Introdución a las Ecuaciones Diferenciales no lineales

JOSÉ SABINA DE LIS

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna

Resumen. La charla tratará de describir de la manera más sencilla posible algunas de los conceptos e ideas más significativos en la teoría de ecuaciones diferenciales. Aquí va un pequeño adelanto:

(1) ¿ Qué es una ecuación diferencial?
(2) El ejemplo por antonomasia: discusion del problema de los dos cuerpos. El determinismo.
(3) Breve panorámica histórica. La aproximación analítica a la existencia de soluciones: funciones especiales. No integrabilidad: resultado de Liouville. Poincaré y el problema de los tres cuerpos.
(4) Introducción a la teoría cualitaiva: órbitas, puntos singulares, ciclos límite. Teorema de Poincaré-Bendixon.
(5) Modelos de la dinámica de Poblaciones. Sistemas Presa-Depredador. Especies en competencia.
(6) ¿ Qué sucede en dimensiones superiores? Un modelo determinista con respuesta no determinista: ecuaciones de Lorentz. Caos.
(7) Algo sobre métodos numéricos de integración: méodos de Euler y Runge-Kutta.

REFERENCES

Braun M., *Differential Equations and its Applications*, Springer-Verlag, Berlín (1983).

Guckenheimer J., Holmes Ph, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, Berlín (1983).

Hale J., Koçak H., *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, Berlín (1991).

Koçak H., *Differential Equations and Difference Equations through Computer Experiments*, Springer Verlag, Berlín (1989).

Mainard Smith, *Mathematical Ideas in Biology*, Cambridge University Press (1971).

C/ Astrofísico Sánchez s/n, 38271-La Laguna, España

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

" Introducción a las ecuaciones diferenciales no lineales "

José Salinas de Lis

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

20 marzo de 1995

§1. Introducción

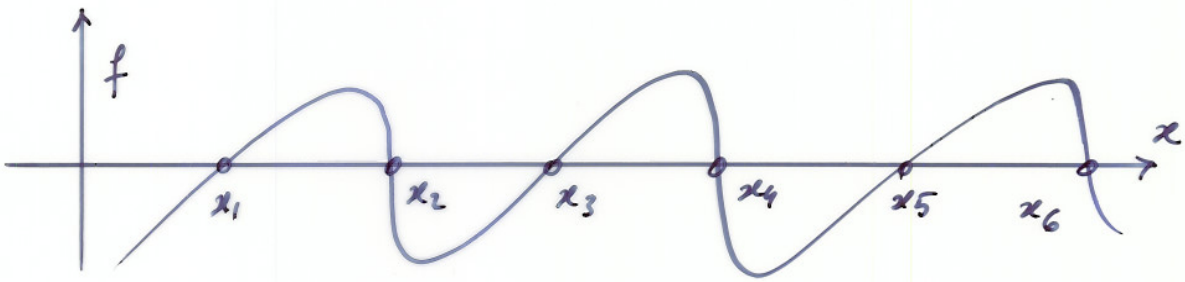
1.1. ¿Qué es una ecuación diferencial?

Uno de los problemas más importantes en matemáticas: resolución de ecuaciones

$$f(x) = 0$$

algebraicas o no. Por ejemplo:

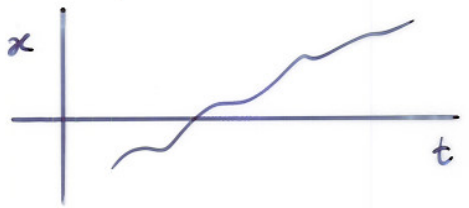
$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

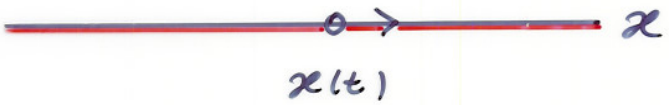


- Incógnitas numéricas, un número finito de soluciones

- Desde los comienzos del Cálculo infinitesimal, siglos XVII - XVIII, Newton, Leibnitz, aparecen las e.d.o.'s en problemas de mecánica, astronomía, dinámica, optica, cálculo de variaciones y geometría.

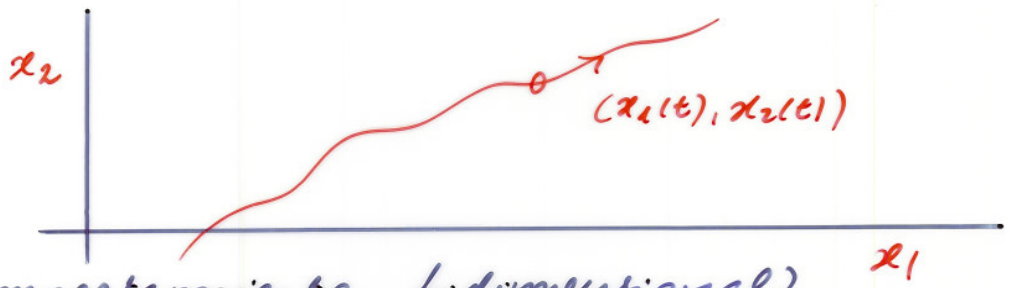
- La incógnita es ahora "toda" una función de t : $x(t)$





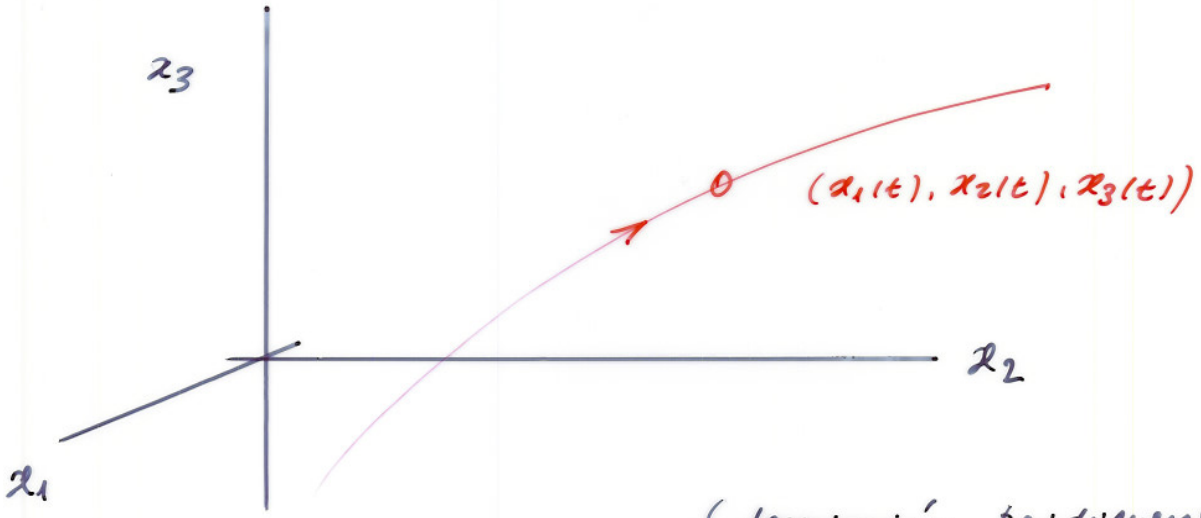
(se describe un comportamiento ó estado unidimensional)

... ó bien un par de funciones incógnitas $(x_1(t), x_2(t))$



(comportamiento bidimensional)

... ó bien un triplete de funciones incógnitas $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$



(descripción tridimensional de los estados de un sistema: 3 variables significativas)

... ó, más en general la ecuación diferencial puede implicar n funciones de t (típicamente el tiempo pero no siempre)

$$(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

que describen n variables características de un sistema.

Tales ecuaciones se expresan matemáticamente de una forma muy sencilla:

- $n = 1$ $\qquad x'(t) = f(x(t))$

- $n = 2$ $\qquad \begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases}$

- $n=3$ $\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ x_3'(t) = f_3(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \end{cases}$,

o en general:

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

- El problema matemático es muy sencillo de plantear: es una variación (mucho) más compleja del cálculo de primitivas clásico.

- En la práctica: estudiar fenómenos donde se conoce una ley de evolución para las variables características del sistema $x_1(t), \dots, x_n(t)$

Objetivo: hacer predicciones sobre la evolución futura del sistema (sobre el pasado, en algunos casos)

Determinismo: espíritu de la mecánica newtoniana.

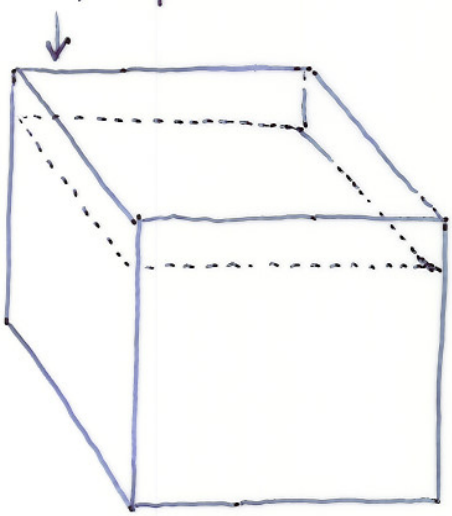
Limitación: solo variación con respec

to a una variable característica; por ejemplo el tiempo.

<u>Ejemplo</u>: Reactor químico

Reactantes

$A_1, \dots, A_p$



Productos

$\rightarrow P_1, \dots, P_q$

• Mezcla homogeneizada

Compuestos intermedios:

$C_1(t), \dots, C_n(t)$ (concentraciones)

"Ley de Acción de masas"

$$\begin{cases} C_1'(t) = f_1(C_1(t), \dots, C_n(t)) \\ \vdots \\ C_n'(t) = f_n(C_1(t), \dots, C_n(t)) \end{cases}$$

• <u>Ejemplo</u>: Dinámica de una población con n especies

$x_1(t), \dots, x_n(t)$

distribuidas homogéneamente sobre un medio geográfico.

1.2. Aspectos matemáticos

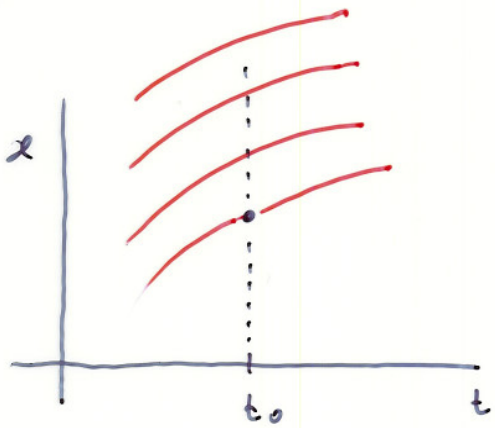
- Admiten infinitas soluciones. Podemos seleccionar soluciones imponiendo condiciones adicionales

Ejemplo 1: (Teorema fundamental del Cálculo)

$$x'(t) = f(t)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau$$

$$\begin{cases} x'(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$



Ejemplo 2: Dinámica de partículas unidimensionales, 2ª Ley de Newton

- $f(x)$ campo de fuerzas unidimensionales

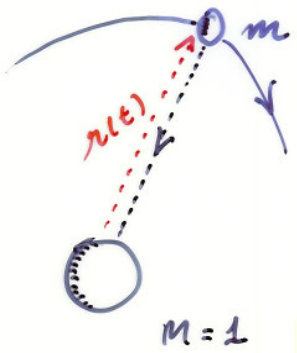
$$m\, x''(t) = f(x(t)) \qquad ó$$

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = \dfrac{1}{m} f(x(t)) \end{cases}$$

- $\bar{F}(r) = (F_1(r), F_2(r), F_3(r))$ campo de fuerzas espacial

$$r = (x, y, z)$$

$$v = (x', y', z')$$



2ª Ley de Newton

$$m\,\ddot{r} = F(r) \quad ó$$

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = \dfrac{1}{m} F(r) \end{cases}$$

<u>Principio Determinista Newtoniano</u> (Cf. V.I. Arnold)

El movimiento de la partícula queda determinado una vez que se conocen su posición y velocidad iniciales:

$$r_0 = r(t_0) \qquad v_0 = v(t_0)$$

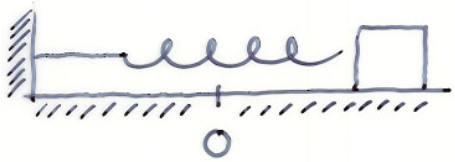
- Campo gravitatorio:

$$F(r) = -\frac{G\,m}{|r|^3} \cdot r$$

$$|r| = r \cdot r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Oscilador armónico con 1 grado de libertad:

$$m\, x'' = -k\, x$$



Ley de Hooke

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -\dfrac{k}{m}\, x \end{cases}$$

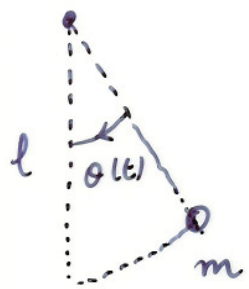
$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad v(t_0) = v_0$$

$$x(t) = x_0 \cos(t-t_0) + v_0 \operatorname{sen}(t-t_0)$$

$$v(t) = -x_0 \operatorname{sen}(t-t_0) + v_0 \cos(t-t_0)$$

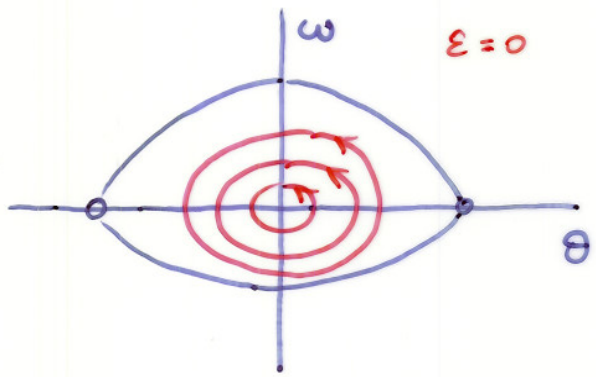
Soluciones Periódicas

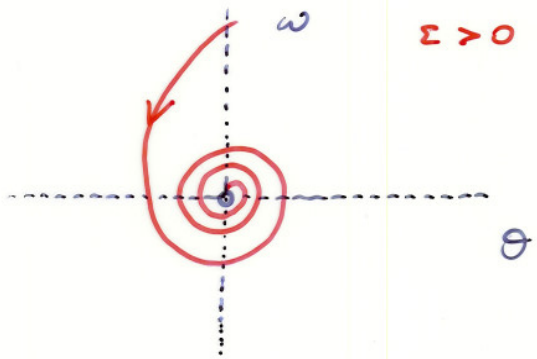
- Pendulo simple con o sin fricción



$$\theta'' = -\operatorname{sen}\theta - \varepsilon\, \theta'$$

$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -\operatorname{sen}\theta - \varepsilon\, \theta' \end{cases}$$





Soluciones Periódicas

Ejemplo 3 - Leyes de crecimiento Malthusiano y logístico (ley de desintegración radiactiva de L. Rutherford, $k = -\lambda$).

- Una población con número de individuos $x(t)$ en el instante t: recursos ilimitados, diferencia constante entre tasas de natalidad y mortalidad, puede describirse ($x(t)$ no muy grande) mediante:

$$x'(t) = k\, x(t) \quad (*) \qquad k > 0$$

k = constante

Predicción: (datación radiactiva por C^{14}, W. Libby)

$$\begin{cases} x'(t) = k\, x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = x_0\, e^{-k(t-t_0)}$$

(M. Braun, Meinard Smith)

- La población de una especie con número de individuos $x(t)$: no sometida a competición ni depredación por parte de otras especies pero cuyo crecimiento está controlado por una

cantidad limitada de recursos puede describirse por: (Verhulst, 1837)

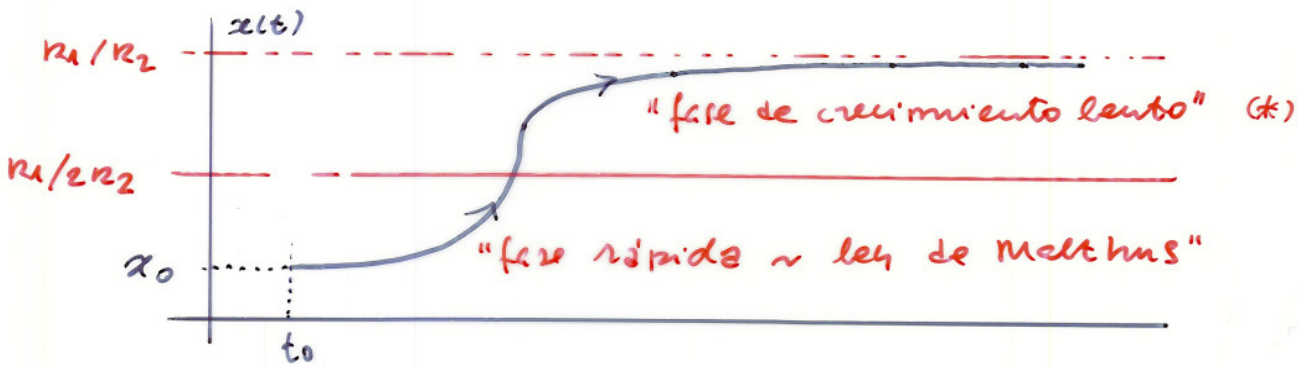
$$x'(t) = R_1 x - \underbrace{R_2 x^2}_{\text{promedio del nº de encuentros}}$$

Predicción:

$$\begin{cases} x'(t) = R_1 x(t) - R_2 x(t)^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{R_1}{R_2} \frac{R_2 x_0}{R_2 x_0 + (R_1 - R_2) e^{-R_1(t-t_0)}}$$

$$x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{R_1}{R_2}$$ población de equilibrio



"Curva logística"

(*) $$x' = R_2 x \underbrace{\left(\frac{R_1}{R_2} - x \right)}_{\text{"resistencia ambiental al crecimiento"}}$$

Ejemplo 4.- Principio de Exclusion Competitiva: Especies en Competencia.

"Debido a que las especies de un mismo género presentan usualmente, aunque no en forma invariable, mucho mayor similitud en habitat, constitucion y siempre en estructura, la lucha entre ellos será, por lo general, más intensa si llegan a competir entre sí que si lo hacen con especies de géneros distintos" (Darwin, 1859)

Dos especies similares rara vez comparten el mismo "nicho ecológico" (propiedad de tener mismos hábitos de vida y mismo tipo de alimento y distribución geográfica): la competición se zanjará con la extinción de una de ellas.

El modelo matemático: dos ecuaciones logísticas acopladas ($N_1(t)$ nº de individuos de una especie $N_2(t)$ nº de individuos de la otra)

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1 N_1 \cdot \underbrace{\left(\frac{K_1 - N_1 - m_2}{K_1}\right)}_{①}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = a_2 N_2 \cdot \underbrace{\left(\frac{K_2 - N_2 - m_1}{K_2}\right)}_{②}$$

①, ② "resistencia ambiental al crecimiento"

$m_2 = \alpha N_2$ ~ nº total de sitios de la especie 1 ocupados por la especie 2 : α, β coeficientes de influencia

$m_1 = \beta N_1$

- Caso crítico $\alpha = \beta$.

- $\alpha = \beta = 0$: no hay interferencia

$$N_1(t) \longrightarrow K_1$$
$$N_2(t) \longrightarrow K_2$$
: coexistencia $(t \to \infty)$

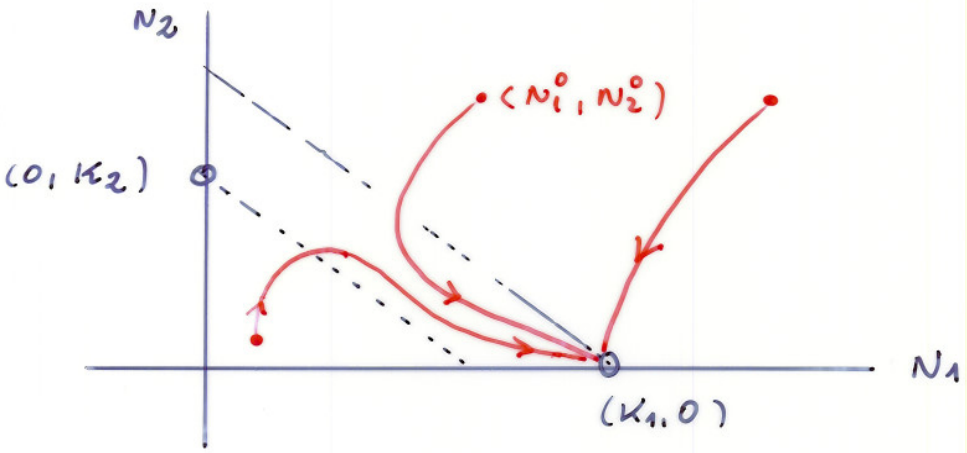
- $\alpha = \beta \neq 0$: no hay coexistencia

i) $K_1 > K_2$: extinción de la especie 2

ii) $K_2 > K_1$: extinción de la especie 1

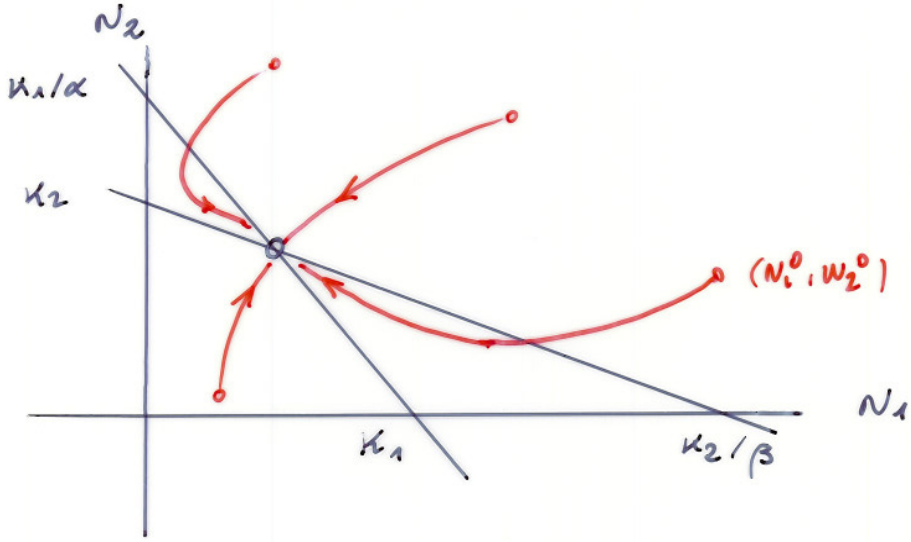
i) $N_1(t) \to K_1$, $N_2(t) \longrightarrow 0$ $(t \to \infty)$

ii) $N_2(t) \longrightarrow K_2$, $N_1(t) \longrightarrow 0$



- $\alpha \neq \beta$, $(K_1/\alpha) > K_2$ $(K_2/\beta) > K_1$

$$N_1(t) \longrightarrow \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}$$
$$N_2(t) \longrightarrow \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta}$$
coexistencia



Ejemplo 5 : "Sistemas Presa y Depredador"

Vito Volterra (1925) publicó : " Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte la vie". (1931)

V. D'Ancona le planteó estudiar un modelo matemático para el estudio de las asociaciones biológicas : el objetivo era dar respuesta a las fluctuaciones observadas en las poblaciones de selacios (tiburones, mantarrayas), los depredadores, y de otras especies de peces comestibles, las presas, en el mar Adriático durante la primera guerra mundial (1914-1918).

Si $x(t)$: nº de presas , $y(t)$: nº de depredadores, el modelo de Volterra :

(promedio del nº de encuentros)

$$\frac{dx}{dt} = \overset{+}{a}\, x - b\, x\, y$$

$$\frac{dy}{dt} = -c\, y + d\, x\, y$$

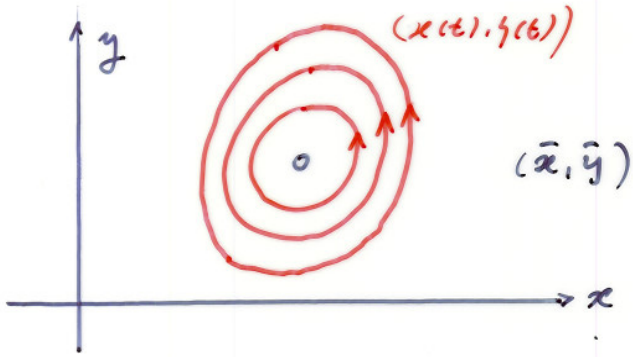
✓ las presas no compiten por el medio
✓ los depredadores se extinguen en ausencia de presas

Las poblaciones de presas $x(t)$ y depredadores $y(t)$ son periódicas de periodo T y oscilan - todas ellas - con promedios:

$$\bar{x} = \frac{c}{d} \quad , \quad \bar{y} = \frac{a}{b} \qquad \text{es decir}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \qquad \bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt .$$

- Coexistencia periódica (no "persistente" ó "estable")



$(\bar{x}, \bar{y})$: solución de equilibrio

- Un modelo más moderno de Holling y Turner (Rosenzwieg - Mc Arthur) para competición entre presas $x(t)$, depredadores $y(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(\gamma - x) - \overbrace{\frac{x}{1+x}\, y}^{①}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + \beta \underbrace{\frac{x}{1+x}\, y}_{②}$$

①, ② interacción "saturada"

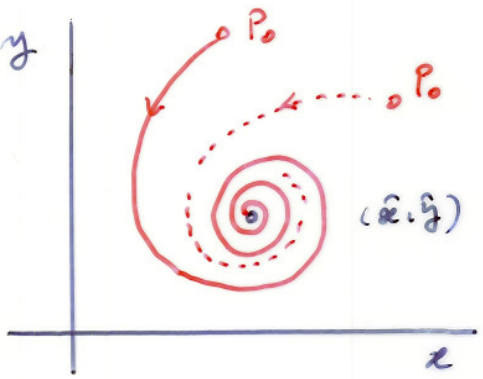
- Si $\beta < \dfrac{1+\gamma}{\gamma}$ coexistencia estable de comportamiento asintótico de tipo estacionario $(\bar{x}, \bar{y})$ para todas las soluciones:

$$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \bar{x} = \frac{1}{\beta-1}$$

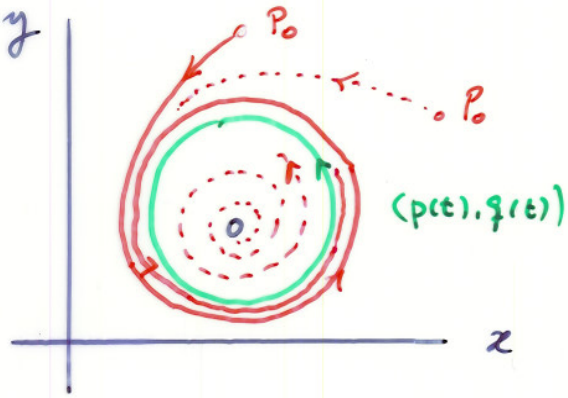
$$y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \bar{y} = \left(\frac{1}{\beta-1}+1\right)\cdot\left(\gamma - \frac{1}{\beta-1}\right)$$

- Si $\dfrac{1+\gamma}{\gamma} < \beta$ coexistencia estable de comportamiento asintótico periódico (ciclo límite): existe $(p(t), q(t))$ periódica, tal que, para toda solución $(x(t), y(t))$ se tiene:

$$x(t+\tau) \longrightarrow p(t)$$
$$y(t+\tau) \longrightarrow q(t) \qquad (t\to\infty)$$



$(\bar{x}, \bar{y})$: asintóticamente estable, ¡observable!



$(p(t), q(t))$: asintóticamente estable, ¡observable!

Ejemplo 6: Mecánica de Fluidos, fluidodinámica y meteorología

Los fluidos se describen mediante magnitudes como la presión $p(r,t)$ y el campo de velocidades

$$\vec{u}(r,t) = (u_1(r,t), u_2(r,t), u_3(r,t))^{(*)}$$

$$r = (x, y, z)$$

Cuando se conoce $\vec{u}(r,t)$ el movimiento de las partículas del fluido:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

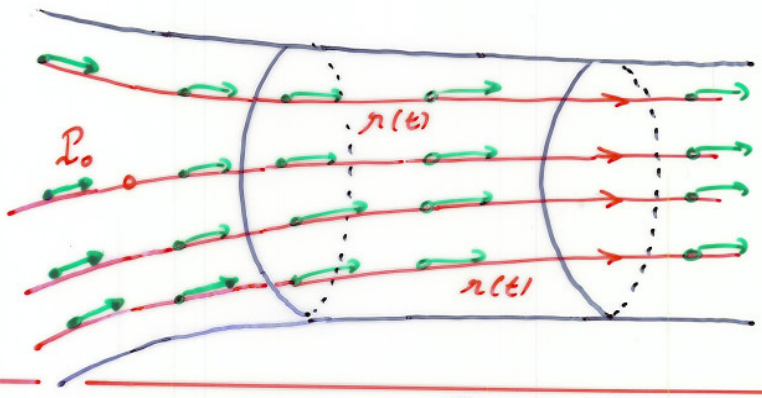
son las soluciones de la ecuación:

$$x'(t) = u_1(r,t) \qquad x(t_0) = x_0$$

$$y'(t) = u_2(r,t) \qquad y(t_0) = y_0$$

$$z'(t) = u_3(r,t) \qquad z(t_0) = z_0$$

una vez se fija la posición inicial en $t = t_0$: $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$



$\vec{u}$ = campo de velocidades

$r(t)$ = líneas fluidas

(*) Tanto $p(r,t)$ como $\vec{u}(r,t)$ son soluciones de una ecuación más compleja: las ecuaciones de Navier-Stokes

La dinámica de los fluidos incompresibles - e.d. - el comportamiento de las soluciones de la ecuación, es altamente complicado ("turbulento") en muchos casos:

" sensitividad muy alta en las condiciones iniciales" " cambios pequeños en P_0 provocan cambios drásticos en las soluciones $r(t)$ "

1.3. Aspectos teóricos

Los rasgos principales de la teoría de ecuaciones diferenciales (clases muy amplias de ecuaciones)

- Las ecuaciones exhiben muchas soluciones
- Cuando se fijan condiciones iniciales existe una única solución (difícil estimar el intervalo de existencia futura de las soluciones)
- En un intervalo finito de tiempo $t_0 \leq t \leq T$ las soluciones varían continuamente con los datos iniciales y parámetros:

  "A datos P_0 y P_0' (condiciones iniciales) próximos y parámetros λ, λ' (constantes) próximos corresponden soluciones próximas"

La información que resumimos en los siguientes enunciados es el producto de la investigación de los más insignes matemáticos: desde Newton y Leibnitz a finales del S. XVII hasta Picard y Peano, en los comienzos del presente

siglo:

Teorema 1 (Cauchy, Lipschitz, Picard, Peano)

Supongamos que las funciones $f_1(x_1, \dots, x_n, \lambda)$, $\dots$, $f_n(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ admiten todas las derivadas parciales * y son continuas. Entonces, cualesquiera que sean las condiciones iniciales $z_1^0, \dots, z_n^0$ existe una única solución $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ de:

$$x_1'(t) = f_1(x_1, \dots, x_n, \lambda)$$
$$\vdots$$
$$x_n'(t) = f_n(x_1, \dots, x_n, \lambda)$$

que cumple las condiciones iniciales:

$$x_1(t_0) = z_1^0 \ , \ \dots, \ x_n(t_0) = z_n^0$$

y que está definida durante un intervalo de tiempo:

$$\alpha \leq t \leq \omega$$

(límite en el pasado) (límite en el futuro)

#

* derivadas usuales cuando se fijan las otras variables

Observaciones

a) No se pueden obtener soluciones explícitas (técnicas muy teóricas). Durante intervalos finitos de tiempo se pueden aproximar mediante métodos numéricos.

$$t_0 \leq t \leq T < +\infty$$

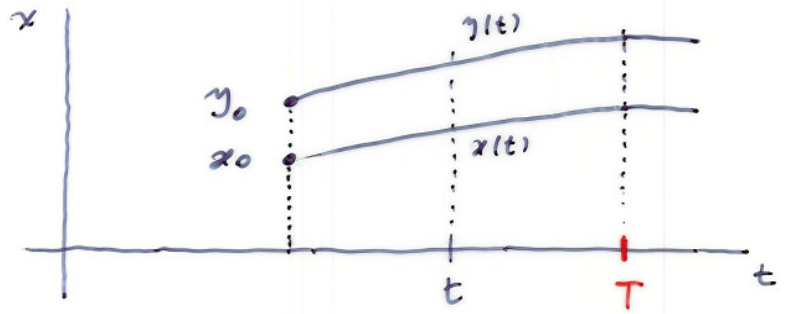
b) Un problema técnico difícil es saber si las soluciones están definidas con futuro ilimitado es decir, si las soluciones son permanentes, o bien si $\omega = +\infty$.

El segundo resultado es fundamental para las aplicaciones: en la práctica se cometen errores al medir las posiciones iniciales. Pequeñas diferencias en la me

dida de las condiciones iniciales no debería influir en las soluciones si el modelo matemático es bueno:

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$x_0 \sim y_0$ debería implicar $x(t) \sim y(t)$



El siguiente resultado responde en un "horizonte finito de tiempo"

Teorema 2

Si se fija un tiempo máximo $t_0 \leq t \leq T$ y tenemos una solución:

$$(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

con condiciones iniciales

$$x_1(t_0) = a_1 \quad \dots \quad x_n(t_0) = a_n$$

y tenemos otra solución:

$$(y_1(t), \dots, y_n(t))$$

que tiene condiciones iniciales

$$y_1(t_0) = b_1, \ldots, y_n(t_0) = b_n.$$

Pues bien:

$$\begin{array}{ccc} a_1 \sim b_1 & & x_1(t) \sim y_1(t) \\ \vdots & \Longrightarrow & \vdots \\ a_n \sim b_n & & x_n(t) \sim y_n(t) \end{array}$$

¡siempre que el tiempo no exceda el tiempo límite T!

$$t_0 \leq t \leq T$$

En otras palabras:

$$\begin{array}{ccc} a_1 \to b_1 & & x_1(t) \to y_1(t) \\ \vdots & \Longrightarrow & \vdots \\ a_n \to b_n & & x_n(t) \to y_n(t) \end{array}$$

¡siempre que $t_0 \leq t \leq T$!

#

Dos problemas fundamentales para las aplicaciones a modelos de la realidad

i) ¿Cuándo existen soluciones

$(x_1(t), \dots, x_n(t))$ permanentes, e.d.,

para todo tiempo futuro?

(ver ejemplos anteriores)

ii) ¿Esas soluciones permanentes mantienen un orden de magnitud finito? ¿En ese caso tales soluciones permantes seguirán un patrón de comportamiento conocido?

Ejemplos:

a) Soluciones constantes en la ecuación logística, el péndulo, los sistemas de competición de especies, modelo de Volterra, etc

b) Soluciones periódicas como en el oscilador armónico, modelo de Volterra, problema de los dos cuerpos, etc.

c) Otras leyes de comportamientos: multiperiódicos, caóticos, etc.

iii) Estabilidad, Estabilidad asintótica y observabilidad de las soluciones permanentes.

Esta cuestión se resumen de la forma siguiente:

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

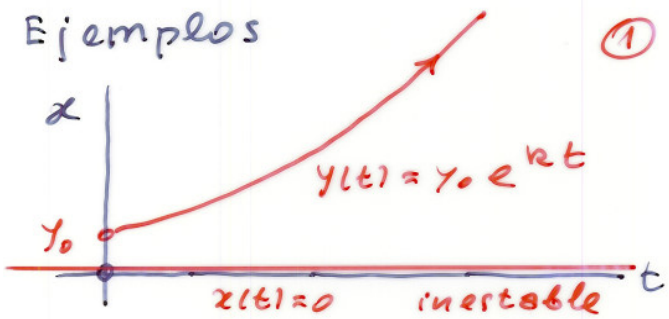
Si $x(t)$ es permante, y si $x_0 \sim y_0$ ¿se tendrá que $y(t) \sim x(t)$ cuando rebasemos el tiempo de seguridad T?

a): Si las soluciones que empiezan cerca de una solución permanente $x(t)$ se alejan, es decir

$$x(t) - y(t) \not\to 0$$

se llaman soluciones permanentes inestables.

Ejemplos

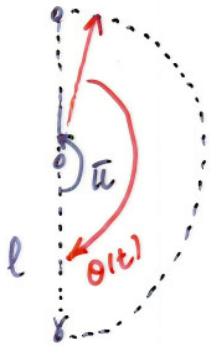


① $x' = kx$

$x(t) = 0$

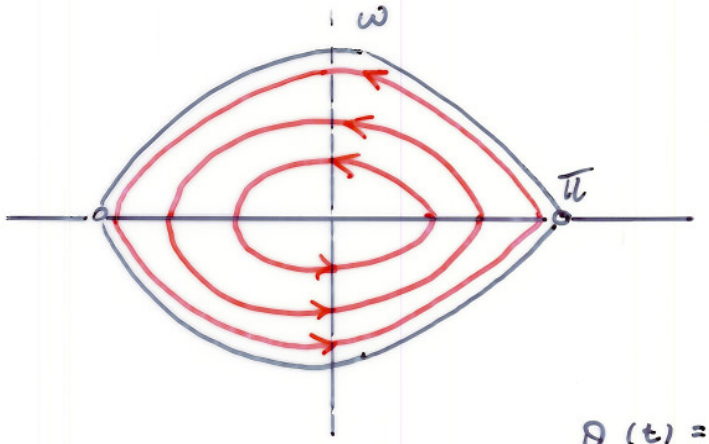
$y(t) = y_0 e^{kt}$

② Péndulo

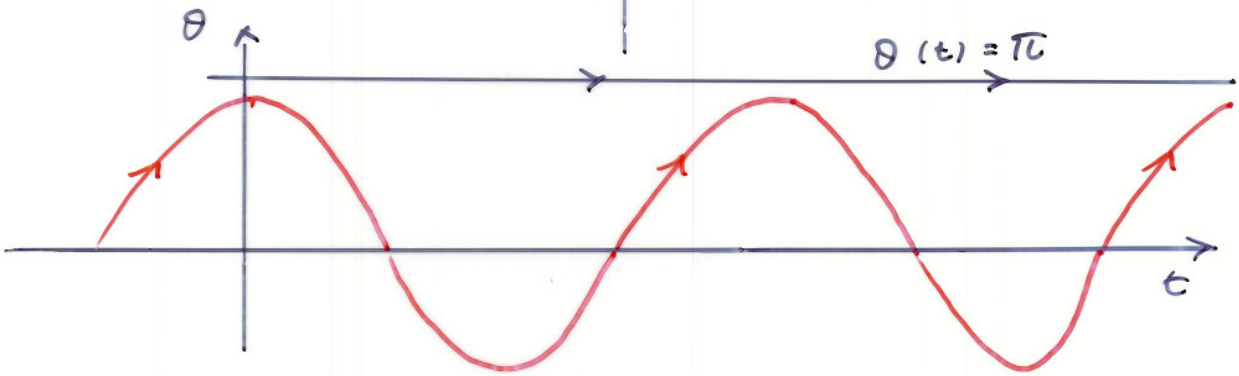


$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

• $\theta(t) = \pi$, $\omega(t) = 0$ <u>es inestable</u>



Phaser



b) Si las soluciones que empiezan cerca de una solución permanente $x(t)$ se mantienen próximas en todo tiempo futuro entonces se dice que $x(t)$ es estable.

Es decir:

$x_0 \sim y_0 \Rightarrow x(t) \sim y(t)$ para todo tiempo.

Ejemplos

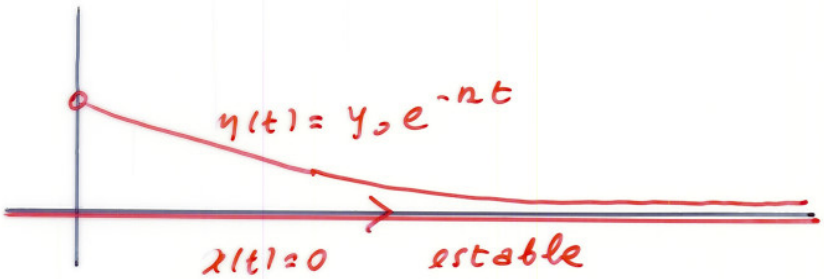
① Las oscilaciones del péndulo simple.

② Degradación radiactiva

$$x'(t) = -k\, x(t)$$

$$x(t) = 0$$

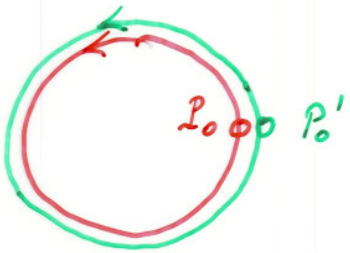
$$y(t) = y_0\, e^{-kt}$$



③ Oscilaciones en el modelo de Volterra

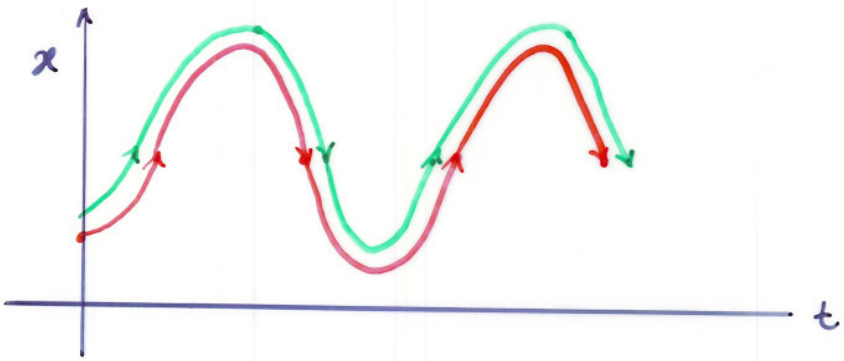
$$x' = ax - bxy$$

$$y' = -cy + dxy$$



$x(0) = a_1,\ y(0) = a_2$

$x(0) = b_1,\ y(0) = b_2$



Phaser

c) Si tenemos una solucion permanente $x(t)$ que es estable y además no solamente las soluciones $y(t)$ que empiezan próximas a $x(t)$:

$$X_0 \sim Y_0$$

se mantienen próximas a $x(t)$ sino

que además tales soluciones próximas acaben confundiéndose con $x(t)$ es decir

$$y(t) \to x(t)$$

cuando $t \to \infty$, entonces tales soluciones se llaman asintóticamente estables.

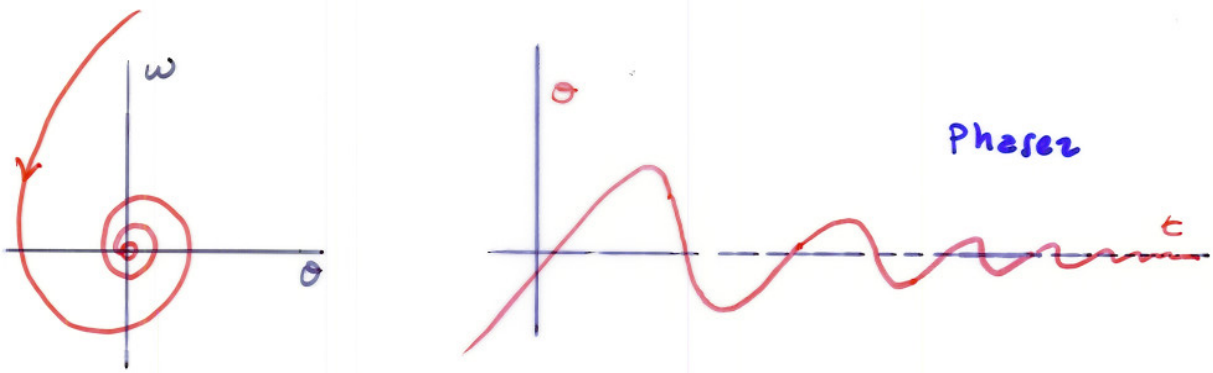
¡Estas son las soluciones observables que dictan el comportamiento asintótico de un sistema!

Ejemplos

① Degradación radiactiva

② Péndulo con fricción

$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -\operatorname{sen}\theta - \varepsilon\omega \end{cases}$$

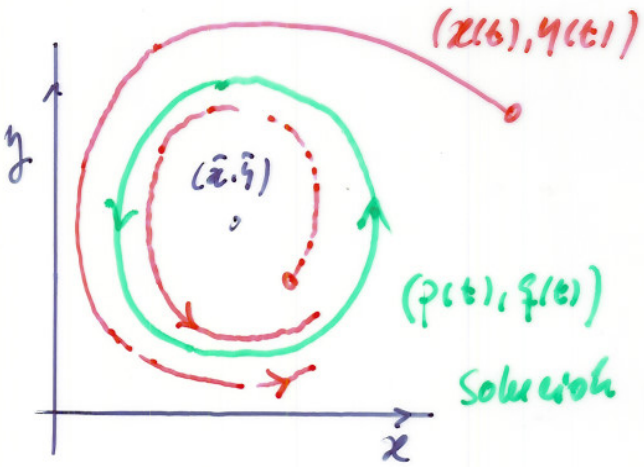


"Patrón de comportamiento Estacionario"

③ Sistema Holling-Turner

$$x' = \alpha x(\gamma - x) - \frac{x}{1+x}\, y$$

$$y' = -y + \beta \frac{x}{1+x}\, y$$



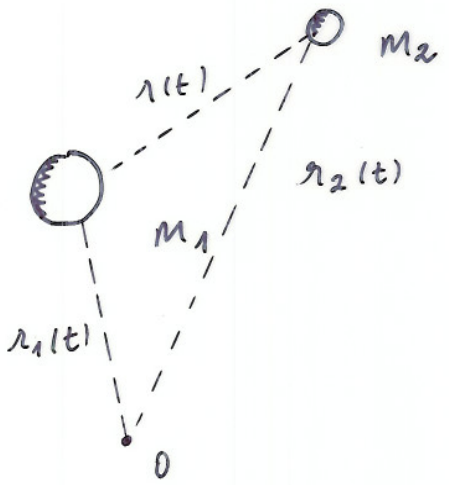
Phasen

$$x(t) \longrightarrow p(t)$$
$$y(t) \longrightarrow q(t) \qquad t \to \infty$$

Solución periódica : ciclo límite

"Patrón de comportamiento oscilatorio"

§2 El problema de los dos cuerpos



$$r_1(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

$$r_2(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$$

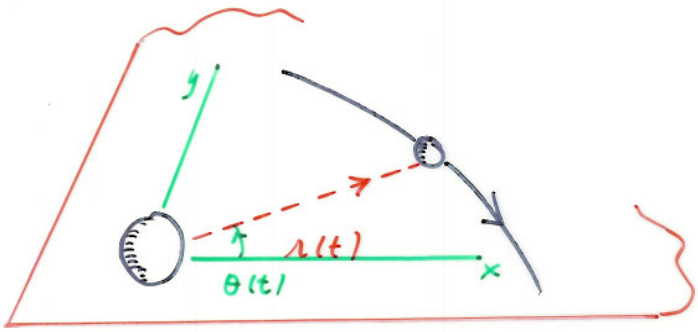
- movimiento relativo:

$$r(t) = r_2(t) - r_1(t)$$

- Ecuaciones de la dinámica: (2ª Ley de Newton)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{r}_1 = G m_1 m_2 \dfrac{1}{|r_2 - r_1|^3} \cdot (r_2 - r_1) \\ m_2 \ddot{r}_2 = G m_1 m_2 \dfrac{1}{|r_1 - r_2|^3} \cdot (r_1 - r_2) \\ r(t_0) = r_0 \quad , \quad \dot{r}(t_0) = v_0 \end{cases}$$

. Ecuaciones del movimiento relativo



$$\mu = G(M_1 + M_2)$$

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\mu \dfrac{r}{|r|^3} \\ r(0) = r_0 \quad , \quad \dot{r}(0) = v_0 \end{cases}$$

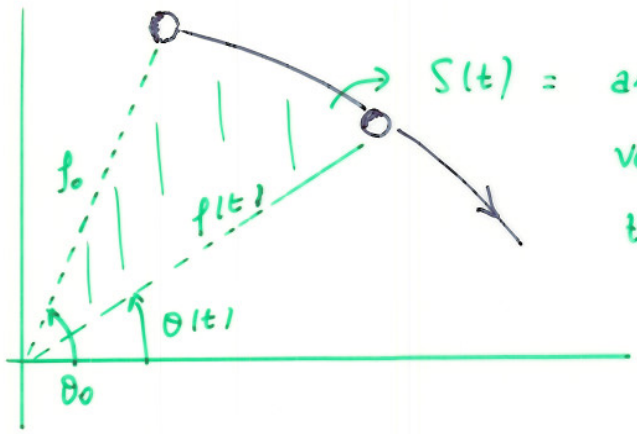
En coordenadas polares :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\mu}{\rho^3} x \\ \ddot{y} = -\dfrac{\mu}{\rho^3} y \end{cases}$$

Obtenemos :

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 = -\dfrac{\mu}{\rho^2} \\ \rho \ddot{\theta} + 2 \dot{\rho} \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$



$S(t)$ = area barrida por el vector de posición desde $t = t_0$.

De la segunda ecuación:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left(\rho^2 \dot{\theta}\right) = \text{constante}$$

pues:

$$\rho^2 \dot{\theta} = \mathcal{J} \quad (\text{constante})$$

De la primera se obtiene:

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{J^2}{\rho(t)^3} - \frac{\mu}{\rho(t)^2}$$

Expresando:

$$\rho = \rho(\theta)$$

y llamando

$$u(\theta) = \frac{1}{\rho(\theta)}$$

se llega (cálculos elementales) a:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{J^2}$$

cuya solución general se puede escribir:

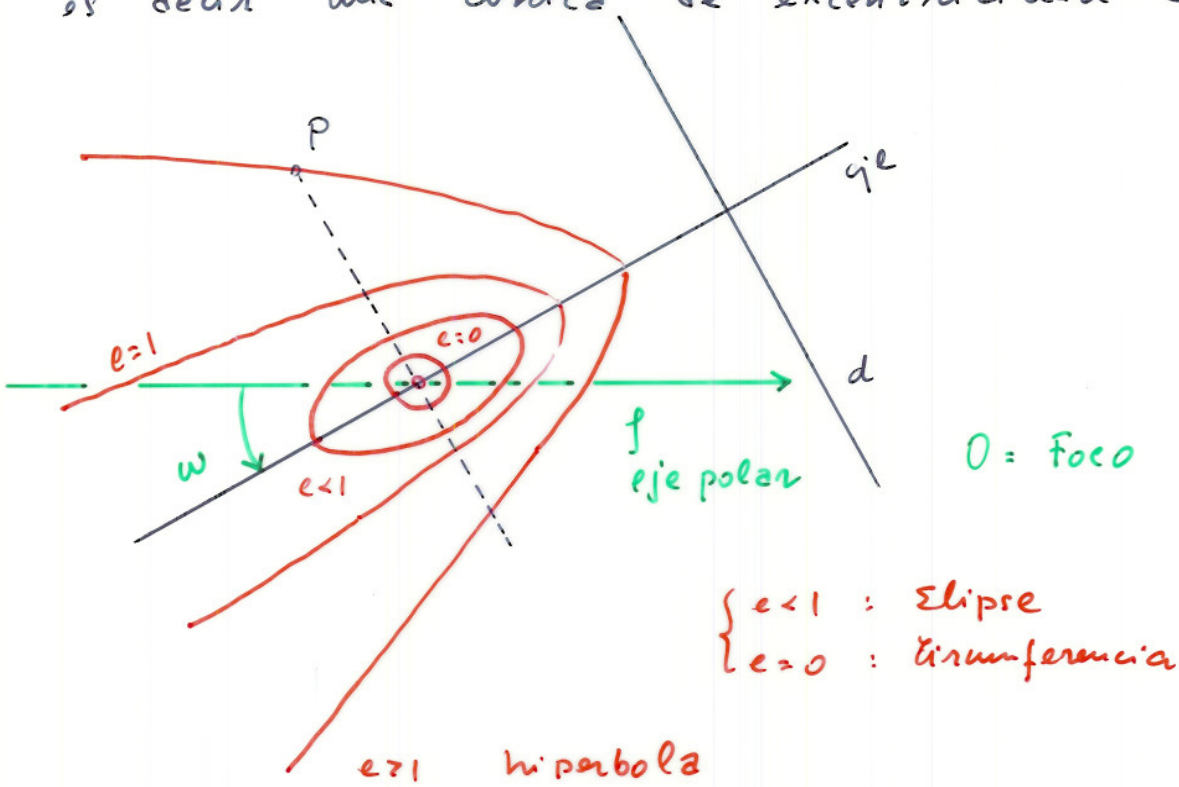
$$\left(\frac{\mu}{J^2}\right) u = C_1 \cos(\theta - \omega) + 1$$

C_1, ω = constantes

y la ecuación de las orbitas en coordenadas polares es:

$$\frac{P}{\rho(\theta)} = e \cos(\theta - \omega) + 1$$

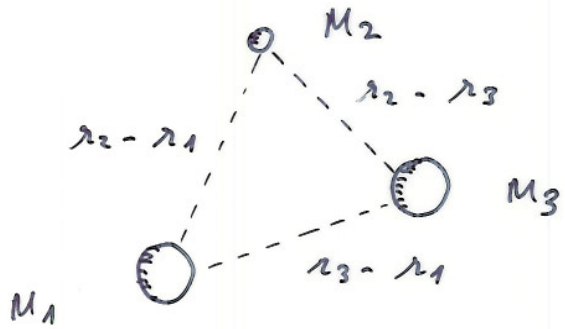
es decir una cónica de excentricidad e.



- El problema de los 3 cuerpos es muchísimo más complicado. Todavía no se conocen todos sus aspectos. Problemas duros

  - Hallar órbitas cerradas
  - Estudiar su estabilidad

H. Poincaré consagró toda su vida al estudio de este problema: sus técnicas forman una parte sustancial de la moderna teoría de ecuaciones.



$$\begin{cases} G^{-1} M_1 \ddot{r}_1 = M_1 M_2 \dfrac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3} + M_1 M_3 \dfrac{r_3 - r_1}{|r_3 - r_1|^3} \\ G^{-1} M_2 \ddot{r}_2 = M_2 M_1 \dfrac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^3} + M_2 M_3 \dfrac{r_3 - r_2}{|r_3 - r_2|^3} \\ G^{-1} M_3 \ddot{r}_3 = M_2 M_1 \dfrac{r_1 - r_3}{|r_1 - r_3|^3} + M_3 M_2 \dfrac{r_2 - r_3}{|r_2 - r_3|^3} \end{cases}$$

#

Galileo Galilei, 1564-1642. One of
first to deal thoroughly with the conc
of acceleration, Galileo founded dyna
ics as a branch of natural philosop
The close interplay of theory and exp
iment, characteristic of this subject,
founded by him.

photo courtesy of D. J. Struik, A Concise Histo
Mathematics, Dover Publications, New York (1

Johannes Kepler, 1571-1630. The
standing and original exponent of
plied dynamics, Kepler made use o
tensive interaction between theory
observation, to understand the plan
motions.

photo courtesy of Kepler, Gesammelte Werke.
München (1960)

§ 3. Breve panorámica histórica

- Newton (1642 - 1727) y Leibnitz (1646 - 1716)
  "Philosophie naturalis principia mathematica" (1686)
  "Methodus fluxionum et serierum infinitarum" (1671 - 1736)

- 1ª Mitad del siglo XVIII
  Problemas de Mecánica (dinámica de partículas), geometría diferencial, cálculo de variaciones, ecuación de la cuerda vibrante.

  Métodos particulares aplicados a tipos particulares de ecuaciones

•• Newton considera:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad \text{(oscilador armónico)}$$

$$\ddot{x} = m - \dot{x}^2$$

Propone soluciones "formales" en forma de series de potencias:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

•• Leibnitz y Jacob, Johan Bernouilli (1654 - 1705) (1667 - 1748) introducen el término "ecuación diferencial", e intentan la "integración por cuadraturas"
- expresando soluciones en términos de las funciones elementales del cálculo. para clases muy particulares de ecuaciones.

Ejemplos:

... $\frac{dx}{dt} = \frac{p(t)}{q(x)}$ (Leibnitz) Variables separadas

$$\int_{x_0}^{x} q(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau$$

... $\frac{dx}{dt} = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ (Leibnitz) Ecuaciones Homogéneas

$$P(mt, mx) = m^k \; P(t,x)$$
$$Q(mt, mx) = m^k \; Q(t,x)$$

Cambio de variable $u = \frac{x}{t}$.

... Ecuación propuesta por Jacob Bernouilli

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x + b(t)\,x^n$$ Ecuación de Bernouilli

Solución propuesta por los hermanos Bernouilli y Leibnitz

... Riccati (1676 - 1656) y Daniel Bernouilli (1700 - 1782)

estudian la integrabilidad de:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x + b(t)\,x^2 + c(t)$$ Ecuación de Riccati

solamente cuando:

$a(t) = 0$, $c(t) = \alpha . t^n$, $n = \frac{4k}{2k \pm 1}$,

donde k es entero ó $n = 2$.

- La segunda mitad del siglo XVIII

La teoría de ecuaciones diferenciales se hace una disciplina independiente, se acometen problemas de balística, mecánica celeste, geometría diferencial, análisis matemático, etc.

Euler 1707-1783, Clairaut 1713-1765, D'Alembert (1717-1783), Lagrange (1736-1813)

Se introducen las ecuaciones en derivadas parciales: ecuación de la cuerda vibrante (dos dimensiones), ecuación de Laplace.

•• Ecuaciones lineales de orden "n" con coeficientes constantes:

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n x(t) = 0$$

(Euler 1743 y Daniel Bernoulli 1751)

Se introduce (Euler 1743):

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$$

para el estudio de:

$$x'' + \beta x = 0.$$

•• Euler estudia:

$$a_0 t^n x^{(n)}(t) + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n x = 0.$$

•• Euler, D'Alembert y Lagrange estudian:

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n x(t) = f(t).$$

Lagrange introduce (1777) la fórmula de variación de las constantes:

$$x' = a(t)\, x + b(t)$$

$$x(t) = x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a(\tau)\, d\tau}\, b(s)\, ds.$$

•• Se introducen las primeras ecuaciones lineales con coeficientes variables:

$$t^2 x'' + t x' + (t^2 - n^2)\, x = 0$$

Ecuación de Bessel de orden n

... Euler : oscilaciones de una membrana circular

... Bessel 1816 : astronomía

$$(1-t^2)\, x''(t) - 2t\, x'(t) + n(n+1)\, x = 0$$

Ecuación de Legendre 1775

... Legendre : atracción gravitatoria

$$t(1-t)\, x'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)t\}\, x' - \alpha\beta\, x = 0$$

Ecuación hipergeométrica

... Euler, Gauss 1812

- Primera mitad del siglo XIX hasta Henry POINCARÉ (1854-1912).

Se empieza a dudar de la posibilidad de obtener expresiones por cuadraturas para todas las ecuaciones diferenciales.

Se a estudiar expresiones analíticas en forma de series de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^n$$

para ecuaciones lineales con coeficientes variables: Legendre, Bessel, Hipergeométrica.

.. Funciones trascendentes superiores:

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{t^2}{2^2 1!\,(n+1)} + \frac{t^4}{2^4\, 2!\,(n+1)(n+2)} - \cdots \right\}$$

Funcion de Bessel de orden n y de 1ª Especie

$$F(\alpha, \beta, \gamma, t) = 1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1 . 2 . \gamma(\gamma+1)} + \cdots$$

Función hipergeométrica de Gauss.

La idea de renunciar a reducir estas funciones a combinaciones algebraicas y cuadraturas de las funciones trascendentes ele-

mentales se refuerza con la introducción de las funciones elípticas:

$$\int_a^t R(t, \sqrt{a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4}\,)\, dt$$

(Abel y Jacobi)

Aparecen, por ejemplo, al calcular la longitud de arco de la elipse:

$$4 \int_0^t \frac{\sqrt{b^2 - e t^2}}{\sqrt{b^2 - t^2}}\, dt \qquad \begin{array}{l} x = a \operatorname{sen} t \\ y = b \cos t \\ e = 1 - \frac{a^2}{b^2} \end{array}$$

Aunque Cauchy (1925) prueba que una clase muy amplia de ecuaciones diferenciales:

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

puede integrarse por desarrollos en serie:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n$$

Liouville (1809-1882) prueba que la ecuación de Riccati no es, en general, integrable por cuadraturas (las lineales de 2º orden con coeficientes variables se reducen a la ecuación de Riccati).

conocemos como *método de la mayorante* se debe a Briot y Bouquet, y apareció en una nota en los CRAS en 1854. Cauchy extendió sus resultados a ecuaciones de orden n, a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en el campo complejo ($x \in \mathbf{C}$); extendiéndolo también al caso de ecuaciones en derivadas parciales lineales de primer orden.

Veamos la opinión general de Poincaré sobre la situación de las ode's durante este período ([P-23][7]): "Desde que los principios del Cálculo Infinitesimal fueron establecidos, el analista afronta los tres problemas:

(1) Resolución de ecuaciones algebraícas.
(2) Integración de diferenciales algebraícas.
(3) Integración de ecuaciones diferenciales.

La historia de los tres problemas es la misma. Después de largos y vanos esfuerzos por reducirlos a problemas más simples, los geómetras al fin se resignan a estudiarlos en sí mismos, y han sido recompensados por el éxito.

Durante mucho tiempo se pensó que todas las ecuaciones se podían resolver por radicales. Se renunció a ello, y hoy las funciones algebraícas nos resultan tan familiares como los radicales a los que las queriamos reducir. Asímismo, las integrales de diferenciales algebraícas, las que durante largo tiempo se investigó como reducir a funciones logarítmicas o trigonométricas, se expresan hoy con la ayuda de nuevas funciones trascendentes.

Más o menos debía ocurrir lo mismo con las ecuaciones diferenciales. El número de ecuaciones integrables por cuadraturas es extremadamente reducido, y mientras no se está decidido a estudiar las propiedades de las integrales por ellas mismas, todo este dominio no ha sido sino una vasta *terra incognita* que parecía prohibida para siempre al geómetra".

En el caso (2) Poincaré hace referncia a la teoría de las funciones elípticas y, más generalmente, a las integrales abelianas, es decir, funciones de la forma:

$$\int_a^x R(\xi, y)\, d\xi,$$

donde $R = R(\xi, y)$ es una función racional de ξ e y, y donde además, ξ e y están relacionados mediante una ecuación algebraíca $f(\xi, y) = 0$.

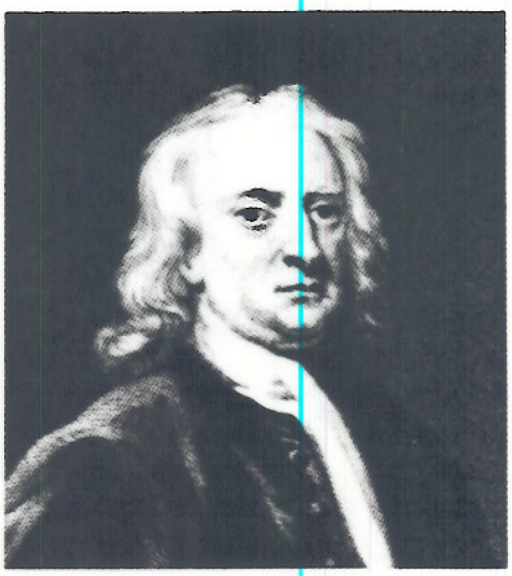
2.1. Tésis Doctoral. El primer trabajo de Poincaré extiende los de Briot y Bouquet en "Mémorie sur les fonctions définies par les équations différentielles", tomo XXXVI del Jour. de l'École Pol., en el que el los resultados de Cauchy para ecuaciones analíticas se estudian en ecuaciones con segundo miembro no holomorfo. En particular, para el problema:

$$\begin{cases} x^k y' = f(x, y) \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

donde $f(x, y)$ es holomorfa cerca de $(0, 0)$, $f_y^o = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$ y $k \in \mathbf{N}$. Para $k = 0$ se obtiene el caso analítico. Briot y Bouquet consideran esencialmente el caso $k = 1$ y prueban que:

(1) Si $f_y^o \notin \mathbf{N}$ (4) admite una solución holomorfa.

[7] Esta panorámica de la obra de Poincaré hecha por él mismo fue escrita en 1901 a petición de Mittag-Leffler.



wton, 1642-1727. Mathemat-
nics, as well as the calculus
it is based, was founded by
t age 23. Applications and ex-
were basic to his ideas, which
ninated by the doctrine of
m. His methods were

y of the Trustees of the British Museum

l Wilhelm Leibniz, 1646-
The concepts of calculus,
tical dynamics, and their impli-
or natural philosophy, occurred
ently to Leibniz. His methods
e symbolic than geometric.

sy of the Trustees of the British Museum

Leonhard Euler, 1707-1783. Prima
known for his voluminous contributi
to algebra, Euler developed the te
niques of analysis which were to d
inate mathematical dynamics throug
its classical period.

photo courtesy of E. T. Bell, Men of Mathematics, Sim
Schuster, New York (1937)

Joseph-Louis Lagrange, 1736-1
A disciple of Euler, Lagrange develo
the analytical method to extremes,
boasted that his definitive text on
subject contained not a single illu
tion.

photo courtesy of the Bibliotèque Nationale, Paris

Jules Henri Poincaré, 1854-1912. Known for his contri tions to many branches of p mathematics, Poincaré devoted the r jority of his efforts to mathemat dynamics. Among the first to acc the fact that the classical analyt methods of Euler and Lagrange serious limitations, he revived geome cal methods. The results were revo tionary for dynamics, and gave birth topology and global analysis as w These branches of pure mathematics very active yet.

photo courtesy of the Library of Congress, Wash D.C.. U.S.A.

Aleksandr Mikhailovich Liapoun 1857-1918. Another pioneer geometric methods in mathemati dynamics, Liapounov contributed ba ideas of stability.

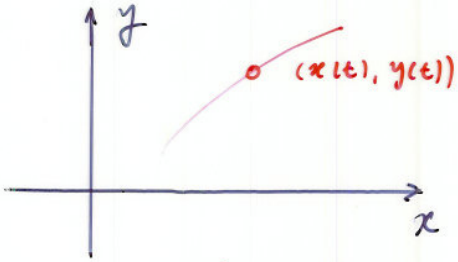
photo courtesy of Akademija Nauk, SSSR (1954)

4: Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales

4.1. El plano

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales se observan como curvas del plano, en lugar de funciones de la variable t. Tales curvas se llaman órbitas de la ecuación:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$



Orbita $\gamma = \{(x,y) \,/\, x = x(t),\ y = y(t)\}$. Tal órbita representa la solución sin la presencia explícita de la variable t (que es una simplificación).

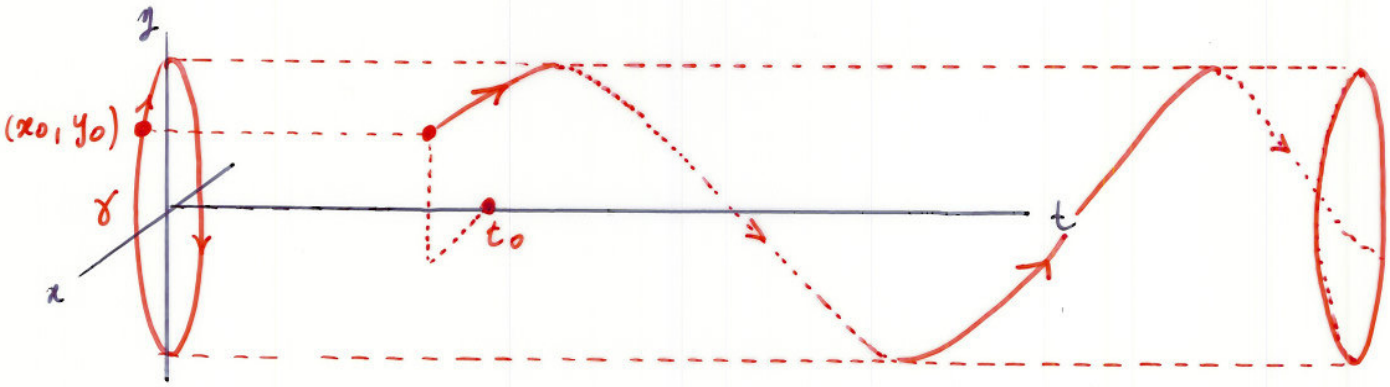
Ejemplo: El oscilador armónico

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

- La solución que pasa por el punto (x_0, y_0) en el instante t_0 es:

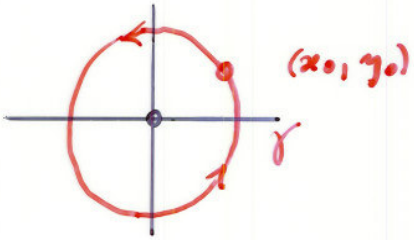
$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(t-t_0) + y_0 \operatorname{sen}(t-t_0) \\ y(t) = -x_0 \operatorname{sen}(t-t_0) + y_0 \cos(t-t_0) \end{cases}$$

que es una función de t cuya gráfica haciendo intervenir las variables x, y, t resulta ser:



- La órbita de dicha solución es la curva (circunferencia)

$$x^2 + y^2 = r_0^2$$



El objetivo de la teoría cualitativa es dar respuesta al problema del comportamiento asintótico (estabilidad, observabilidad) de las soluciones permanentes.

Para ello se procede de acuerdo al siguiente plan:

i) Estudiar las órbitas de las soluciones en vez de las soluciones en sí.

ii) Observar las órbitas, no individualmente, sino como un colectivo donde cada "elemento" es una órbita. El conjunto de órbitas de una ecuación se llama su "espacio de fases".

iii) Analizar la influencia que ejercen unas pocas órbitas singulares - e.d. "puntos" especiales de ese espacio - sobre las restantes órbitas del espacio de fases.

- órbitas singulares: soluciones constantes, soluciones periódicas, soluciones de conexión.

- Influencia: conocer si asintóticamente tales órbitas singulares atraen ó repelen a las restantes soluciones permanentes, e.d. si son asintóticamente estables ó inestables.

Este ambicioso plan fue diseñado y ejecutado por H. Poincaré (1854-1912) en 4 artículos publicados entre 1881-1885; sigue de rabiosa actualidad.

- Orbitas Singulares.

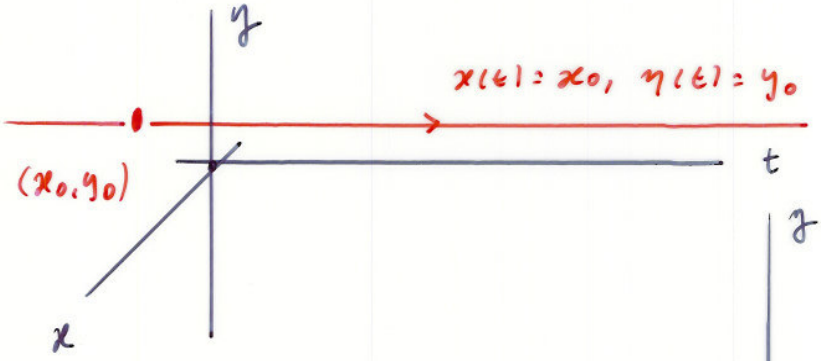
a) El primer tipo son los puntos singulares. Si:

$$x(t) = x_0 = \text{constante}$$
$$y(t) = y_0 = \text{constante}$$

es una solución constante de la ecuación:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

su órbita es un punto $P = (x_0, y_0)$.



$\gamma = P = (x_0, y_0)$

orbita de tipo punto singular

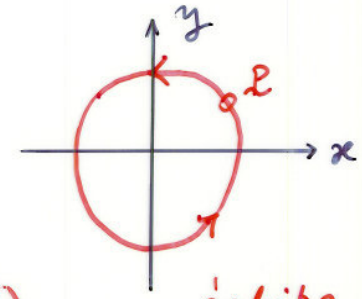
b) El segundo tipo son las <u>órbitas cerradas ó ciclos</u>; son las órbitas de las soluciones periódicas

$$x(t+T) = x(t)$$
$$y(t+T) = y(t)$$

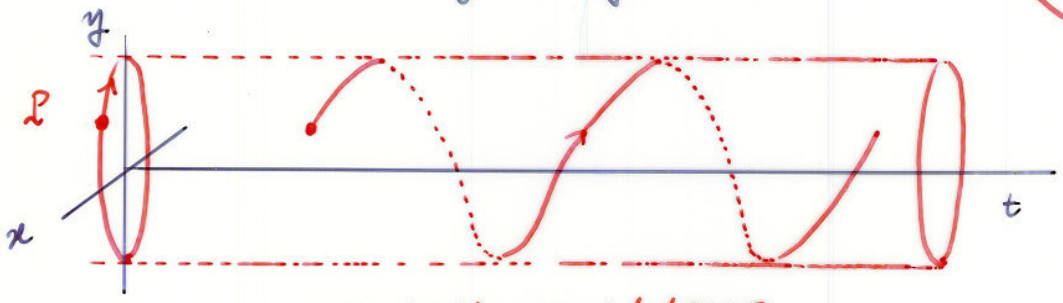
T = periodo

de la ecuación:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$



órbita cerrada



$x(t), y(t)$ periódicas

c) El tercer tipo son las órbitas de conexión. Son las órbitas de soluciones de la ecuación:

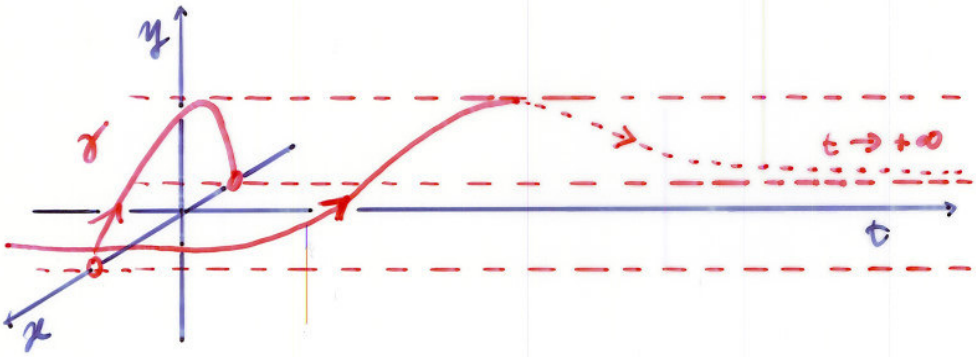
$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

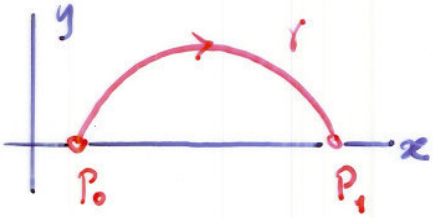
que satisfacen

$$(x(t), y(t)) \longrightarrow (x_0, y_0) \qquad (t \to -\infty)$$
$$(x(t), y(t)) \longrightarrow (x_1, y_1) \qquad (t \to +\infty)$$

donde (x_0, y_0), (x_1, y_1) son puntos singulares. Tales órbitas γ se dice que conectan los puntos singulares $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$.

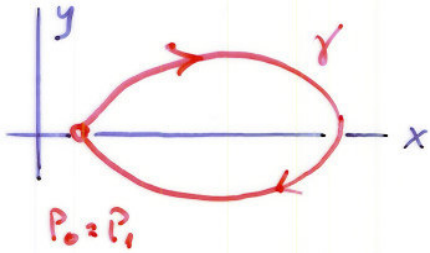
Si $P_0 \neq P_1$ las orbitas γ se llaman heteroclínicas:



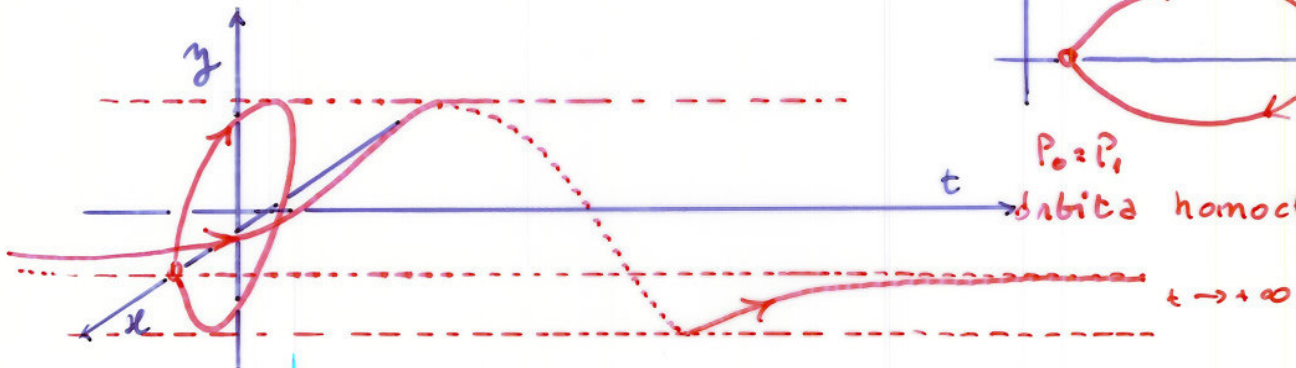


órbita heteroclínica

Si $P_0 = P_1$ las órbitas γ se llaman homoclínicas



órbita homoclínica



- Comportamiento e influencia de los puntos singulares

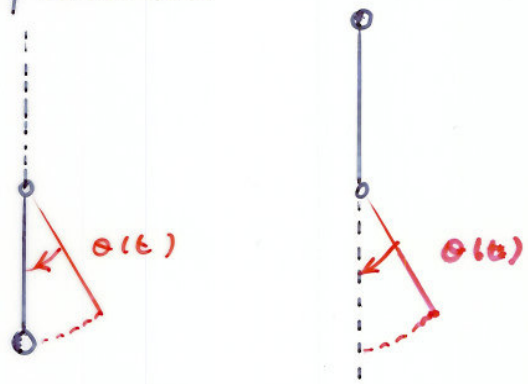
Los puntos singulares al representar soluciones constantes definen las posiciones de equilibrio del sistema:

$$x(t) = x_0 = \text{constante}$$
$$y(t) = y_0 = \text{constante}$$

$$x' = f(x, y)$$
$$y' = g(x, y)$$

Ejemplo: Pendulo con fricción

$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -\operatorname{sen}\theta - \varepsilon\omega \end{cases}$$



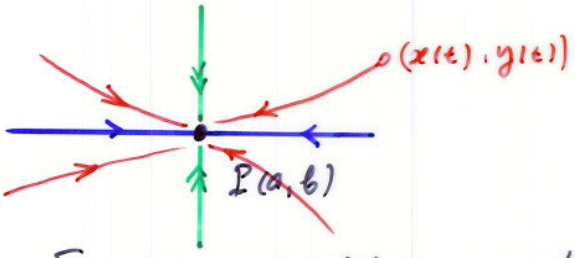
$\begin{cases} \theta = n\pi \\ \omega = 0 \end{cases}$ n impar

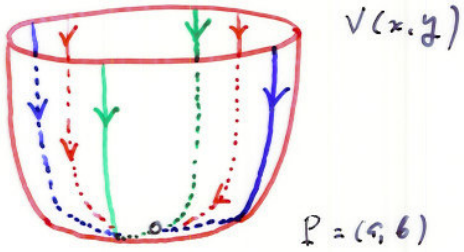
$\begin{cases} \theta = n\pi \\ \omega = 0 \end{cases}$ n par

Los puntos singulares se clasifican de acuerdo a la influencia atractiva ó repulsiva que ejercen sobre las restantes órbitas.

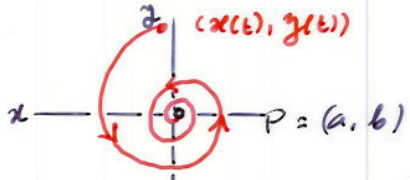
Los puntos singulares atractivos ó estables son, por su manera de atraer a las restantes orbitas, de los tipos siguientes:

1) Nodos estables: atracción siguiendo dos direcciones.



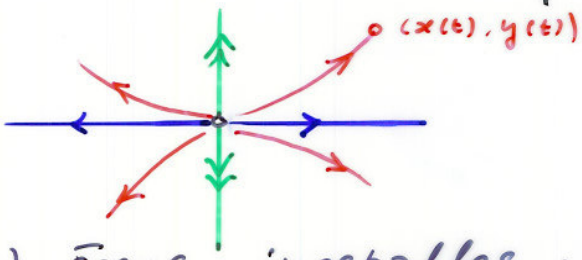


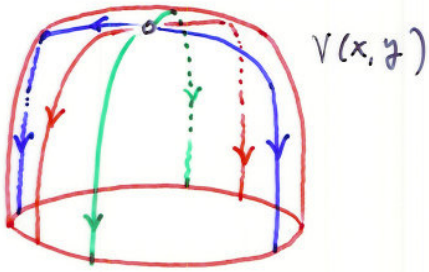
2) Focos estables: atracción siguiendo una espiral.



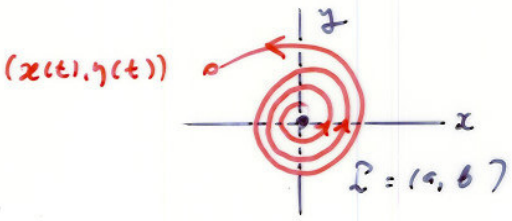
Los puntos singulares repulsores ó inestables, alejan de sí a la mayoría de las órbitas cercanas. Son de los tipos siguientes

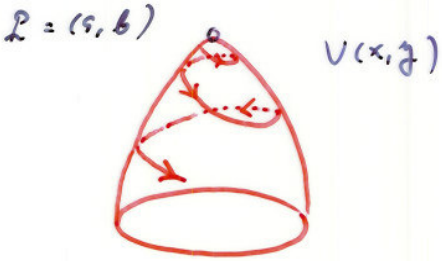
1) Nodos inestables: repulsión siguiendo dos direcciones.



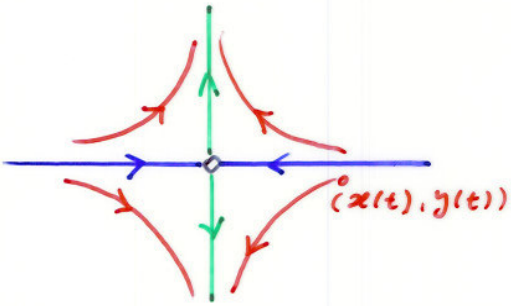


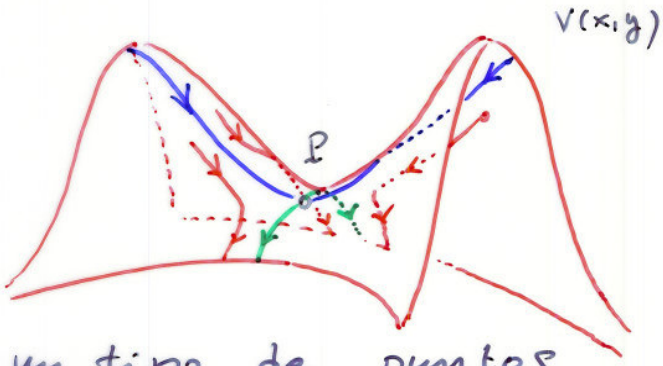
2) Focos inestables: repulsión siguiendo una espiral



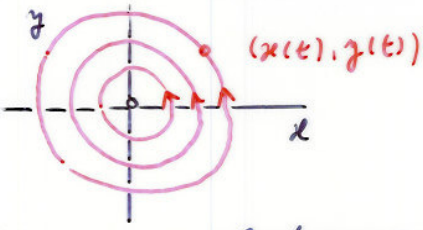


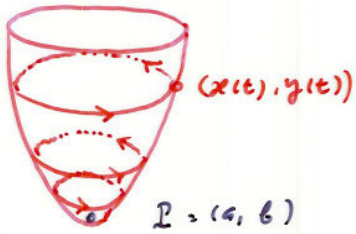
3) Puntos de Silla : repulsión parcial siguiendo una dirección.





Finalmente existe un tipo de puntos que no atraen ni repelen a las órbitas cercanas que son los puntos de tipo centro :





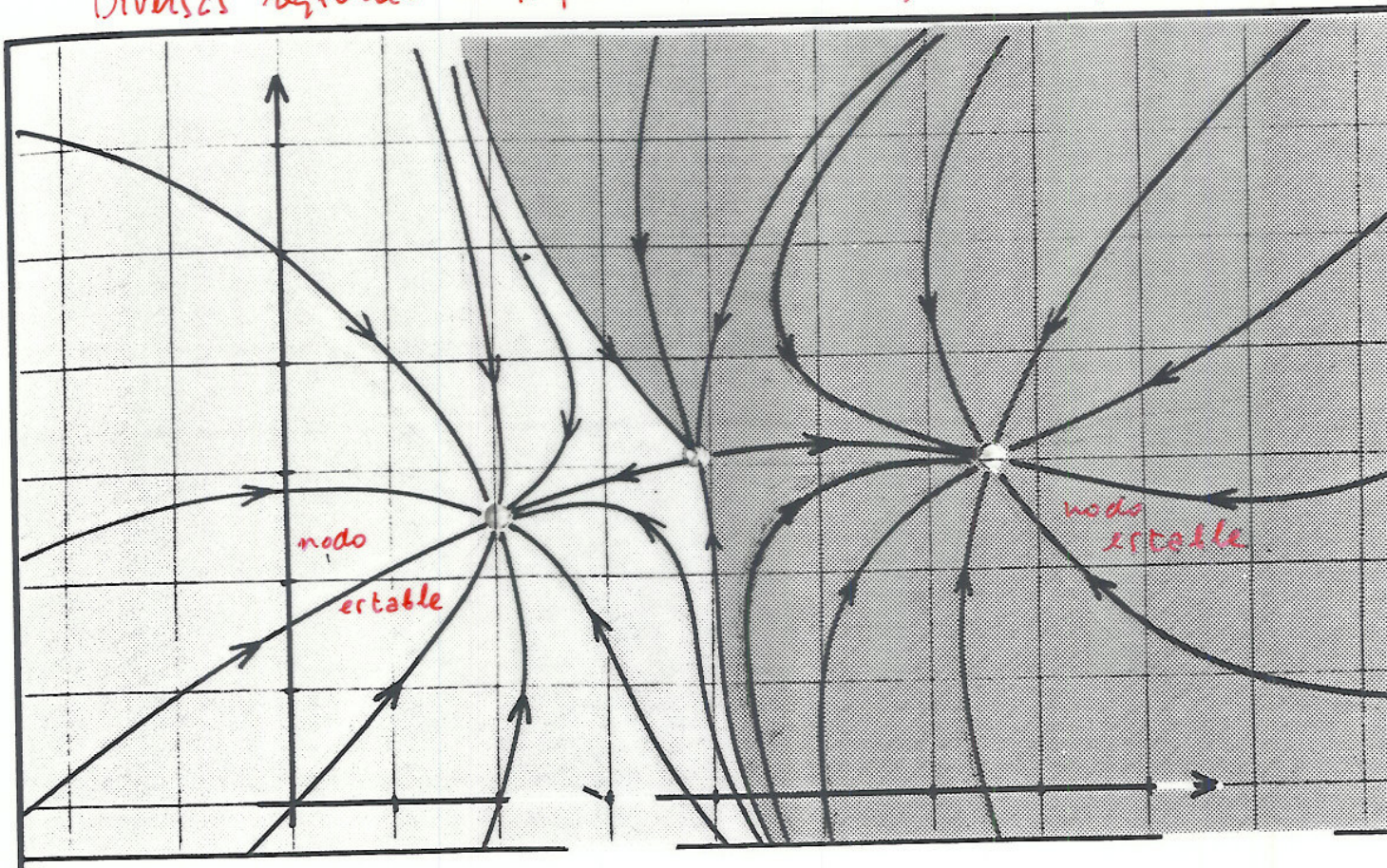
Estan completamente rodeados por infinitas órbitas cerradas.

Podemos así decidir el comportamiento asintótico ó "final" de un sistema de la forma siguiente. Dividimos el espacio de fases de :

$$\begin{cases} x' = f(x,y) & x(0) = a \\ y' = g(x,y) & y(0) = b \end{cases}$$

en las zonas de influencia de los puntos singulares. Si el sistema empieza con una condición inicial (a,b) en una zona inestable - domi

"Diversas regiones de influencia en es espacio de fases"



1.5.9. Here, also, there are two attractors: both points. A third limit set, also a point, is not an attractor. It is a vague limit set. The inset of this limit set comprises the separatrix.

This reveals the pattern of the general case: the separatrix consists of all points not in a basi Every point tends to a limit set. If its limit set is an attractor, it belongs to a basin. So, if it belon to the separatrix (and therefore not to a basin), it must tend to a non-attractor. Thus: *the separatr consists of insets of exceptional limit sets.*

The preceding examples are artificial, made up to illustrate the concepts. But, we are overdue f some more meaningful examples. So, at this point, let's turn to gradient systems — a rich sour of simple examples, based on a geometrical construction.

nada por un punto singular inestable - abandonará dicha región para llegar a la zona de influencia de un punto singular estable.

Así pues la ecuación exhibirá un modelo de comportamiento estacionario cuando sigamos soluciones:

$$(x(t),\ y(t))$$

con datos iniciales $x(0) = a$, $y(0) = b$ en la región de atracción de un punto singular

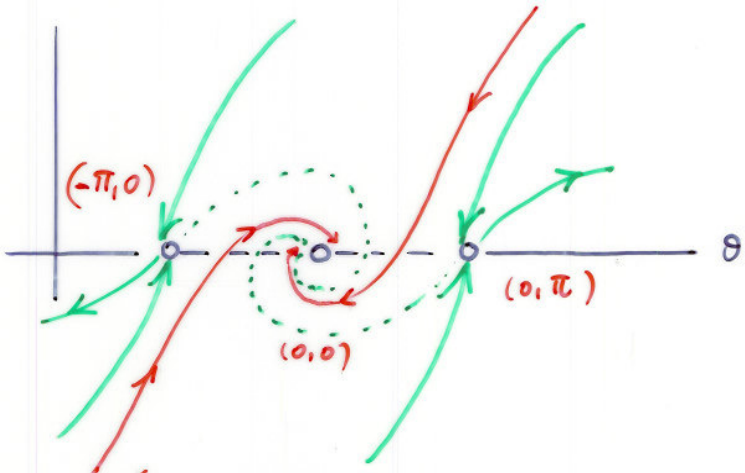
$$P_0 = (x_0, y_0)$$

de tipo estable:

$$\begin{aligned} x(t) &\longrightarrow x_0 \\ y(t) &\longrightarrow y_0 \end{aligned} \qquad t \to +\infty.$$

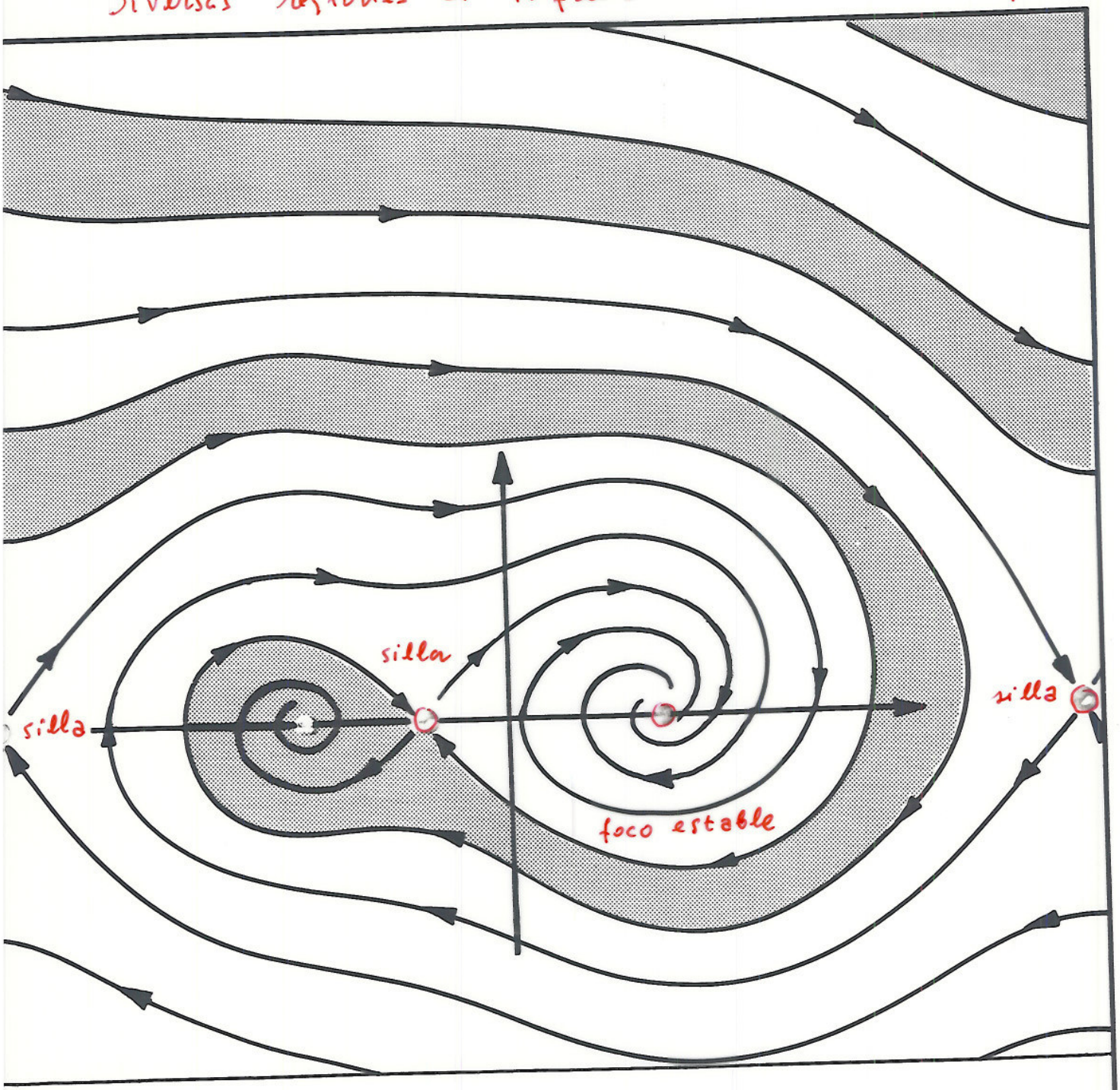
<u>Ejemplo</u>: El péndulo con fricción:

$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -\operatorname{sen}\theta - \varepsilon\omega \end{cases}$$



Región de atracción del punto singular $(0,0)$: equilibrio asintóticamente estable.

"Diversas regiones de influencia en el espacio de fases"



2.1.22. Here is the phase portrait of the magnetic pendulum, unrolled. The basin of the rest point near the smaller magnet, shaded, is smaller. Thus, the probability of an initial state (angular position plus angular velocity) evolving asymptotically to the rest point adjacent to the smaller magnet is less than 50%.

Note. In this particular case, the shaded basin extends upward only. Thus, if the bob is swinging rapidly counterclockwise, it cannot come to rest at the smaller magnet.

This is not solely an armchair experiment. It has actually been studied[1].

This is the most classical application. Although pendulum theory may not turn everyone on, it has certainly been fundamental to the growth of dynamics. The writings of Lord Rayleigh are held together with this one thread, and he saw pendula everywhere. The spirit of his work lives on in many

Los puntos singulares estables describen "parte" de los posibles comportamientos asintóticos de las soluciones de una ecuación plana:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}.$$

Sin embargo hay otros comportamientos asintóticos estables que no son estacionarios. Estos son los comportamientos asintóticos de tipo periódico ó de tipo oscilación libre (ciclo límite).

- Comportamiento e influencia de las órbitas cerradas.

Los puntos singulares (x_0, y_0) de

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

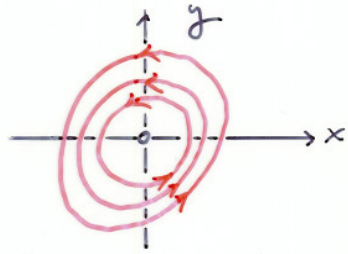
se hallan resolviendo el sistema:

$$f(x,y) = 0$$

$$g(x,y) = 0 .$$

¿Cómo se halla una órbita cerrada? Es un problema difícil. En el oscilador armónico:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y \end{cases} \quad ó \quad x'' + x = 0$$



ni la ecuación ni - como los estudiarían los clásicos - ni los desarrollos en serie de las soluciones:

$$x(t) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

ponen de manifiesto la existencia de soluciones periódicas ¿Cuál es el período?

Hallar las soluciones periódicas - órbitas cerradas - era un problema clásico muy difícil de resolver. Al menos probar su existencia. La ecuación "no ayuda" a resolverlo:

$$x' = f(x, y)$$
$$y' = g(x, y)$$

A tales soluciones periódicas se las llama también "oscilaciones libres."

Poincaré (~1882) demostró que lo único que hace falta, para hallar una solución periódica - órbita cerrada - es "simplemente" resolver una ecuación "numérica" del tipo

$$h(z) = 0 \quad , \quad z \in \mathbb{R}.$$

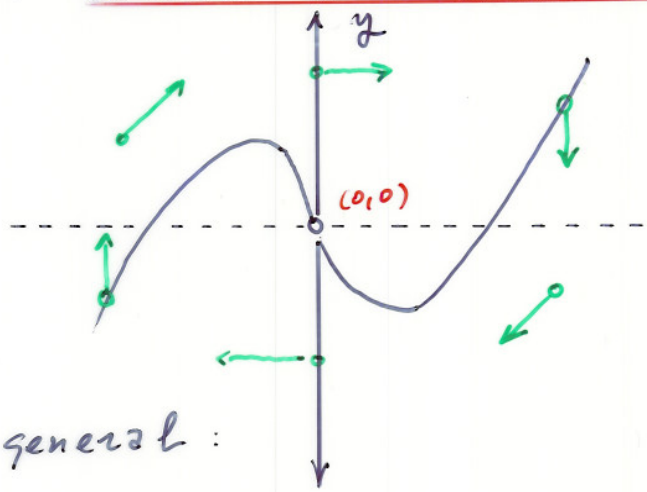
El método lleva su nombre: método de la aplicación de Poincaré.

Idea del método:

- Por análisis de la ecuación estudiar en qué región puede haber "rotación" que es el primer indicio de existencia de órbitas cerradas. "Deben circunvalar al menos un punto singular".

Ejemplo (fundamental): El oscilador de Van der Pol

$$\begin{cases} x' = y - x^3 + x \\ y' = -x \end{cases}$$



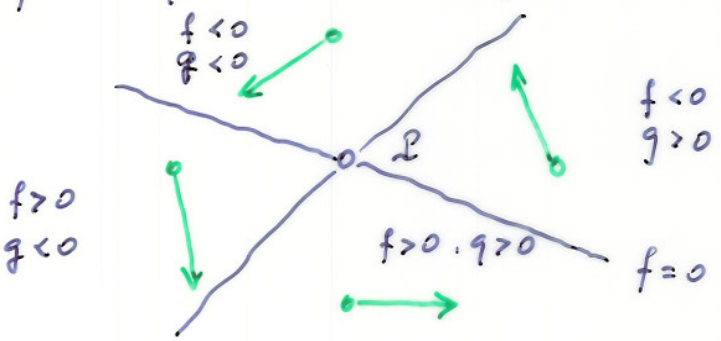
Para una ecuación general:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

se trazan las curvas

$f(x,y) = 0$ $\qquad$ $g(x,y) = 0$

y después el campo de direcciones

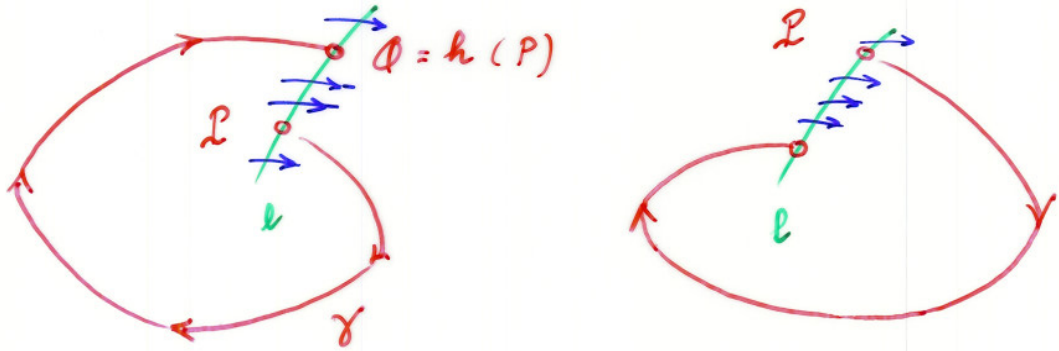


$P = (a, b)$

- Tomando un segmento ó arco ℓ que sea transversal al campo de la ecuación, definir la aplicación de Poincaré o de retorno:

$$P \qquad\qquad h(P) = Q$$

"La imagen Q de P es el "siguiente impacto" en ℓ de la órbita γ que pasa por P



"Dando coordenadas a la aplicación de poincaré se puede hacer "numérica".

Si z = coordenada de P y si

$\tilde{z}$ = coordenada de Q

escribiremos:

$$\tilde{z} = h(z)$$

Entrar una órbita cerrada es equivalente al siguiente pro-

blema: hallar P_0 tal que $h(P_0) = P_0$

" Por el punto $P_0 \in \ell$ pasa una órbita cerrada si y sólo si:

$$h(P_0) = P_0 \text{ "}$$

En coordenadas el problema se formula como: hallar z_0 tal que

$$h(z_0) = z_0,$$

es decir, resolver la ecuación numérica

$$h(z_0) - z_0 = 0.$$

Además un <u>algoritmo numérico</u> para hallar z_0 es:

- Construir la sucesión de valores

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$$

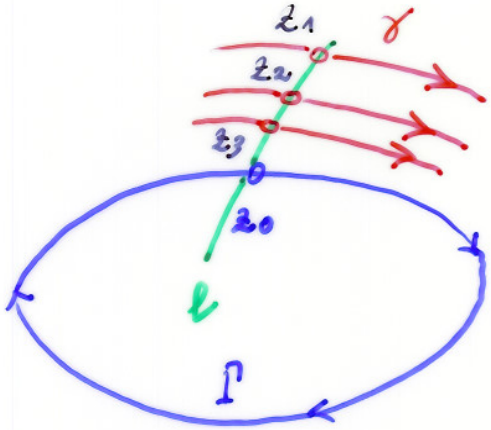
con la ley recursiva

$$z_1 = \text{dato}$$
$$z_2 = h(z_1)$$
$$z_3 = h(z_2) = h^2(z_1)$$
$$\vdots$$
$$z_n = h(z_{n-1}) = \cdots = h^{n-1}(z_1)$$
$$\vdots$$

- Después tomar límites:

$$z_0 = \lim_{n \to \infty} z_n$$

Geométricamente:



Γ ciclo límite

Como se ve en la figura el método también da información sobre la atractividad de la órbita cerrada Γ.

<u>Teorema (Poincaré - Bendixon)</u>

Si una solución $(x(t), y(t))$ permanece en una región(*) sin puntos singulares del plano $R \subset \mathbb{R}^2$, si ella misma no es periódica, entonces tiende a una solución periódica $(p(t), q(t))$ cuando $t \to \infty$ es decir:

(*) limitada ó acotada

$$\lim_{t\to\infty} x(t+\tau) - p(t) = 0$$

$$\lim_{t\to} y(t+\tau) - q(t) = 0 \qquad \#$$

Conclusión:

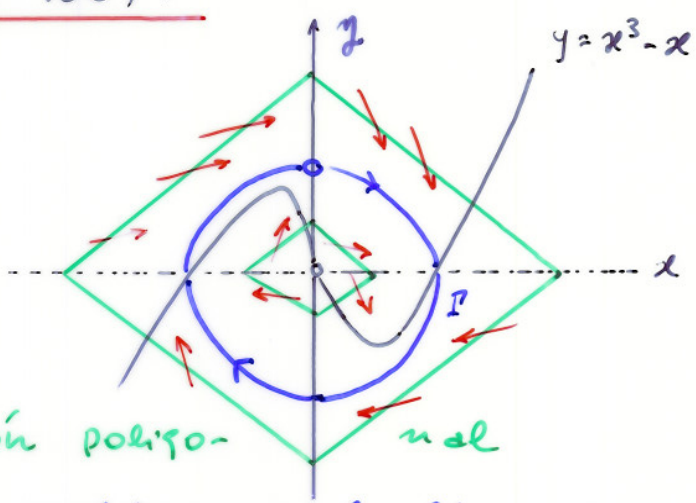
En el plano los comportamientos asintóticos o "finales" (a largo plazo) de las soluciones de ecuaciones acotadas (de orden de magnitud finita) son típicamente:

- $(x(t), y(t)) \longrightarrow (x_0, y_0)$: punto singular
- $x(t+\tau) - p(t) \longrightarrow 0$, $y(t+\tau) - q(t) \longrightarrow 0$ $\quad (p(t), q(t))$: solución periódica

Es decir los sistemas planos - así el de los modelos biológicos o físicos que describen - exhiben a largo plazo comportamiento estacionario ó comportamiento periódico.

Ejemplo (Van der Pol):

$$\begin{cases} x' = y - x^3 + x \\ y' = -x \end{cases}$$



R: interior de la región poligonal

Γ: $(p(t), q(t))$ solución periódica - ciclo límite del oscilador de Van der Pol

4.2. Ecuaciones en el espacio

En el espacio se pueden introducir todas las definiciones del caso plano: puntos singulares, órbitas cerradas, orbitas de conexión.

$$\begin{cases} x' = f(x, y, z) \\ y' = g(x, y, z) \\ z' = h(x, y, z) \end{cases}$$

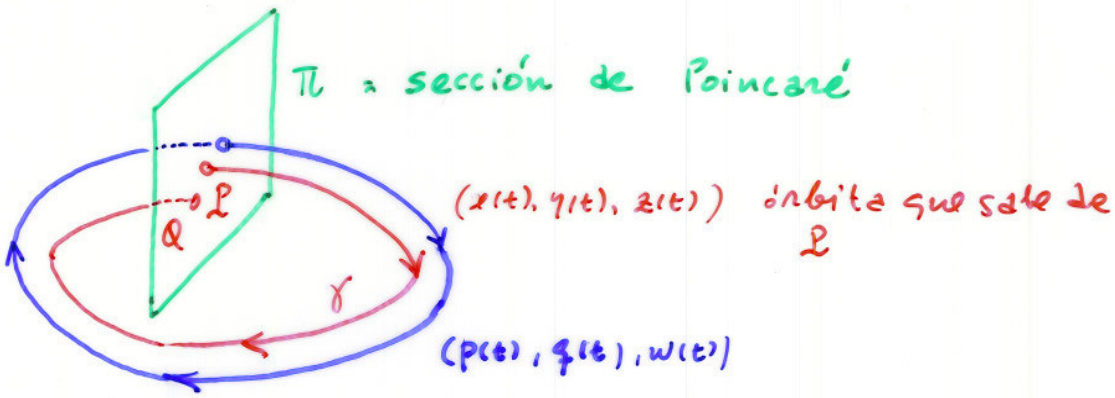
- Los puntos singulares (x_0, y_0, z_0) son órbitas de las soluciones constantes:

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$
$$g(x_0, y_0, z_0) = 0$$
$$h(x_0, y_0, z_0) = 0 .$$

Se conoce la manera de estudiar sus propiedades de atracción y repulsión, y se clasifican según sus propiedades de estabilidad.

- Las órbitas cerradas, correspondientes a soluciones periódicas $(p(t), q(t), w(t))$ de la ecuación, pueden construirse usando otra vez la aplicación de Poincaré,

ahora en el espacio:



De nuevo, y como mostró Poincaré en sus trabajos de 1881-85 hallar soluciones periódicas, e.d., orbitas cerradas, es equivalente a encontrar puntos P_0 en el plano π que cumplan:

$$P_0 = h(P_0),$$

o, en coordenadas, resolver las ecuaciones numéricas:

$$h_1(z_1, z_2) - z_1 = 0$$
$$h_2(z_1, z_2) - z_2 = 0.$$

Sin embargo:

i) Los comportamientos de atractividad de las orbitas cerradas, en algunos casos son muy complicados de describir.

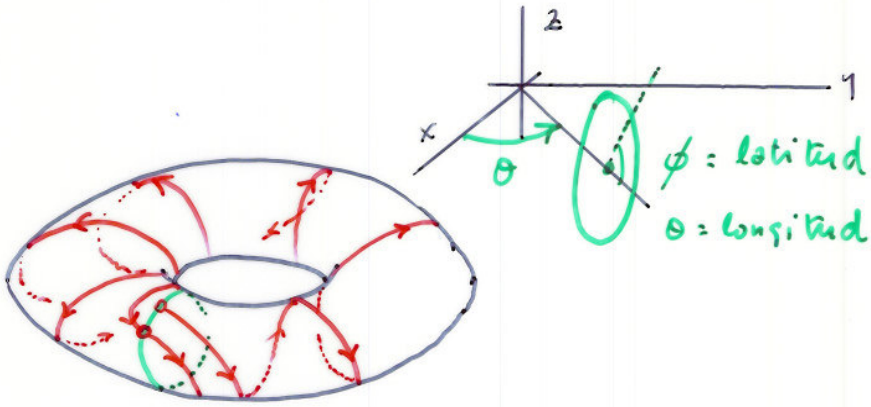
ii) No se cumple el teorema de Poincaré-Bendixon: hay órbitas acotadas -e.d. de orden de magnitud finita-

que permanecen en regiones R sin puntos críticos y que sin embargo : ni son periódicas ni convergen a soluciones periódicas.

Ejemplo : Órbitas recurrentes en el toro

$$\begin{cases} \theta' = 1 \\ \phi' = \kappa \end{cases}$$

$\kappa \in \mathbb{R}$



En esta ecuación γ es finita pero nunca se cierra, más aún acaba llenando el toro.

Conclusión :

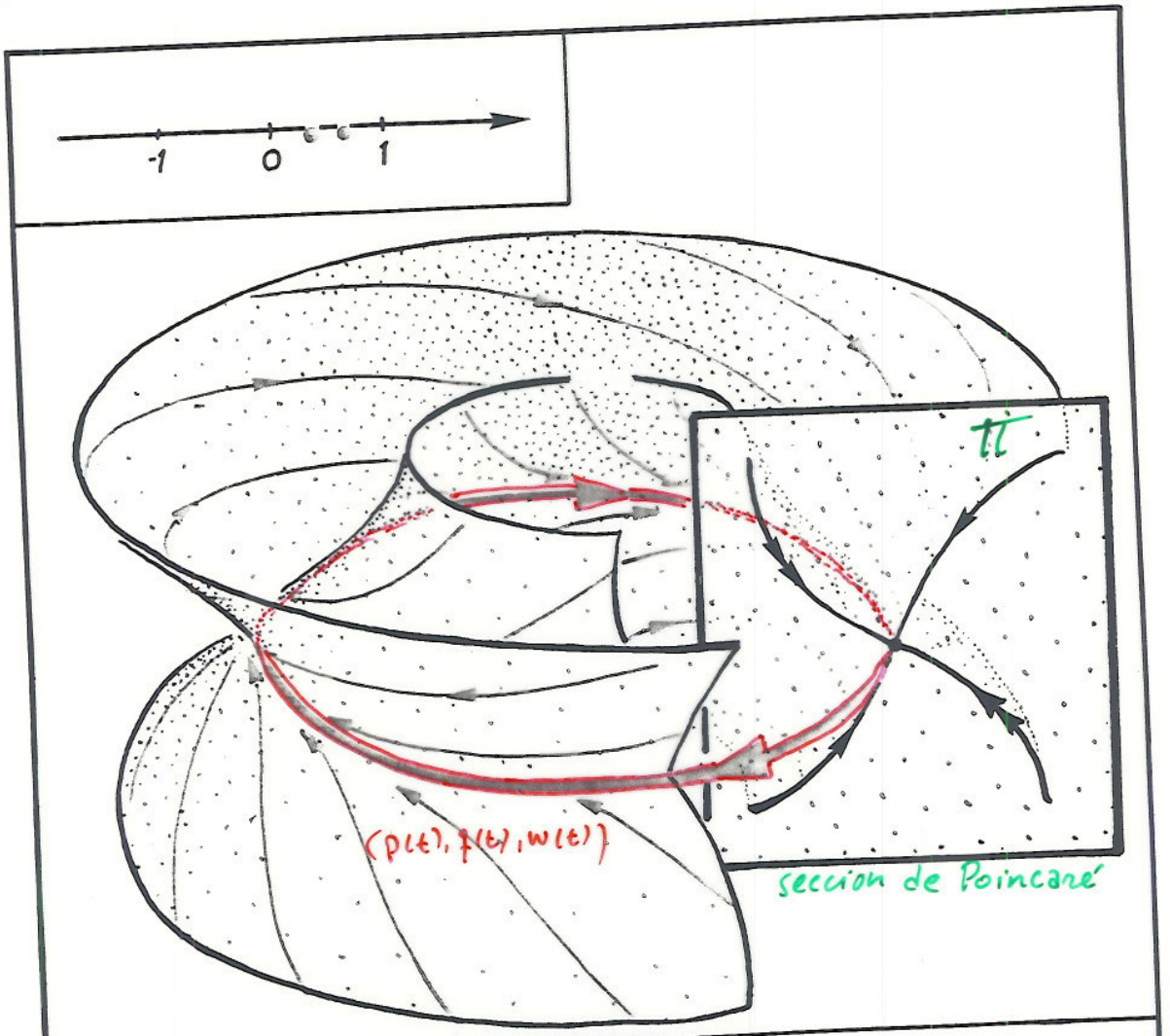
En tres dimensiones ya no es verdad que los patrones de comportamiento asintóticos – es decir a largo plazo – sean, genéricamente puntos singulares (comportamiento estacionario) ó bien comportamientos oscilatorios. Pueden darse en las soluciones acotadas comportamientos asintóticos mucho más complicados.

Ejemplo : Ecuaciones de Lorenz.

Son del aspecto más inofensivo que uno se puede imaginar:

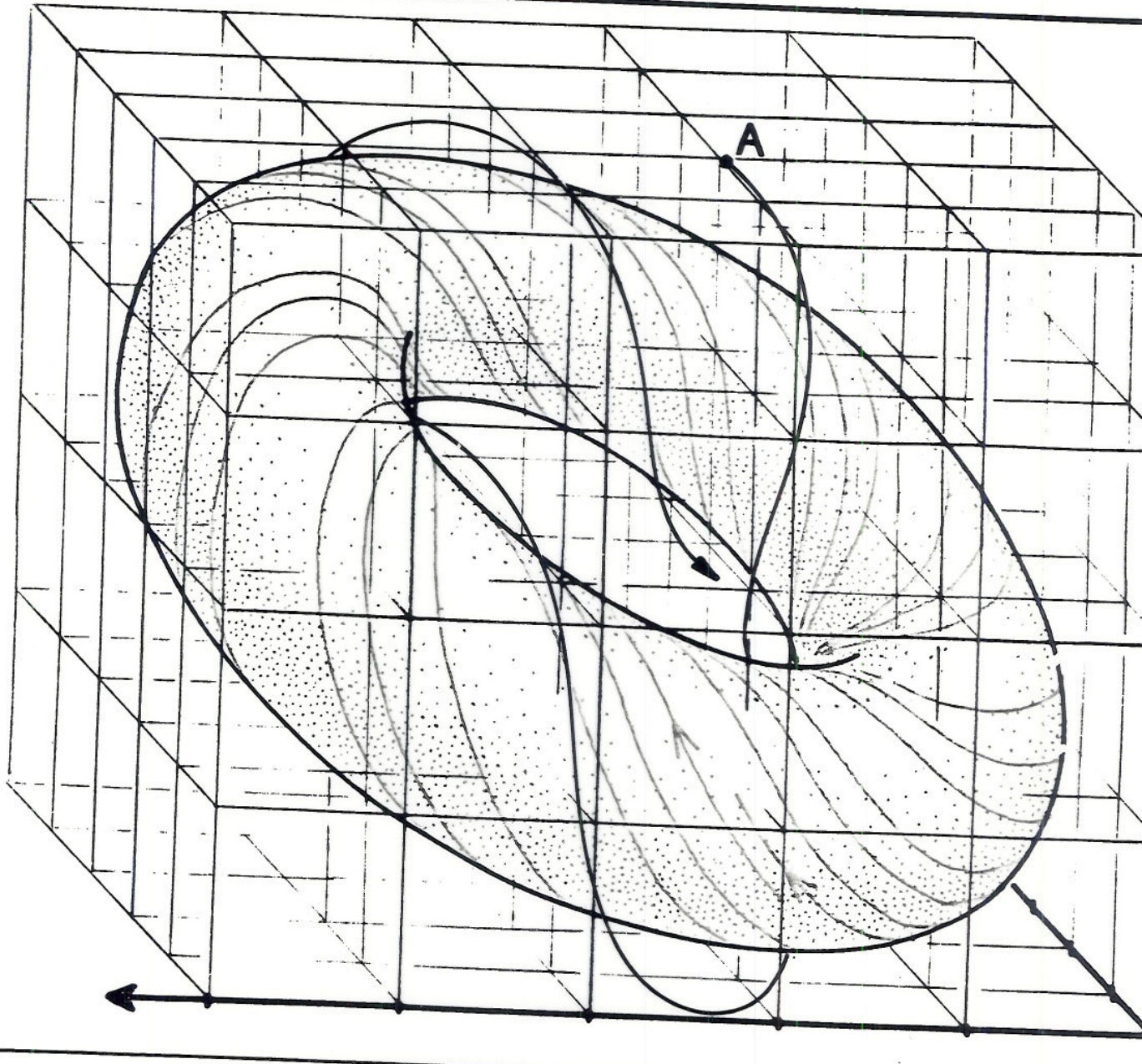
2.4. NODAL CYCLES IN THREE DIMENSIONS

Here we consider variations on the saddle cycle of the preceding section. If the CMs are real and both small (between -1 and 1) we have an attracting or repelling cycle which looks rather like a saddle. These are called *nodal cycles.*



2.4.1. These two small, real CMs correspond to two invariant surfaces, as in the saddle cycle. But the limit cycle acts as an attractor within each. One, with the smaller CM, attracts more strongly than the other. They are *sub-insets,* called the *fast-inset* and the *slow-inset* respectively.

points and limit cycles also occur in phase portraits of higher dimensions. Further, in dimensions greater than two, other limit sets may turn up. For example, a torus can occur as a set, in a three-dimensional system. The solenoid, described in the preceding section, is a in point.



1.4.11. Here, the trajectory through the point marked A is wound, like a loose solenoid, around the torus. As time goes on, it winds around tighter and tighter. It approaches its limit set, the torus, asymptotically.

There are many more limit sets. Some of the more exotic ones will be shown in Volume 2. But, we have not yet made our case for the importance of the geometric theory of dynamical systems. To explain what we mean by prediction forever, a further concept is needed: that of an attractor. This

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - z) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$ (E.N. Lorenz 1963)

σ, r, b constantes positivas

Tiene 3 puntos singulares si $r > 1$:

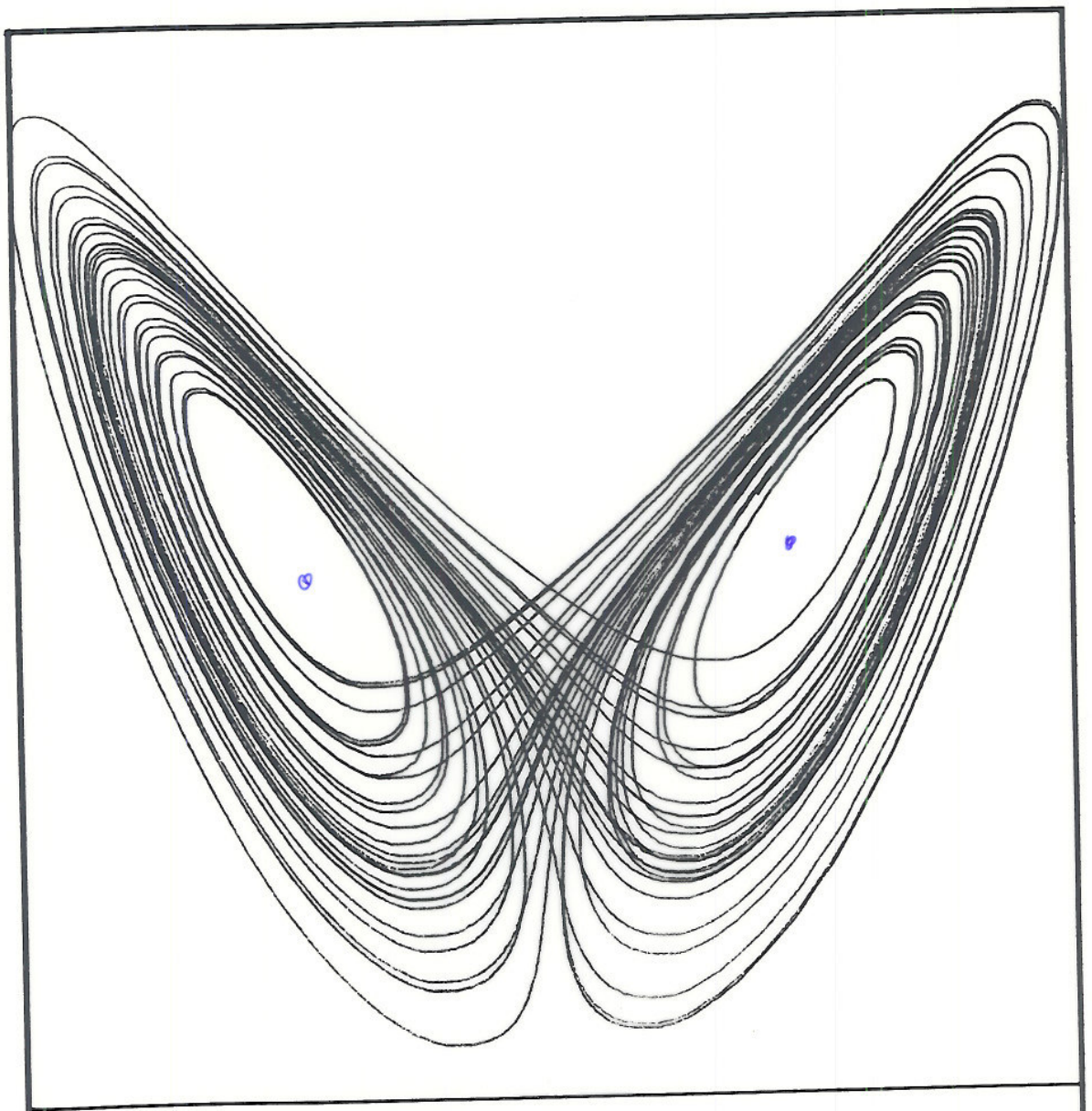
$O = (0,0,0)$, $P_{\pm} = \left(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1\right)$

Cuando:

$$r > \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

los 3 puntos se vuelven inestables y todas las soluciones de la ecuación describen una sucesión infinita de transisiones siguiendo un comportamiento aleatorio que todavia no se ha consequido determinar.

A largo plazo todas las soluciones son fuertemente sensitivas con respecto a los datos iniciales. Este tipo de comportamiento, que repito, no se conoce con precisión, se denomina caótico.



4.2.5. And here, for comparison, is a computer drawing by Rob Shaw of the Lorenz attractor. Inspection of the equations reveals the three distinguished saddle points, right where we want them. But the planar inset of the saddle point in the lower center is qualitatively invisible. It is a kind of separatrix. Now we will add it to the picture, with its full extension.

§ 5. Breve introducción a los métodos numéricos

Un método numérico para integrar una ecuación

$$\begin{cases} x' = f(x,y) & x(0) = x_0 \\ y' = g(x,y) & y(0) = y_0 \end{cases}$$

consiste en dar valores aproximados de una solución $(x(t), y(t))$ del problema en una cantidad finita de valores del tiempo:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = h, \quad t_2 = 2h, \quad \ldots, \quad t_n = nh.$$

- Si la aproximación se va a hacer en el intervalo

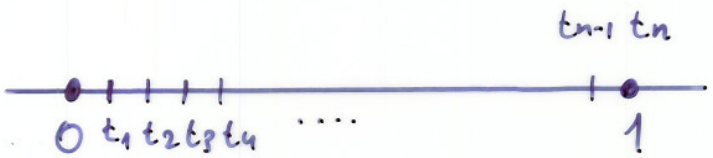
$$0 \leq t \leq 1$$

se suele tomar

$$h = \frac{1}{n}$$

y el último punto es

$$t_n = 1.$$



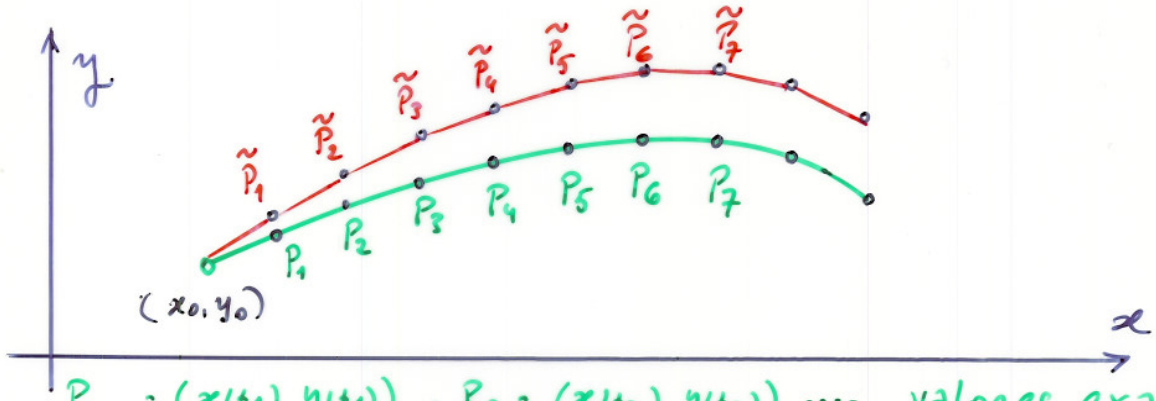
Así pues, se trata de calcular valores

$$
\begin{array}{lll}
(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) & x(t_1) \sim \tilde{x}_1 \ , & y(t_1) \sim \tilde{y}_1 \\
(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) & x(t_2) \sim \tilde{x}_2 \ , & y(t_2) \sim \tilde{y}_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) & x(t_n) \sim \tilde{x}_n \ , & y(t_n) \sim \tilde{y}_n
\end{array}
$$

Si trazamos en el plano los puntos ma aproximados obtenidos:

$$\tilde{P}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \quad \tilde{P}_2 = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2), \ \ldots, \ \tilde{P}_n = (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$$

obtendremos "enlazando los puntos" una aproximación poligonal de la órbita.



$P_1 = (x(t_1), y(t_1))$, $P_2 = (x(t_2), y(t_2))$ .... valores exactos

$\tilde{P}_1 = (x_1, y_1)$ $\quad \tilde{P}_2 = (x_2, y_2)$ ... valores aproximados

Se espera ademas que cuando el número de divisiones $n \to \infty$ (e.d. $h \to 0$)

$$h = \frac{1}{n} \quad \text{(paso)}$$

los valores aproximados converjan a los exactos:

$$(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \longrightarrow (x(t_i), y(t_i)) \qquad n \to \infty$$

El método más sencillo, no por ello menos útil es el:

- Método de Euler (un paso)

Es muy sencillo. Se divide el intervalo de estudio en n partes:

$$0 \leq t \leq 1$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{n}, \quad t_2 = \frac{2}{n}, \quad \ldots, \quad t_{n-1} = \frac{n-1}{n}, \quad t_n = 1$$

- Se toma como punto inicial del algoritmo:

$(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (x_0, y_0)$: los datos iniciales.

Los restantes puntos

$$(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \ldots, (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$$

se calculan recursivamente mediante la ley:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + \frac{1}{n} f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \\ \tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + \frac{1}{n} g(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \end{cases}$$

Es decir:

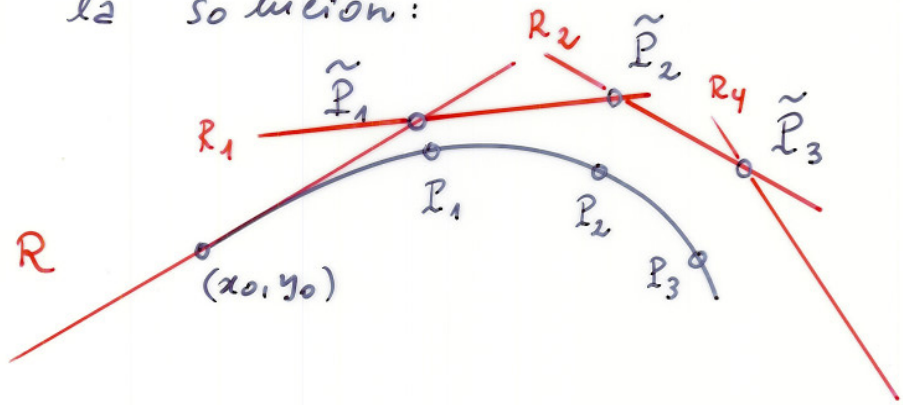
$$\tilde{P}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \longrightarrow \tilde{P}_{i+1} = (\tilde{x}_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}).$$

Con el algoritmo y el dato inicial ya se pueden calcular los puntos aproximados: $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_n$.

- La idea fundamental es que la ecuación

$$x'(t) = f(x(t), y(t)) \qquad x(0) = x_0$$
$$y'(t) = g(x(t), y(t)) \qquad y(0) =$$

da en cada punto la recta tangente R a la solución:



R : $$x = x_0 + f(x_0, y_0)t$$
$$y = y_0 + g(x_0, y_0)t$$

Para obtener $\tilde{P}_1$ nos movemos "sobre" R durante $\frac{1}{n}$ unidades de tiempo.

A continuación trazamos por $\tilde{P}_1$ la "tangente aproximada":

R_1
$$x = \tilde{x}_1 + f(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)\, t$$
$$y = \tilde{y}_1 + g(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)\, t$$

nos movemos "sobre" R_1 durante $\frac{1}{n}$ unidades de tiempo y al detenernos obtenemos $P_2 = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$:

$$\begin{cases} x_2 = \tilde{x}_1 + f(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)\, \frac{1}{n} \\ y_2 = \tilde{y}_1 + g(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)\, \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Repitiendo el proceso iremos obteniendo $\tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \ldots$ Además, el propio algoritmo conlleva un método para probar de manera teórica que el problema:

$$x' = f(x, y) \qquad x(0) = x_0$$
$$y' = g(x, y) \qquad y(0) = y_0$$

admite una solución.