado anterior donde las singularidades aisladas son arbitrarias en el principio del argumento éstas han de ser necesariamente polos (es decir se trata de funciones meromorfas en  $G$ ).

Para las aplicaciones de la teoría de los residuos al cálculo de integrales propias los siguientes lemas revisten gran interés.

**Lema 6.18** (Lema de Jordan). Sea  $\gamma_r = r e^{is}$ ,  $s \in [0, \pi]$ . Entonces:

$$\int_{\gamma_r} |e^{iz}| |dz| < \pi,$$

para todo  $r > 0$ .

*Demostración.* Se tiene:

$$\int_{\gamma_r} |e^{iz}| |dz| = 2r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin \theta} d\theta < 2r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2r}{\pi} \theta} d\theta = \pi \int_0^r e^{-s} ds < \pi.$$

□

**Lema 6.19.** Sea  $z = a$  un polo simple de  $f$  y  $\gamma_{\varepsilon}(s) = a + \varepsilon e^{is}$ ,  $s \in [s_0, s_0 + \phi]$ , donde  $\phi \in (0, 2\pi)$ . Entonces:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\varepsilon}} f = i\phi \operatorname{Res}(f, a).$$

*Demostración.* Se escribe:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f = a_{-1} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z-a} + \int_{\gamma_\varepsilon} g = \phi i a_{-1} + \int_{\gamma_\varepsilon} g,$$

y

$$\int_{\gamma_\varepsilon} g \rightarrow 0$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

□

## 6.4. Ejercicios

A) *Singularidades.*

1. Estudiar la naturaleza de las singularidades de las funciones siguientes:

$$a) f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}, \quad b) f(z) = \frac{\cos z}{z}, \quad c) f(z) = \frac{\cos z - 1}{z},$$

$$d) f(z) = \exp \frac{1}{z}, \quad e) f(z) = \frac{\log(z+1)}{z^2}, \quad f) f(z) = \frac{\cos z^{-1}}{z^{-1}},$$

$$g) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z-1)}, \quad h) f(z) = (1-e^z)^{-1} \quad i) f(z) = z \operatorname{sen} \frac{1}{z}, \quad j) f(z) = z^n \operatorname{sen} \frac{1}{z}.$$

2. Sean  $G$  un dominio  $z = a$  un polo de  $f$  de suerte que  $f \in H(G \setminus \{a\})$ . Pruébese que existen a lo sumo una función  $g \in H(G)$  y un entero  $m$  tales que:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}, \quad z \neq a,$$

con  $g(a) \neq 0$ .

3. Usar el problema 2 para probar –en la mismas condiciones– la existencia de una función holomorfa  $g_1 \in H(G)$  única tal que:

$$f(z) = \frac{a-m}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a-1}{(z-a)} + g_1(z), \quad z \neq a.$$

4. Sean  $G$  un dominio,  $\{a_1, \dots, a_N\} \subset G$  y  $f \in H(G \setminus \{a_1, \dots, a_N\})$  de forma que los  $a_i$  son polos de  $f$  de órdenes  $m_i$ . Probar que existe una función holomorfa  $g \in H(G)$  tal que:

$$f(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{m_j} \frac{a_{j,-l}}{(z-a_j)^l} + g(z), \quad z \neq a_j.$$

5. Pruébese que si una función racional no tiene polos entonces es un polinomio.

6. Sea  $f(z) = p(z)/q(z)$  una función racional de forma que la fracción es irreducible. Haciendo uso de los resultados del capítulo obténgase su descomposición en fracciones simples.

7. Sean  $f, g \in H(G)$ ,  $a \in G$ ,  $f(a) \neq 0$ ,  $z = a$  cero de orden  $m$  de  $g$ . Probar que entonces  $z = a$  es un polo de orden  $m$  de  $\frac{f}{g}$ .

8. Sean  $f, g \in H(G)$ ,  $a \in G$ ,  $f(a) \neq 0$ ,  $z = a$  cero simple de  $g$ . Probar que entonces

$$\operatorname{Res} \left( \frac{f}{g}, a \right) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

9. Dada la función:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)},$$

obtener su desarrollo de Laurent en los anillos:  $0 < |z| < 1$ ,  $1 < |z| < 2$ ,  $2 < |z| < \infty$ .

10. Se considera la función:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)},$$

$a_i \neq a_j$  para  $i \neq j$ . Calcular su desarrollo de Laurent en torno a  $a_1$  determinando el valor óptimo de  $r > 0$  de suerte que el mismo converja en  $0 < |z - a_1| < r$ .

11. Hállense los desarrollos de Laurent de las funciones  $f$  que siguen en las regiones  $D$  que se indican:

$$a) f(z) = z^{-4}(e^{z^2} - 1), \quad B(0, 1) \setminus \{0\}, \quad b) f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}, \quad \{1 < |z - 2i| < 3\},$$

$$c) f(z) = z(z-2)^{-4} \cos \pi z, \quad |z-2| > 0, \quad d) f(z) = z^6 \cos^2(z^{-2}), \quad \{|z| > 0\}.$$

12. Demostrar que  $\tan z$  es analítica en  $\mathbb{C}$  con excepción de polos simples en  $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Calcular la parte singular de la función en dichos polos.

13. Sea  $f \in H(\{z : |z| > r\})$  tal que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ . Pruébese que existen  $\rho > 0$ ,  $g \in H(D(0, \rho))$ ,  $g(0) \neq 0$  y  $m \in \mathbb{N}$  tales que:

$$f(z) = z^m g\left(\frac{1}{z}\right) \quad |z| < \frac{1}{\rho}.$$

14. Dése el desarrollo de Laurent de la función

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ¿Se puede generalizar el resultado?

15. (♣) Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa y biyectiva. Demuéstrese que:

$$f(z) = az + b$$

para ciertos  $a, b \in \mathbb{C}$ .

*Indicación.* Usar el Ejercicio 13 en combinación con el teorema de Liouville.

16. Se considera la función:

$$f(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \lambda \left( z + \frac{1}{z} \right) \right\},$$

$\lambda \in \mathbb{C}$  un parámetro. Usar el desarrollo de Laurent para probar que:

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right),$$

para todo  $0 < |z| < \infty$  donde los coeficientes son:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\lambda \cos t} \cos nt \, dt.$$

B) *Integración.*

17. Calcúlense las siguientes integrales o alternativamente pruébense las identidades que se señalan.

a)

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \quad a > 1.$$

b) Extender la identidad cambiando  $a > 1$  por  $w \in \{\Re w > 0\} \setminus [-1, 1]$  para obtener:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{w + \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{w^2 - 1}}.$$

c)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \, d\theta, \quad a^2 < 1.$$

d)

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} \quad a > 1.$$

*Indicación.* Consultar ejercicios previos.

e)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a + \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{2[a(a+1)]^{1/2}}, \quad a > 0.$$

18.  $\Gamma_R$  designa el camino  $\{Re^{is} : 0 \leq s \leq \pi\}$ . Probar la estimación (lema de Jordan):

$$\int_{\Gamma_R} |e^{iz}| |dz| < \pi,$$

para todo  $R > 0$ .

19. Ahora  $f$  tiene un polo simple en el punto  $a$  con residuo  $a_{-1}$  mientras  $\Gamma(\varepsilon, \phi)$  representa el camino  $\{a + \varepsilon e^{is} : \theta \leq s \leq \theta + \phi\}$ . Demostrar:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma(\varepsilon, \phi)} f(z) dz = i\phi a_{-1}.$$

20. Calcúlense las siguientes integrales o alternativamente pruébense las identidades que se señalan.

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad b) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad c) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1},$$

$$e) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}, \quad f) \int_0^{\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

21. Calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}, \quad 0 < a < 1.$$

*Indicación.* Usar el camino  $[-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i, -R]$ ,  $R > 0$ .

22. Sean  $a, b$  complejos distintos con la parte real positiva. Demostrar que:

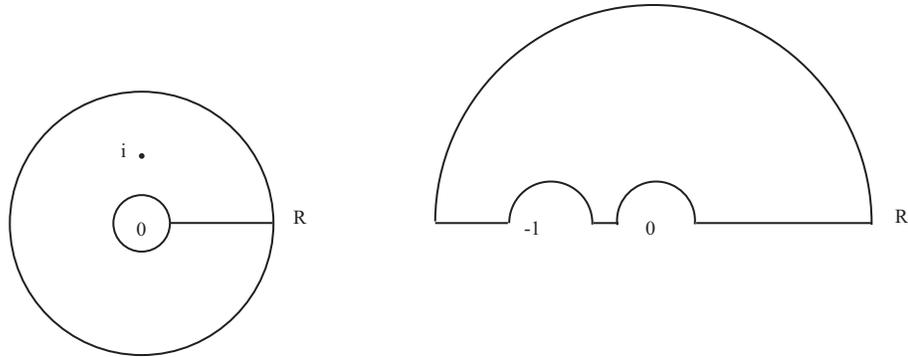
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx = \frac{\pi}{a^2-b^2} \left( \frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right).$$

23. Calcúlense las siguientes integrales o alternativamente pruébense las identidades que se señalan.

a) Calcular:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx, \quad 0 < a < 1.$$

*Indicación.* Usar el camino de la izquierda.



b) Se sabe que:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a}, \quad 0 < a < 1.$$

Extender el resultado cambiando  $a \in (0, 1)$  por  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a = p + iq$ ,  $0 < p < 1$ .

*Indicación.* Usar que la integral del primer miembro es holomorfa en  $\{0 < \Re a < 1\}$ .

c) Usar el ejercicio previo para calcular las integrales:

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t} \cos(q \log t) dt, \quad \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t} \operatorname{sen}(q \log t) dt.$$

d) Para  $-1 < a < 1$  probar las igualdades:

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sec} \frac{\pi a}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x)^2} dx = \pi a \operatorname{csc} \pi a.$$

e) Calcular:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx, \quad 0 < a < 1,$$

usando en esta ocasión el camino de la derecha en la figura precedente.

f) Deducir –con un sólo cálculo– las identidades:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{1/4}}{x^2 + x + 1} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{1/4}}{x^2 - x + 1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}.$$

g) Considerando la función  $f(z) = z^{1/2} \frac{\log z}{(1+z)^2}$  pruébese que:

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2} \log x}{(1+x)^2} = \pi, \quad \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{(1+x)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

h) Pruébese que:

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{1+x^2} = \frac{\pi^3}{8}, \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} = 0.$$

i) Toda la serie:

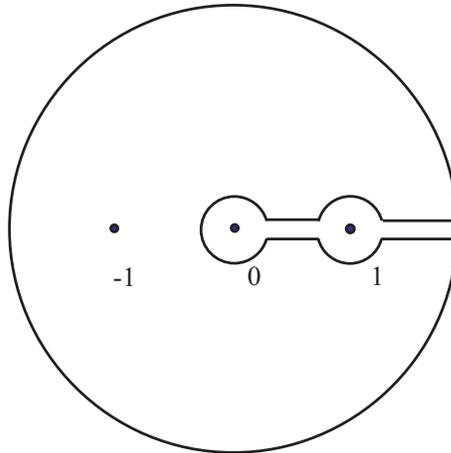
$$\int_0^{\infty} \frac{\log^2 x}{1+x^3}, \quad \text{Sol. } \frac{3\pi^2\sqrt{2}}{64},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^4}, \quad \text{Sol. } -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}, \quad \text{Sol. } \frac{-\pi}{4},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2-1}, \quad \text{Sol. } \frac{-\pi^2}{4}.$$

*Indicación.* En el último de los casos se sugiere el camino siguiente.



k)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}, \quad 0 < a < 1.$$

*Indicación.* Usar el cambio  $x = \log t$ .



# Bibliografía

- [1] ALMIRA J. M., SABINA J. C., *David Hilbert. Matemático Fundamental*, Nivola, Madrid, 2007.
- [2] APOSTOL T. M., *Calculus* (2 Vols.), Reverté, Barcelona, 19\*\*.
- [3] APOSTOL T. M., *Análisis Matemático*, 2ª edición. Reverté, Barcelona, 1982.
- [4] J. BAK, D. J. NEWMAN, *Complex Analysis*, 2ª edición. Springer, New York, 1997.
- [5] CARTAN H. *Teoría elemental de las funciones analíticas de una o varias variables complejas*, Selecciones Científicas, Madrid.
- [6] CHOQUET G., *Topología*, Toray-Masson, Zaragoza, 1971.
- [7] CONWAY J. B., *Functions of one complex variable*, Springer, New York, 19\*\*.
- [8] DIEUDONNÉ J., *Foundaments de l'Analyse Moderne*, Gauthier-Villars, París, 1972.
- [9] DIXON J. D., *A biref proof of Cauchy integral theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 625-626.
- [10] DO CARMO M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [11] GILMAN J. P., KRA I., RODRÍGUEZ \*, *Complex Analysis (in the spirit of Lipman Bers)*, Sringer, N. Y., 2007.
- [12] HÖRMANDER L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1966.
- [13] MARKUSEVICH A., *Teoría de las Funciones Analíticas* (2 volúmenes), Mir, Moscú, 1970.
- [14] MIJÁILOV V. P., *Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Mir, Moscú, 1978.
- [15] KLINE M., *Pensamientos matemáticos desde la antigüedad hasta nuestros días* (3 Vols.), Alianza Universidad, Madrid, 1990.

- [16] NACHBIN L., *Introduction to Functional Analysis: Banach Spaces and Differential Calculus*, Marcel & Dekker, New York, 1981.
- [17] NACHBIN L., *Topology of Holomorphic Mappings*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1969.
- [18] MARGALEF J., OUTERELO E., PINILLA J., *Topología, Vol. III*, Alhambra, Madrid, 1980.
- [19] PALKA B., *An Introduction to Complex Function Theory*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1991.
- [20] REMMERT R., *Theory of Complex Functions*, Springer, N. Y., 1991.
- [21] REMMERT R., *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer, N. Y., 1998.
- [22] RUDIN W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw Hill, New York, 1976.
- [23] RUDIN W., *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, New York, 1987.
- [24] SABINA DE LIS, J., *Análisis No Lineal: curso de introducción y aplicaciones*, Universidad de La Laguna, Servicio de Publicaciones, La Laguna, 2005.
- [25] SPIVAK, M., *Cálculo en Variedades*, Reverté, Barcelona.
- [26] WILLARD S., *General Topology*, Addison Wesley Reading, Massacusetts, 1970.