I. Dinámica de Poblaciones

1. Ecuación logística.

- En una población biológica

$$N(t) = \text{nº de individuos}$$

(amebas, insectos, mamíferos, hombres).

- Se descartan: edad, sexo, distribución geográfica.

- Ley de conservación:

$$\frac{dN}{dt} = \text{nacimientos} - \text{muertes} + \text{emigración neta.}$$

- Tasas de natalidad, mortalidad:

$$\nu = \text{nacimientos} / N \times \text{año}$$

$$\mu = \text{muertes} / N \times \text{año}$$

N: nº de individuos al comienzo de la estimación

$$N(t+\Delta t) - N(t) = n(t, \Delta t) - m(t, \Delta t)$$

• Tasas de natalidad / mortalidad instantáneas

$$\nu(t, N(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{n(t, \Delta t)}{N(t)}$$

$$\mu(t, N(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t, \Delta t)}{N(t)}$$

• Ley de crecimiento de Malthus

$$\nu - \mu = r = \text{constante}$$

• Pronóstico de la población:

$$\begin{cases} N' = rN \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

• $[r] = T^{-1}$, r^{-1} = tiempo característico.

•• $r > 1$ $\quad N(t) \uparrow +\infty$

•• $r < 1$ $\quad N(t) \downarrow 0$

• Crecimiento geométrico: $r > 1$, a intervalos regulares T;

$$N(kT) = N_0 \left(e^{rT}\right)^k$$

- Ley de crecimiento logística o de Verhulst

Efectos de la limitación de recursos y del "aglomeramiento de la población".

Ejemplo típico: cultivos bacterianos

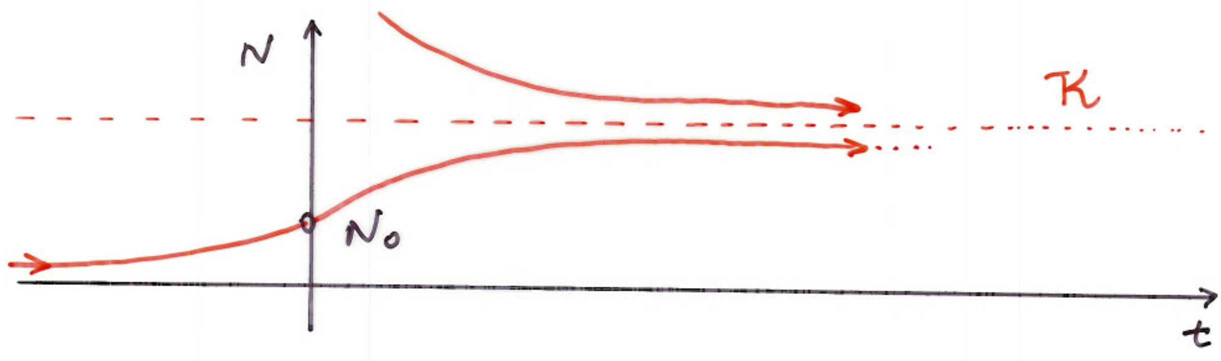
$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a - bN$$

$$= r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$K = a/b$: capacidad de soporte del medio

Pronóstico de la población:

$$\begin{cases} N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$



$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 - (N_0 - K)\, e^{-r(t-t_0)}}$$

Resumen :

$N(t) \to K \qquad t \to +\infty$

r^{-1} : tiempo característico de recuperación del equilibrio (nomada biológica)

Ejemplo : Pearl & Reed, Proc. Nat. Acad. Sciences, 1920 (del libro de Martin Braun).

Predicción de la población USA hasta 1950 :

$$p(t) = \frac{197\,273\,000}{1 + e^{-0.03134\,(t-1914.3)}}$$

$K = 197.273.000$

$r = a = 0.03134$ año^{-1}

$t_0^* = 1914.3$ tiempo en el que se alcanza $\frac{K}{2}$

Datos :

$N(1790) = 3.929.000$

$N(1850) = 23.192.000$

$N(1910) = 91.972.000$

TABLA 2. Población de los Estados Unidos de 1970 a 1950. (Las últimas cuatro cifras fueron añadidas por el grupo "Darthmouth College Writing Group".)

	Real	Predicha	Error	%
1790	3 929 000	3 929 000	0	0.0
1800	5 308 000	5 336 000	28,000	0.5
1810	7 240 000	7 228 000	– 12,000	– 0.2
1820	9 638 000	9 757 000	119,000	1.2
1830	12 866 000	13 109 000	243,000	1.9
1840	17 069 000	17 506 000	437,000	2.6
1850	23 192 000	23 192 000	0	0.0
1860	31 443 000	30 412 000	– 1,031,000	– 3.3
1870	38 558 000	39 372 000	814,000	2.1
1880	50 156 000	50 177 000	21,000	0.0
1890	62 948 000	62 769 000	– 179,000	– 0.3
1900	75 995 000	76 870 000	875,000	1.2
1910	91 972 000	91 972 000	0	0.0
1920	105 711 000	107 559 000	1,848,000	1.7
1930	122 775 000	123 124 000	349,000	0.3
1940	131 669 000	136 653 000	4,984,000	3.8
1950	150 697 000	149 053 000	– 1,644,000	– 1.1

En 1845, Verhulst pronosticó una población máxima para Bélgica de 6 600 000 y una población máxima para Francia de 40 000 000. Ahora bien, en 1930 la población de Bélgica había alcanzado 8 092 000. Esta discrepancia tan grande parecía indicar que la ley logística de crecimiento de poblaciones es poco precisa, por lo menos en lo que se refiere a la población este último país. Sin embargo, la discrepancia puede explicarse por el sorprendente crecimiento industrial en Bélgica y por la adquisición del territorio del Congo, en África, lo cual aseguró suficientes recursos adicionales para el país como para atender a la población adicional. Así pues, después del crecimiento industrial tan sorprendente y la adquisición del Congo, Verhulst debió haber disminuido el coeficiente vital b.

Por otro lado, la población de Francia en 1930 concordaba en forma sorprendente con las predicciones de Verhulst. De hecho, parecía que había respuesta a la siguiente paradoja: ¿Por qué aumentaba tan lentamente la población de Francia en 1930, mientras que la población francesa de Canadá aumentaba con rapidez? Después de todo se trata de la misma gente. La solución a la paradoja, claro está, es que la población de Francia en 1930 se encontraba muy cerca de su valor límite y, por ello, en un periodo de crecimiento reducido, mientras que la población de Canadá en 1930 se encontraba aún en el periodo de crecimiento acelerado.

- Los cálculos de Pearl y Reed (cf. Braun página 31)

Se trata de hallar los coeficientes a, b (coeficientes vitales) a partir de datos "reales".

Población USA:

1790 : 3.929.000 $:= N_0$
1850 : 23.192.000 $:= N_1$
1910 : 91.972.000 $:= N_2$

Δt : 60 años

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-a(t-t_0)}}$$

$$K = \frac{a}{b}$$

$$t_0 = 1790$$

$$N_0 = 3'929 \times 10^6$$

Se tiene el sistema 2x2:

$$N_1 = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-60a}}$$

$$N_2 = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-120a}}$$

Para reducir el orden de magnitud de los coeficientes conviene usar los valores relativos N_i / N_j.

Introducimos:

$$x = \frac{K}{N_0} \qquad z = e^{-60a}$$

para llegar a:

$$\begin{cases} \dfrac{N_1}{N_0} = \dfrac{x}{1+(x-1)z} \\ \dfrac{N_2}{N_0} = \dfrac{x}{1+(x-1)z^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+(x-1)z = \dfrac{N_0}{N_1}x & (1) \\ 1+(x-1)z^2 = \dfrac{N_0}{N_2}x & (2) \end{cases} \qquad \begin{aligned} N_{01} &:= \frac{N_0}{N_1} \\ N_{02} &:= \frac{N_0}{N_2} \end{aligned}$$

y resulta que (de (1)):

$$z = \frac{N_{01}x - 1}{x-1}$$

mientras de (2):

$$\frac{(N_{01}x-1)^2}{(x-1)} = N_{02}x - 1$$

$$(N_{01}x - 1)^2 = (N_{02}x - 1)(x-1)$$

$$x = \frac{N_{02} - 2N_{01} + 1}{N_{02} - N_{01}^2}.$$

Como:

$$N_{01} = 0.1694$$

$$N_{02} = 0.0427$$

resulta:

$$x = \frac{N_{02} - 2N_{01} + 1}{N_{02} - N_{01}^2} = \frac{0'7029}{0'0140} = 50'1940$$

$$z = \frac{N_{01}\,x - 1}{x - 1} = \frac{7'5028}{49'1940} = 0'1525$$

Por tanto:

$$a = -\frac{1}{60} \log_n z = \frac{1'8805}{60} = 0'03134$$

$$K = N_0 \, x = (3'929 \times 10^6) \times (50'1940)$$

$$= 197'2122 \times 10^6$$ población límite USA estimada por la ecuación logística

$K/2 = 98'6061 \sim 1913.25$ (Abril de 1913)

$$b = \frac{a}{K} = \frac{3'134 \times 10^{-2}}{197'2122 \times 10^6} =$$

$$= \frac{313'4}{197'2122} \times 10^{-10}$$

$$= 1'5891 \times 10^{-10}.$$

Para $t = t_0^*$ y $N_0 = K/2$:

$$N(t) = \frac{K}{1 + e^{-a(t - t_0^*)}}$$

En nuestro caso $t_0 = 1790$, t_0^* cumplirá :

$$\frac{K}{2} = \frac{K}{1 + (x-1)\, e^{-a(t_0^* - t_0)}}$$

$$2 = 1 + (x-1)\, e^{-a(t_0^* - t_0)}$$

$$e^{-a(t_0^* - t_0)} = \frac{1}{x-1}$$

$$e^{a(t_0^* - t_0)} = (x-1)$$

$$(t_0^* - t_0) = \frac{1}{a} \log_n (x-1)$$

$$= \frac{1}{0'03134} \log_n (49'1940)$$

$$= 124'3$$

$$t_0^* = 1790 + 124'3 = \underline{1914'3.}$$

A mi me sale el revés : Marzo de 1914 en vez de Abril de 1913.