Algo sobre las matemáticas del tráfico

Máster en Matemática 08-09

Universidad de La Laguna

La Laguna, 30 de octubre de 2008

1. El modelo.

Consideramos algunos aspectos elementales del flujo de tráfico en una autovía unidimensional*. Las variables implicadas son:

• $\rho(x,t)$ la densidad lineal de tráfico. La vía se supone unidemensional, x la posisción, t el tiempo. Se considera al tráfico como una distribución unidimensionale de partículas.

• $u(x,t)$ es la velocidad del tráfico en el punto x e instante. Un vehículo que en $t = t_0$ está en x_0 seguirá la trayectoria dictada por la solución $x(t)$ de:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(x,t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

*R. Haberman, "Mathematical Models", SIAM, Philadelphia, 1998.

- El flujo de tráfico $q(x,t)$ que proporciona el número de vehículos que atraviesa x en el instante t por unidad de tiempo.

Las variables q, u y ρ se considerarán tan regulares como convenga al discurso.

2. Relación fujo/velociad y densidad. Las variables flujo q, velocidad u y densidad ρ están ligadas por la igualdad:

$$\boxed{q(x,t) = \rho(x,t)u(x,t)}.$$

Para convencernos de ello tomamos x_0 y nos fijamos en cuántos coches atraviesan x_0 entre t_0 y $t_0 + h$. Si h es suficientemente pequeño la velocidad cerca de x_0 será aproximadamente u_0 con $u_0 = u(x_0, t_0)$. Todos los vehículos que en $t = t_0$ se hallan en el intervalo $x_0 - u_0 h \leq x \leq x_0$ cruzan por x_0 entre t_0 y $t_0 + h$. El número de éstos es:

$$\int_{x_0 - u_0 h}^{x_0} \rho(s, t_0)\ ds.$$

Dividiendo esta cantidad por h y haciendo $h \to 0$ obtenemos:

$$q(x_0, t_0) = \rho(x_0, t_0)u(x_0, t_0).$$

3. Ecuación de continuidad. Expresan la conservación del número de coches. Si $[a, b]$ es un intervalo arbitrario y $N(t)$ expresa en número de coches en $[a, b]$ en el instante t entonces la variación de N por unidad de tiempo es:

$$\frac{dN}{dt} = q(a,t) - q(b,t).$$

Por otro lado:

$$\frac{dN}{dt} = \int_a^b \rho_t(x,t)\ dx$$

por lo tanto:

$$\int_a^b \rho_t(x,t)\ dx = u(a,t)\rho(a,t) - u(b,t)\rho(b,t).$$

De aquí:

$$\int_a^b \rho_t(x,t) + (u(x,t)\rho(x,t))_x\ dx = 0.$$

Como a, b son valores arbitrarios se deduce que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(x,t)\rho(x,t)) = 0,$$

o también

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

donde $q = u\rho$. Cualquiera de las dos identidades precedentes se conoce como la "ecuación de continuidad".

4. Velocidad vs. densidad. La ecuación de continuidad:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(x,t)\rho(x,t)) = 0,}$$

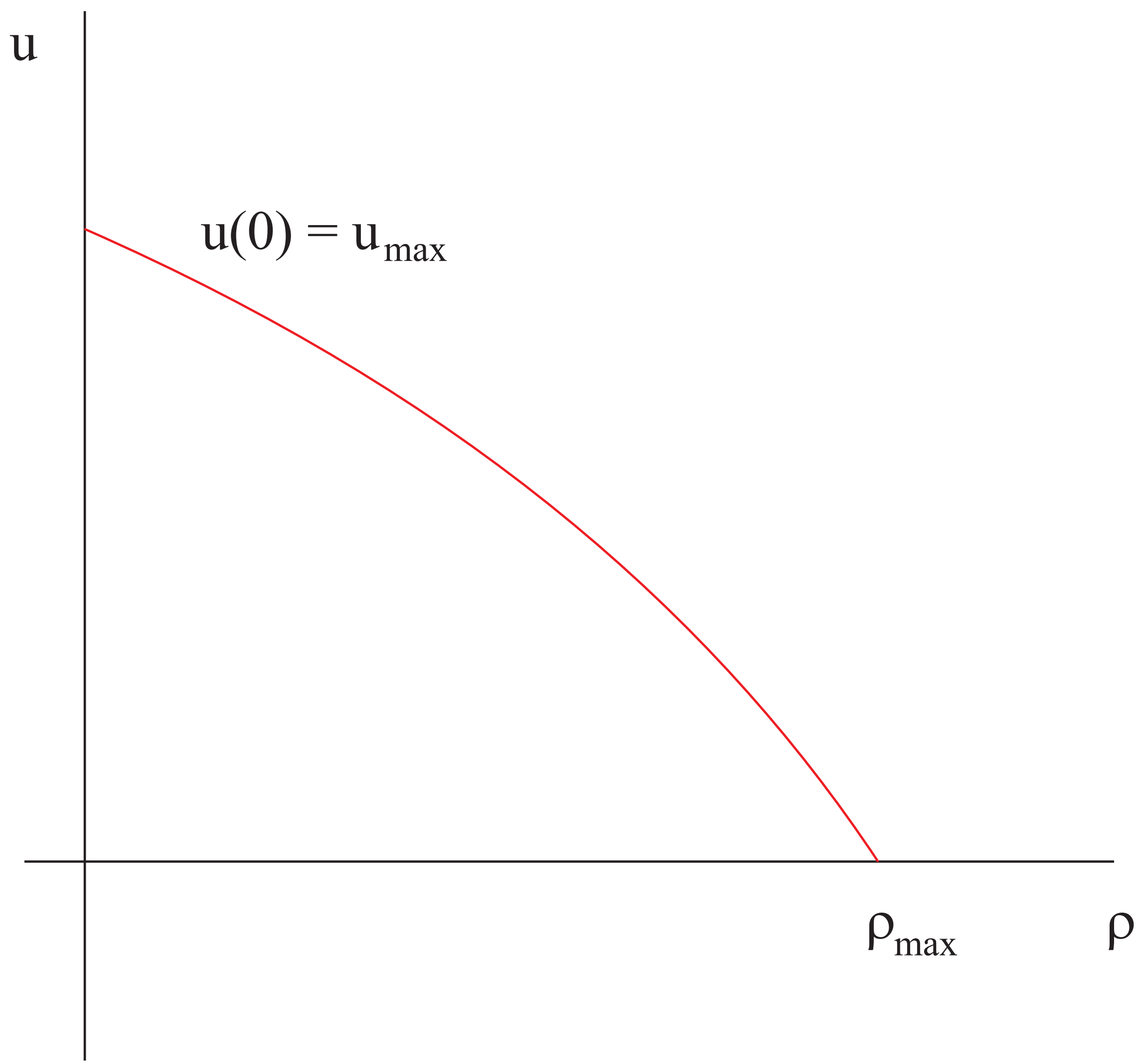
contiene dos incógnitas $\rho(x,t)$ y $u(x,t)$. No es posible progresar si no se establece una relación entre ambas.

Dada la naturaleza del tráfico –concurren factores aleatorios obvios derivados del efecto "conductor"– no es concebible obtener u a partir de consideraciones más elementales o principios físicos generales.

Como ejemplo característico de "modelling" es natural proponer una ley fenomenológica del tipo:

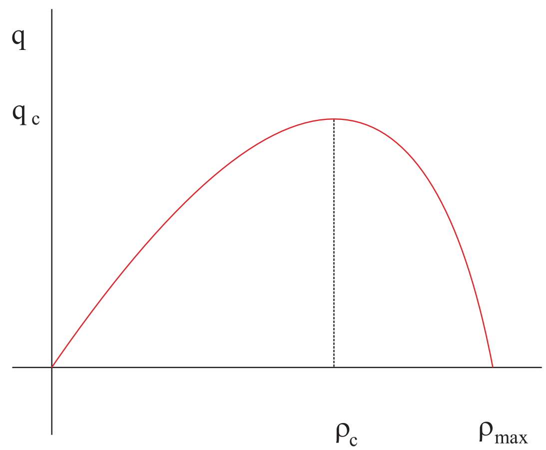
$$u(x,t) = u(\rho(x,t)),$$

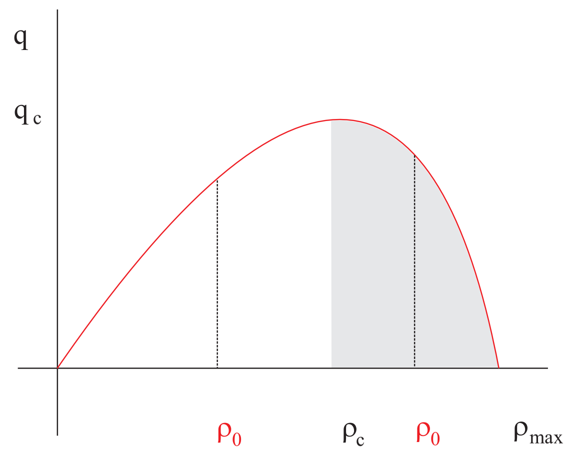
con $u(\rho)$ una función decreciente de ρ.


u
u(0) = u_max
ρ_max
ρ

5. Diagrama fundamental de flujo El flujo q respecto de la densidad es:

$$q(\rho) = u(\rho)\rho.$$





La cantidad:

$$q_c = \max_{[0,\rho_{\max}]} q(\rho)$$

se llama la capacidad de la vía.

6. Perturbación de un régimen de tráfico homogéneo. Si $\rho_0 \in [0, \rho_{\text{máx}}]$ entonces $\rho(x,t) = \rho_0$ es una solución estacionaria de la ecuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) = 0.$$

¿C'omo ser'a la configuración del tráfico si partimos de una pequeña perturbación de dicha configuración estacionaria? Hay que resolver:

$$\begin{cases} \rho_t + (u\rho)_x = 0 & \qquad t \geq 0 \\ \rho(x,0) = \rho_0 + \varepsilon f(x), \end{cases}$$

con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Parece natural proponer:

$$\boxed{\rho(x,t) = \rho_0 + \varepsilon u_1(x,t) + o(\varepsilon) \qquad \varepsilon \to 0.}$$

Se comprueba enseguida que $u_1(x,t)$ es solución del problema:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varepsilon f(x), & \end{cases} \qquad c = q'(\rho_0).$$

La solución del problema es la "onda viajera"

$$u_1(x,t) = f(x - ct),$$

con velocidad de propagación c. Nótese que:

- $c > 0$ si $\rho_0 < \rho_c$ (onda progresiva).

- $c < 0$ si $\rho_0 > \rho_c$ (onda retrógrada).

Onda de tráfico retrógrada con el atasco viajando en sentido contrario a la marcha.