

Ecuación Logística con retardo: Oscilaciones

Máster en Matemática 12–13

Universidad de La Laguna

La Laguna, 16 de noviembre de 2012

1. Modelos de crecimiento con memoria.

En la ecuación:

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{1}{K} \int_{-\infty}^t w(t-s)N(s) ds \right),$$

el efecto regulatorio depende del "pasado".

- $w(\tau)$ matiza la importancia del pasado τ unidades de tiempo atrás.

La familia de pesos:

$$w_\varepsilon(t) = \frac{1}{C(\varepsilon)} e^{-\frac{|t-T|}{\varepsilon}} \quad C = \varepsilon \int_{-T/\varepsilon}^{\infty} e^{-|t|},$$

"magnifica" la importancia del instante T cuando $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Más precisamente:

$$\int_{-\infty}^t w_\varepsilon(t-s)N(s) ds \rightarrow N(t-T) \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

La afirmación se basa en las propiedades siguientes:

1) $w_\varepsilon(t) \geq 0, t \geq 0.$

2) $\int_0^\infty w_\varepsilon(t) dt = 1$ para todo $\varepsilon > 0.$

3) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon(t) = 0$ para $t \neq T.$

4) Si $\delta > 0$ es pequeño:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{T-\delta} + \int_{T+\delta}^\infty \right) w_\varepsilon(t) dt = 0.$$

Por tanto, si $N(t)$ es una función acotada en $(-\infty, t)$ se tiene:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^t w_\varepsilon(t-s) N(s) ds = N(t-T).$$

2. Logística con retardo. Tomando límites encontramos:

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t - T)}{K} \right),$$

donde:

- T tiempo de maduración hasta la edad fértil (de “larvas” \Rightarrow “adultos”), en el factor regulador:

$$\frac{N(t - T)}{K}$$

interviene el n^o de individuos que ha madurado.

- T tiempo de “reposición” de los recursos consumidos.

Dos escalas de tiempo: $\frac{1}{r}$ = tiempo característico de “recuperación de la especie” y T = el “retardo”.

3. Existencia y unicidad.

Teorema 1. Para $\theta(t) \in C[-T, 0]$ el problema

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t-T)}{K} \right) \\ N(s) = \theta(s) \end{cases} \quad s \in I_0 = [-T, 0],$$

i) admite una única solución definida en $[0, \infty)$,

ii) $\theta(0) < 0$ ($r. = 0, > 0$) $\Rightarrow u(t) < 0$ ($r. = 0, > 0$) para todo $t \in [0, \infty)$,

iii) si $u(t)$ es una solución positiva, ó bien se estabiliza en K :

$$u(t) \rightarrow K \quad t \rightarrow \infty,$$

ó bien es oscila infinitas veces en torno al valor K .

iv) si $\theta(t) > 0$ y $\theta(t) \leq K$ o $\theta(t) \geq K$ en $I_0 \Rightarrow u(t)$ está acotada.

4. La estabilidad del equilibrio. Introducimos el “scaling”:

$$u(s) = \frac{N(s/r)}{K} \quad s = rt,$$

en donde $\frac{1}{r}$ es la nueva escala de tiempos; obtenemos:

$$u'(s) = u(s)(1 - u(s - \tau)),$$

en donde el nuevo retardo adimensional

$$\tau = rT$$

mide el cociente del retardo al tiempo característico.

Escribimos simplemente:

$$u'(t) = u(t)(1 - u(t - \tau)).$$

Tomamos τ como parámetro.

Afirmaciones:

- $0 < \tau < \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$ asintóticamente estable.
- $\tau > \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$ inestable.

Ecuación de las perturbaciones ($\tau \rightarrow T$):

$$u'(t) = u(t)(1 - u(t - T)),$$

$$u(t) = z(t) + 1,$$

$$z'(t) = -z(t - T) - z(t)z(t - T),$$

despreciando los términos de orden superior,

$$z'(t) = -z(t - T).$$

Ensayando:

$$z(t) = ce^{\lambda t},$$

llegamos a la ecuación “característica”:

$$\lambda + e^{-\lambda T} = 0.$$

5. Discusión de la ecuación característica. Sustituyendo

$$\lambda = \mu + i\omega \quad \omega > 0,$$

en

$$\lambda + e^{-\lambda T} = 0,$$

resulta:

$$\begin{cases} \mu = -e^{-\mu T} \cos \omega T \\ \omega = e^{-\mu T} \sin \omega T. \end{cases}$$

Teorema 2. *La ecuación característica posee, para cada $T > 0$, infinitas raíces complejas λ . Además todas las raíces tienen la parte real negativa si y sólo si:*

$$0 \leq T < \frac{\pi}{2}.$$

Nota. Tomando $z = \frac{1}{\lambda}$, la función $f(z) = 1 + ze^{-\frac{T}{z}}$ posee una singularidad esencial en $z = 0$. La ecuación $f(z) = w$ se satisface en infinitos puntos z de cada entorno U de $z = 0$, con la posible excepción de un $w_0 \in \mathbb{C}$.

Propiedades. La ecuación

$$\lambda + e^{-\lambda T} = 0,$$

1) posee exactamente dos raíces reales $-\infty < \lambda_-(T) < \lambda_+(T) < -1$ si $0 < T < \frac{1}{e}$; $\lambda_- = \lambda_+ = -e$ para $T = \frac{1}{e}$ y ninguna raíz real para $T > \frac{1}{e}$,

2) raíces imaginarias puras $\lambda(T) = \omega(T) = \pm i$ exactamente en los valores $T_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Además:

$$\frac{d}{dT}(\Re\lambda)(T_k) = \dot{\mu}(T_k) > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3) Para $T_{k-1} < T < T_k$ hay exactamente k raíces $\lambda_1(T), \dots, \lambda_k(T)$ con la parte real positiva.

Nota. La única raíz doble es $\lambda = -e$ que corresponde al valor $T = \frac{1}{e}$.

★ Una solución periódica bifurca desde $u = 1$ cuando T cruza $T_0 = \frac{\pi}{2}$. Esto es consecuencia de una “generalización” adecuada del siguiente resultado.

6. Bifurcación de Hopf.

Teorema 3 (Existencia). Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F = F(\lambda, u)$, de clase C^2 tal que:

$$F(\lambda, 0) = 0 \quad \sigma \left(\frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, 0) \right) = \mu(\lambda) \pm i\omega(\lambda),$$

donde

$$\mu(0) = 0, \quad \omega(0) > 0, \quad \dot{\mu}(0) > 0.$$

Entonces existen $\varepsilon, \delta > 0$ y funciones C^1 , $T(s)$, $\bar{\lambda}(s)$,

$$U(t, s) \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

i) $T(0) = \frac{2\pi}{\omega(0)}$, $\bar{\lambda}(0) = 0$, $U(t, 0) \equiv 0$.

ii) Para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la ecuación:

$$\frac{du}{dt} = F(\lambda, u)$$

posee una órbita γ de período $T(s)$ en $\lambda = \bar{\lambda}(s)$ con amplitud menor que δ .

Teorema 4 (Unicidad). Si para $|T_1 - \frac{2\pi}{\omega(0)}| < \delta$, $|\lambda_1| < \delta$ la ecuación

$$\frac{du}{dt} = F(\lambda, u)$$

posee una órbita T_1 -periódica $\gamma \subset B(0, \delta)$ (amplitud menor que δ), entonces existe $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que:

$$T_1 = T(s), \quad \lambda_1 = \bar{\lambda}(s),$$

y γ está parametrizada por

$$u(t) = U(\bar{\omega}(s)t, s) \quad \bar{\omega}(s) := \frac{2\pi}{T(s)}.$$

Nota. Puede probarse la existencia de una matriz invertible $P \in M_{2 \times 2}$ tal que

$$u(t) = P(se^{i\bar{\omega}(s)t}) + o(s) \quad s \rightarrow 0.$$

★ El teorema de bifurcación de Hopf se extiende a ecuaciones N -dimensionales y a otras clases de ecuaciones de evolución. En particular las ecuaciones con retardo:

● H. J. Kielhoffer, “*Bifurcation theory. An introduction with applications to partial differential equations*”. Springer, New-York, 2004.

● Cuando T cruza

$$T_0 = \frac{\pi}{2} \simeq 1,57,$$

la ecuación presenta una solución periódica estable de periodo ($T \rightarrow \tau$):

$$\hat{t}_p(\tau) \simeq \frac{2\pi}{\omega(T_0)} = 2\pi.$$

La solución original es:

$$N(t) = Ku(rt),$$

con periodo de oscilación:

$$t_p(\tau) = \frac{\hat{t}_p(\tau)}{r} = \frac{\hat{t}_p(\tau)}{\tau} T.$$

7. Tabla de valores. De “*Stability and Complexity in Model Ecosystems*”, R. S. May, Princeton Un. Press, 1973. Análisis numérico en G. S. Jones, J. Math. Anal. Appls. (1962).

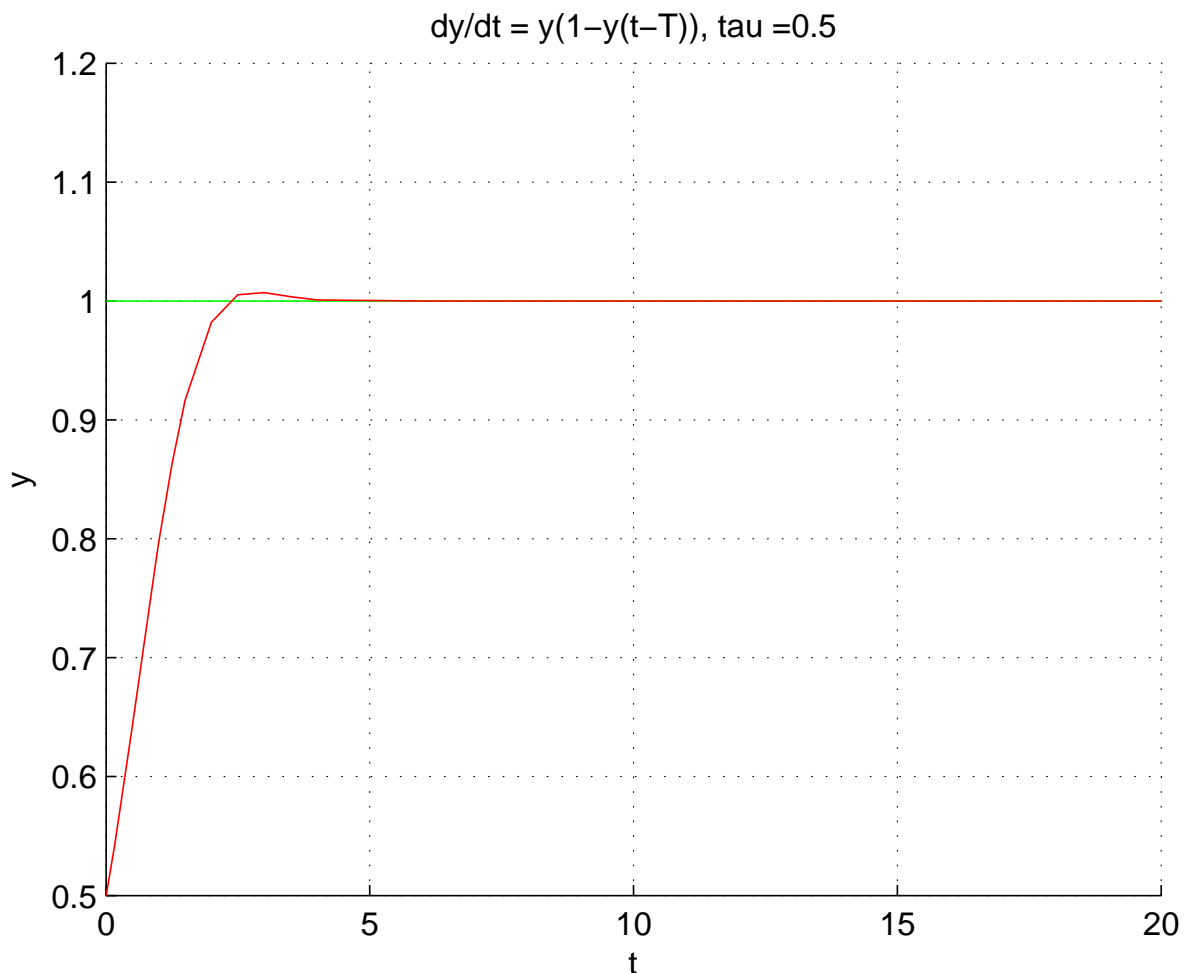
τ	N_{max}/N_{min}	$(\hat{t}_p/\tau)T$	\hat{t}_p
1.57	1	—	—
1.6	2.56	4.03 <i>T</i>	6.44
1.7	5.76	4.09 <i>T</i>	6.95
1.8	11.6	4.18 <i>T</i>	7.52
1.9	22.2	4.23 <i>T</i>	8.15
2.0	42.3	4.40 <i>T</i>	8.8
2.1	84.1	4.54 <i>T</i>	9.53
2.2	178	4.71 <i>T</i>	10.36
2.3	408	4.90 <i>T</i>	11.27
2.4	1040	5.11 <i>T</i>	12.26
2.5	2930	5.36 <i>T</i>	13.4

- Donde se aprecian cambios sustanciales es en el grupo adimensional:

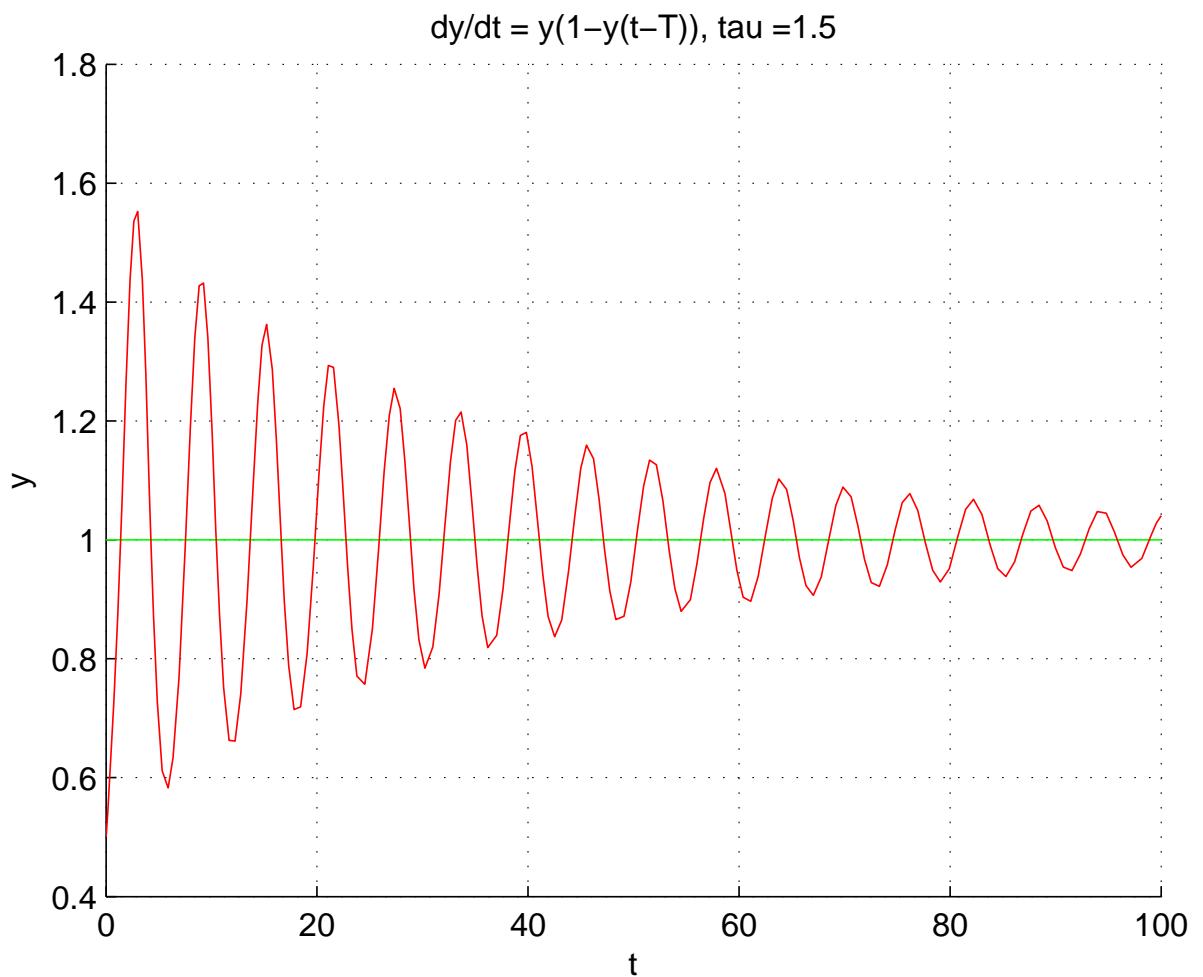
$$\frac{N_{max}}{N_{min}} = \frac{u_{max}}{u_{min}}.$$

8. Simulaciones en MATLAB. Usando la rutina `dde23` se puede ejecutar la integración numérica de la ecuación logística.

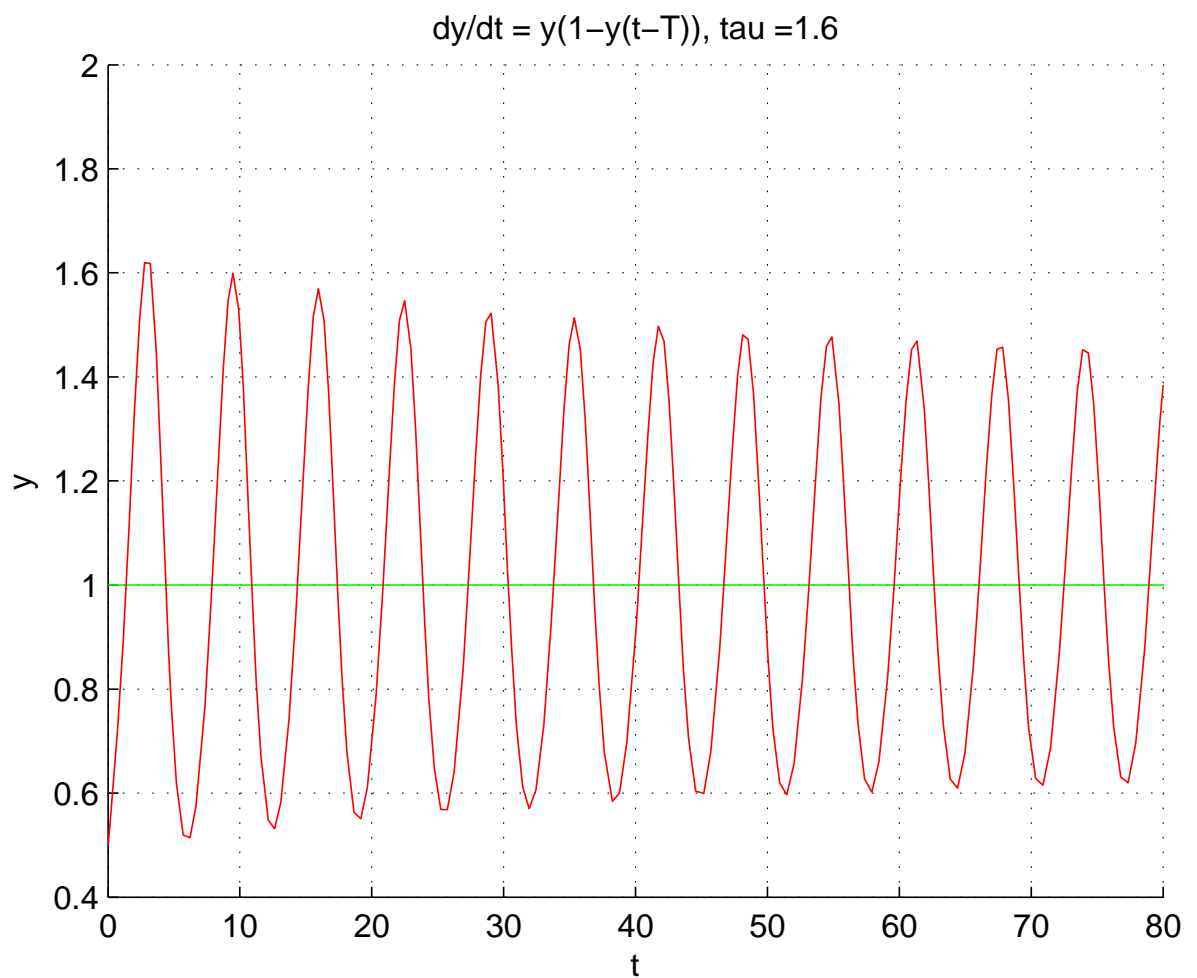
- $\tau = 0,5$. El equilibrio $u = 1$ es asintóticamente estable.



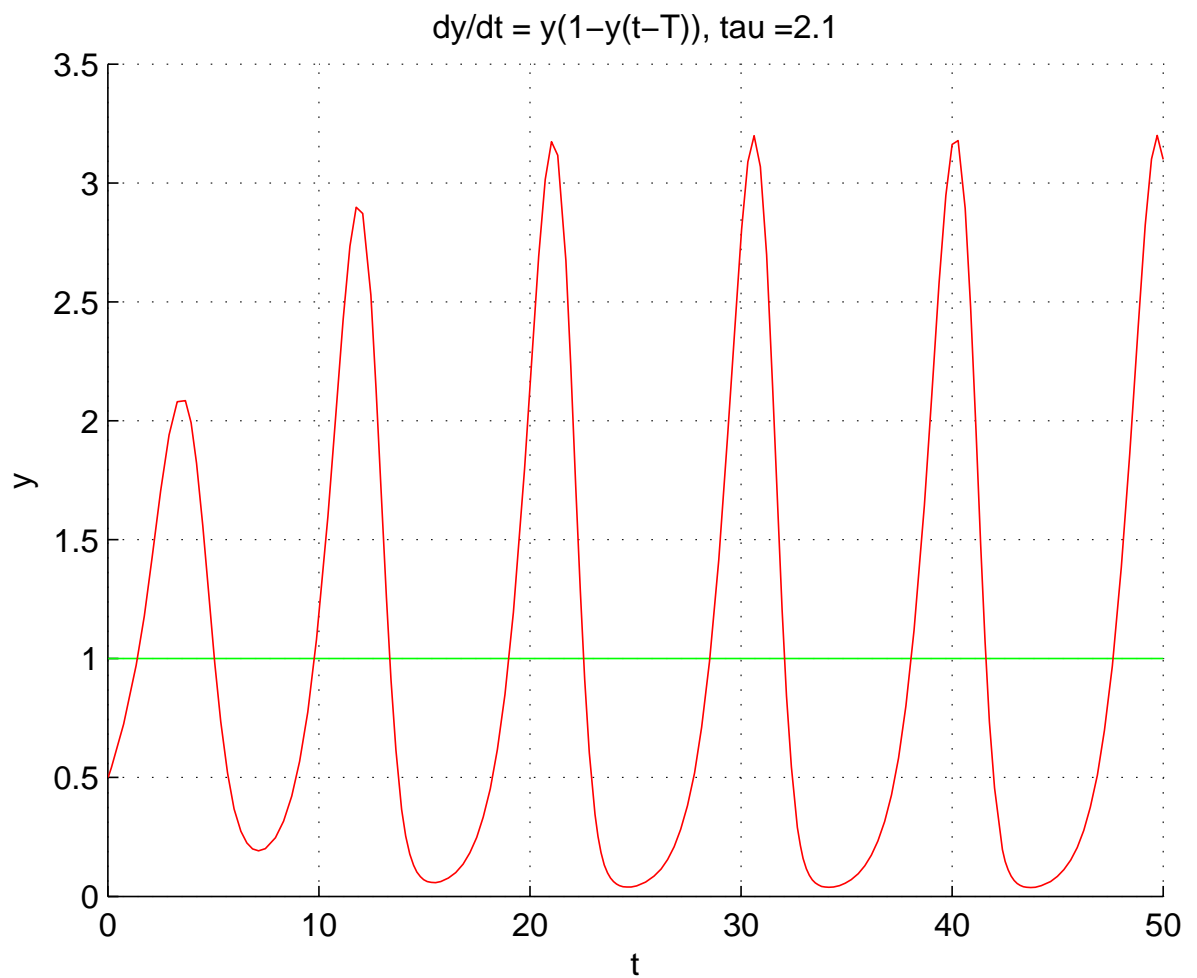
- $\tau = 1,5$. El equilibrio $u = 1$ es asintóticamente estable, sin embargo la tasa de disipación ($\mu(T)$) es más débil y las oscilaciones tardan más en degradarse.



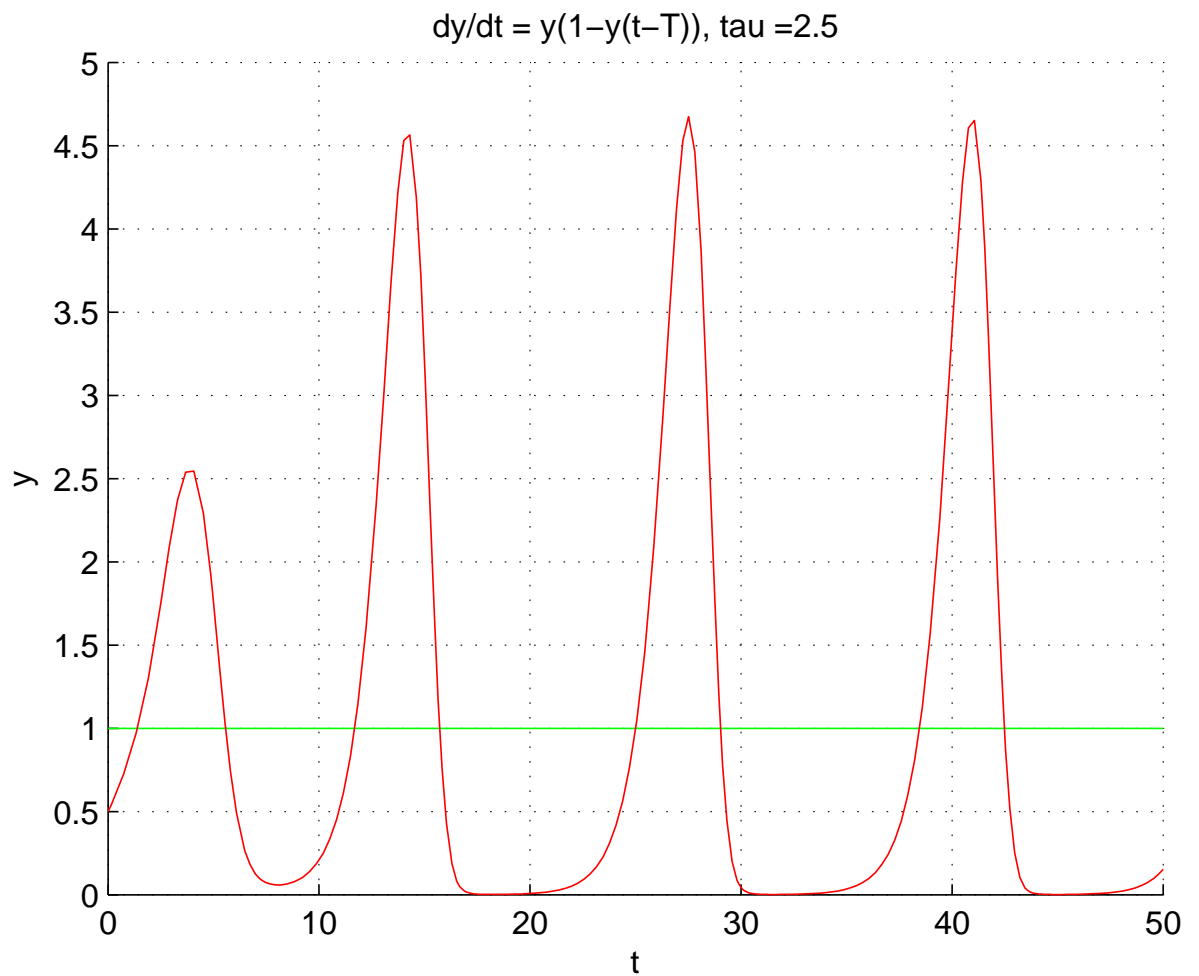
- $\tau = 1,6 > \frac{\pi}{2}$. El equilibrio $u = 1$ se ha desestabilizado dando lugar a una solución periódica de periodo $\hat{t}_p \simeq 6,44 \simeq 2\pi$.



- $\tau = 2,1 > \frac{\pi}{2}$. La solución periódica de periodo $\hat{t}_p \simeq 9,53$.



- $\tau = 2,5$. La solución periódica de periodo $\hat{t}_p \simeq 13,4$.



9. Caso de estudio: la mosca “Lucilia Cuprina”.

- Se conoce como la “mosca de la carne” (mosca azul-verde), cría en la carroña, cadáveres, heridas, etc. El Cuerpo Nacional de Policía mantiene un laboratorio donde se estudia “LC”.
- Un verdadero azote de las granjas de cría de ovejas en Australia donde produce pérdidas de centenares de millones anuales.
- Puesta de huevos en la lana, en 8 horas → larva, ésta se adhiere a la piel para alimentarse durante 6 – 11 días (poiquiloterms, 30°C), segregan amoníaco y causan heridas –que dan lugar a una enfermedad: la “miasis quística” – que en muchos casos conducen a la muerte. De larva → pupa (se sueltan del animal y se entierran en el suelo) y de 7 – 14 días forman un adulto.



- En 1954 A. J. Nicholson realizó minuciosos experimentos durante 2 años para desvelar el ciclo vital de “LC”. En condiciones ideales de temperatura y bajo estricto control se contabilizaron los efectivos de una población ($K =$ hígado crudo). Observó las evidentes oscilaciones del n^o de efectivos de la misma (el periodo de oscilación no se veía afectado al cambiar $K \rightarrow 2K$).
- De los “censos” se deduce que $t_p \simeq 35 - 40$ días (resultados publicados en 1957).

- En 1973 May (Op. Cit.) sugiere que una posible explicación de la presencia de oscilaciones puede ser el “tiempo de maduración de las larvas” estimado en 11 días.

- El análisis de los datos de Nicholson sugiere que

$$\frac{N_{max}}{N_{min}} \approx 84,1 \quad \Rightarrow \quad \tau \simeq 2,1.$$

El periodo correspondiente resulta:

$$t_p = 4,54T.$$

Si ha de ser

$$t_p = 4,54T \in [35, 40] \quad \Rightarrow \quad T \in [7,71, 8,81],$$

estimación que no discrepa substancialmente de las observaciones del ciclo vital de *Lucilia Cuprina*.

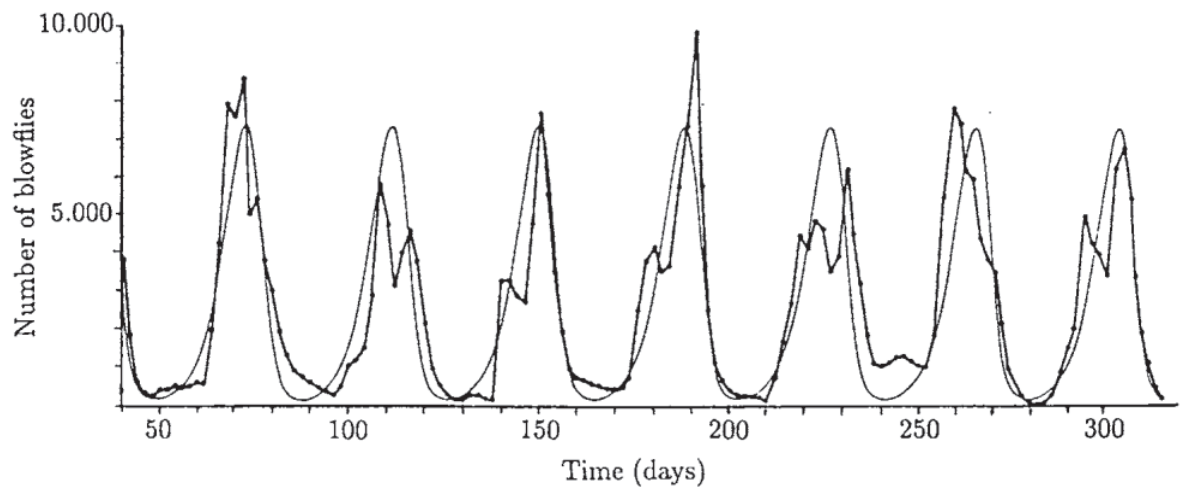


Figure 1.12. Comparison of Nicholson's (1957) experimental data for the population of the Australian sheep-blowfly and the model solution from (1.12) with $rT = 2.1$. (From May 1975).