Poblaciones estructuradas por edades

Máster en Matemática 08-09

Universidad de La Laguna

La Laguna, 4 de noviembre de 2008

1. El modelo.

- El primer modelo de la dinámica de poblaciones se remonta a Fibonacci.

- A finales del XVIII, Malthus propone un modelo poblacional para la especie humana con tasa de crecimiento constante. Su trabajo ejerce una gran influencia sobre Darwin.

- Verhulst (1838) modifica el modelo de Malthus.

- A. Lotka (1922) introduce los primeros modelos de poblaciones estructuradas por edades.

- El modelo que describimos se debe esencialmente a W. O. Kermack y A. G. McKendrick (1932,33).

La variables:

- $a =$ edad, $t =$ tiempo, $u(a,t) =$ densidad de individuos que en el tiempo t tienen la edad a.

De esta forma:

$$\int_{a_1}^{a_2} u(a,t)\ da$$

es el n^o individuos con edad $a \in [a_1, a_2]$ en el instante t.

- $\mu(a,t)$ es la tasa de mortalidad entre las edades a y $a+da$, en el instante t.

- $\nu(a,t)$ es la tasa de natalidad en el instante t, diversificada entre las diversas edades de la población.

Análisis de la mortalidad. Para h pequeño el total de individuos con edad a en el instante t que no sobrevive hasta la edad $a+h$ es:

$$\mu(a,t) \times h \times \int_{a-h}^{a} u(\alpha,t)\ d\alpha.$$

Análisis de la natalidad. En el instante t, e. d. entre t y $t+h$ con h pequeño, el tramo de edad $a_1 \leq a \leq a_2$ aporta:

$$h \times \int_{a_1}^{a_2} \nu(a,t) u(a,t)\ da$$

nuevos individuos. El número total de recién nacidos en la población en el instante t (entre t y $t+h$) es:

$$h \times \int_{0}^{\infty} \nu(a,t) u(a,t)\ da.$$

Ecuación de von Foerster (1958).

Entre los instantes $t-h$ y t la variación total de individuos es:

$$\int_a^{a+h} u(\alpha, t+h)\, d\alpha = \int_{a-h}^{a} u(\alpha, t)\, d\alpha - \mu(a-h, t)h \int_{a-h}^{a} u(\alpha, t)\, d\alpha.$$

Dividiendo por h^2 y haciendo $h \to 0$ se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mu(a,t)u.}$$

Se supone que $u(a,t)$ definida en $a, t \geq 0$.

Condición inicial.

$\boxed{u(a,0) = u_0(a)}$ para $a \geq 0$.

Condición de contorno.

Los nacidos entre t y $t+h$ componen la clase de edad $0 \leq a \leq h$ en el instante $t+h$. Los que han nacido entre t y $t+h$ son:

$$\int_0^h u(a,t+h)\ da \sim u(0,t) \times h \qquad\qquad h \sim 0.$$

Comparando con la tasa de natalidad concluimos que:

$$\boxed{u(0,t) = \int_0^\infty \nu(a,t)u(a,t)\ da, \qquad\qquad t \geq 0.}$$

Modelo Lineal.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\mu(a,t)u & a \geq 0, t \geq 0 \\ u(a,0) = u_0(a) & a \geq 0 \\ u(0,t) = \displaystyle\int_0^\infty \nu(a,t)u(a,t)\ da, & t \geq 0. \end{cases}$$

- $\mu(a,t) \geq 0$ tasa de mortalidad por edades.

- $\nu(a,t) \geq 0$ tasa de natalidad por edades.

$\star$ Típicamente $\text{lím}_{a\to\infty} u_0(a) = 0$ o directamente $u_0(a) = 0$ para $a \geq A^*$.

2. El problema de valor inicial. Con un dato inicial $\varphi(a)$ en toda la recta $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\mu(a,t)u & a \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(a,0) = \varphi(a) & a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

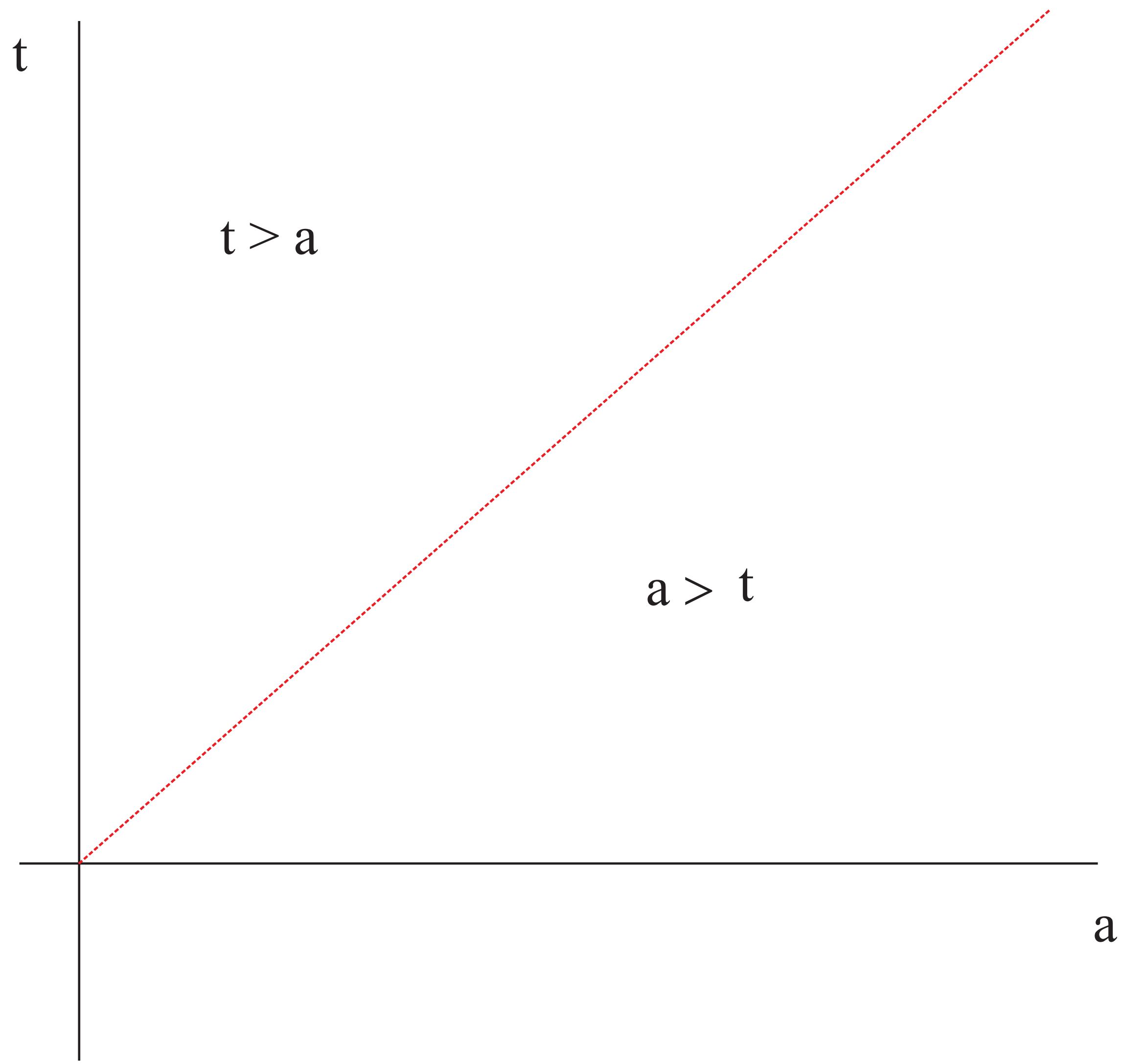
la solución se expresa en la forma siguiente:

$$u(a,t) = \varphi(a-t)e^{-\int_0^t \mu(a-t+s,s)\ ds}.$$

En lo que sigue se supone que μ, ν y u_0 son continuas en sus dominios respectivos.

2.1. Ajuste de la condición inicial. Para $a \geq t$, $a - t \geq 0$. Para ajustar la condición inicial basta elegir:

$$\varphi(a) = u_0(a) \qquad\qquad a \geq 0.$$


t
t > a
a > t
a

2.2. Ajuste de la condición de contorno. Introducimos:

$$B(t) = u(0,t).$$

Entonces:

$$B(t) = \varphi(-t)e^{-\int_0^t \mu(s-t,s)\ ds} \qquad t \geq 0$$

$$\varphi(-t) = B(t)e^{\int_0^t \mu(s-t,s)\ ds} \qquad t \geq 0$$

así:

$$\varphi(t) = B(-t)e^{\int_0^{-t} \mu(s+t,s)\ ds} \qquad t \leq 0.$$

La función $B(t)$ describe la renovación de la especie y es una incógnita del problema.

En la región $t \geq a$ se tiene:

$$u(a,t) = \varphi(a-t)e^{-\int_0^t \mu(s+a-t,s)\ ds}$$
$$= B(t-a)e^{\int_0^{t-a} \mu(s+a-t,s)\ ds} e^{-\int_0^t \mu(s+a-t,s)\ ds}$$
$$= B(t-a)e^{\int_t^{t-a} \mu(s+a-t,s)\ ds} = B(t-a)e^{-\int_0^a \mu(s,s+t-a)\ ds}.$$

Por tanto:

$$u(a,t) = \begin{cases} B(t-a)e^{-\int_0^a \mu(s,s+t-a)\ ds} & t > a \\ u_0(a-t)e^{-\int_0^t \mu(a-t+s,s)\ ds} & a \geq t. \end{cases}$$

La ecuación de renovación. Para determinar $B(t)$ escribimos:

$$u(a,t) = \begin{cases} B(t-a)k(a,t) & t > a \\ u_0(a-t)m(a,t) & a \geq t. \end{cases}$$

con

$$m(a,t) = e^{-\int_0^t \mu(a-t+s,s)\ ds}, \qquad k(a,t) = e^{-\int_0^a \mu(s,s+t-a)\ ds}.$$

Entonces (ecuación de renovación):

$$\boxed{B(t) = \int_0^t \nu(a,t)k(a,t)B(t-a) + f(t),}$$

con

$$f(t) = \int_0^\infty \nu(a,t)m(a,t)u_0(a-t)\ da.$$

2.3. Anulación cuando $a \longrightarrow \infty$ Como:

$$u(a,t) = \begin{cases} B(t-a)k(a,t) & t > a \\ u_0(a-t)m(a,t) & a \geq t, \end{cases}$$

y se tiene $0 < m(a,t) \leq 1$, $0 < k(a,t) \leq 1$ entonces:

$$\lim_{a \longrightarrow \infty} u(a,t) = 0,$$

supuesto que $u_0(a) = O(1)$ cuando $a \to \infty$.

2.4. Ecuación de Malthus $\mu(t)$, $\lambda(t)$. En este caso la población total:

$$U(t) = \int_0^\infty u(a,t)\ da$$

cumple:

$$\frac{dU}{dt} = (\lambda(t) - \mu(t))U \qquad U(0) = \int_0^\infty u_0(a)\ da.$$

2.5. Dependencia en la edad $\mu(a)$, $\lambda(a)$ En este caso:

$$u(a,t) = \begin{cases} B(t-a)\Pi(a) & t > a \\ u_0(a-t)\dfrac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} & a \geq t. \end{cases}$$

La ecuación de renovación es:

$$B(t) = \int_0^t \nu(a)\Pi(a)B(t-a)\ da + f(t),$$

donde

$$f(t) = \int_t^\infty \nu(a)\frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)}u_0(a-t)\ da,$$

mientras:

$$\Pi(a) = e^{-\int_0^a \mu}.$$

3. La ecuación de renovación. Suponemos $\mu(a)$, $\nu(a)$. La ecuación es:

$$B(t) = \int_0^t K(a) B(t-a)\ da + f(t), \qquad K(a) = \nu(a)\Pi(a),$$

donde

$$f(t) = \int_0^\infty \nu(a) \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} u_0(a-t).$$

Unas hipótesis razonables son:

- $\mu, \nu, u_0 \in C[0, \infty)$, $\nu(a) = u_0(a) = 0$ para $a \geq A^*$.

Teorema 1. *La ecuación de renovación admite una única solución $B(t)$ que cumple:*

$$|B(t)| \leq M e^{\omega t}$$

para ciertas constantes M, ω positivas.

Demostración. Para $A > 0$ fijado consideramos $X = C[0, A]$ con la norma de Bielecki:

$$|B|_c = \sup e^{ct}|B(t)|,$$

y el operador $\mathcal{T}$ de X en X con $B_1 = \mathcal{T}(B)$ dado por

$$B_1(t) = \int_0^t K(a)B(t-a)\ da + f(t).$$

Para $c < 0$ adecuado $\mathcal{T}$ define una contracción en X y el punto fijo es B. Además $B(t)$ se puede definir en $[0, \infty)$. $\square$

Por otra parte:

$$|B(t)| \leq f_\infty + K_\infty \int_0^t |B(\tau)|\ d\tau$$

de donde:

$$\boxed{|B(t)| \leq Me^{\omega t}} \qquad M = f_\infty, \omega = K_\infty$$

4. Transformada de Laplace. La función de renovación $B(t)$ admite transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}(B)(p) = \int_0^\infty e^{-tp} B(t)\ dt \qquad \Re p > \omega.$$

Transformando la ecuación de renovación:

$$B(t) = \int_0^t K(a) B(t-a)\ da + f(t),$$

resulta:

$$\mathcal{L}(B)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{1 - \mathcal{L}(K)(p)}.$$

El segundo miembro define una función meromorfa de p en $\mathbb{C}$ con polos en las raíces de $\mathcal{L}(K)(p) = 1$:

$$1 = \int_0^\infty K(a) e^{-ap}\ da,$$

la *ecuación característica* (A. Lotka, 1922).

⋆ La ecuación característica $\mathcal{L}(K)(p) = 1$ admite una única raíz real p^* dominante:

$$\mathcal{L}(K)(p) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Re p < p^*.$$

Invirtiendo:

$$\mathcal{L}(B)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{1 - \mathcal{L}(K)(p)},$$

resulta:

$$B(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re p = \sigma} e^{pt} \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{1 - \mathcal{L}(K)(p)}\, dp, \qquad \sigma > p^*.$$

⋆ Del teorema de los residuos resulta que

$$B(t) = B_0 e^{p^* t} + o(e^{p^* t}) \qquad t \to \infty.$$

Más tarde diremos quién es B_0.

5. Poblaciones estables Una distribución de población $u(a,t)$ se dice que posee una “estructura estable” si:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{a_1}^{a_2} u(a,t)\ da}{\int_0^{\infty} u(a,t)\ da} = c.$$

Para soluciones de la forma:

$$\boxed{u(a,t) = T(t)A(a)},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{a_1}^{a_2} u(a,t)\ da}{\int_0^{\infty} u(a,t)\ da} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} A(a)\ da}{\int_0^{\infty} A(a)\ da}$$

y lo mismo cabría decir para soluciones $u(a,t)$ si

$$\lim_{t\to\infty} u(a,t) - u^*(a,t) = 0,$$

para cierta solución $u^*(a,t) = T(t)A(a)$.

5.1. Soluciones autosimilares Son precisamente las que corresponden a la expresión precedente:

$$u(a,t) = T(t)A(a).$$

Deben cumplir:

$$\frac{A'}{A} + \mu(a) = -\frac{T'}{T} = -p,$$

con:

$$1 = \int_0^\infty \nu(a)\Pi(a)e^{-pa}\, da.$$

Son de la forma:

$$u^*(a,t) = A_0\Pi(a)e^{p^*(t-a)},$$

donde p^* es la raíz dominante y A_0 es una constante.

⋆ Si $p* = 0$, las soluciones autosimilares $u^*(a,t) = A_0\Pi(a)$ son también soluciones estacionarias.

5.2. Comportamiento asintótico. Si $u(a,t)$ resuelve el problema modelo sabemos que, para $t > a$:

$$u(a,t) = B(t-a)\Pi(a) = (1+o(1))B_0 e^{p^*(t-a)}\Pi(a),$$

donde

$$B_0 = \frac{\mathcal{L}(f)(p^*)}{\mathcal{L}(K)'(p^*)} \qquad \mathcal{L}(K)'(p^*) = \int_0^\infty aK(a)e^{-p^*a}\,da.$$

En particular:

$$u(a,t) \sim u^*(a,t) = B_0 e^{p^*(t-a)}\Pi(a) \qquad t \longrightarrow \infty.$$

Por tanto:

$$\lim_{t\to\infty} u(a,t) = \begin{cases} 0 & p* < 0 \\ B_0\Pi(a) & p^* = 0 \\ \infty & p* > 0. \end{cases}$$

Anexo. Vamos a dar una interpretación del término $\Pi(a) = \exp\left(-\int_0^a \mu\right)$. Por definición $\mu(a)\Delta a$ es la probabilidad de no sobrevivir de la edad a a la $a + \Delta a$ con Δa pequeño. Por consiguiente $\sigma(a)\Delta a = 1 - \mu(a)\Delta a$ es la probabilidad de sobrevivir de la edad a a la $a + \Delta a$.

Vamos a obtener ahora la probabilidad p_a de alcanzar la edad a. Dividiendo el intervalo $[0, a]$ en un número $N >> 1$ de partes iguales, poniendo $a_i = ia/N := i\Delta a$ podemos imaginar la probabilidad de llegar a a años como la probabilidad de haber cumplido primero $a_1, \ldots, a_N$ años. Escribiendo:

$$p_a = (1 - \mu(a_1)\Delta a) \ldots (1 - \mu(a_n)\Delta a),$$

$$\log p_a \sim - \sum_{i=1}^{N} \mu(a_i)\Delta a.$$

Haciendo $N \to \infty$ obtenemos que:

$$p_a = e^{-\int_0^a \mu}.$$