

# Ecuaciones Diferenciales II

## Tema 3: El entorno de los puntos críticos

**José C. Sabina de Lis**

Universidad de La Laguna

*La Laguna, 24 de febrero de 2013*

**1. Puntos críticos no degenerados.** Se considera la ecuación autónoma:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1)$$

donde:

$$\begin{aligned} f : G \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

es de clase  $C^1$ .

El punto  $p_c = (x_c, y_c)$  es un punto crítico:

$$\begin{cases} f_1(x_c, y_c) = 0 \\ f_2(x_c, y_c) = 0. \end{cases}$$

**Definición 1.** Un punto crítico  $p_c = (x_c, y_c)$  de (1) se dice no degenerado si

$$\det f'(p_c) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p_c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p_c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p_c) \end{vmatrix} \neq 0.$$

**Ejemplo 1.** *Todos los puntos críticos de la ecuación:*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen} x \end{cases}$$

*son no degenerados.*

**Teorema 1.** *Un punto crítico  $p_c = (x_c, y_c)$  no degenerado de:*

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

*es un punto crítico aislado para dicha ecuación. Es decir, existe un entorno  $U$  de  $p_c$  donde no hay otros puntos críticos para dicha ecuación.*

## 2. Transformando la ecuación cerca de un punto crítico. Para estudiar:

$$x' = f(x) \quad (2)$$

cerca de un punto crítico  $p_c \in \mathbb{R}^2$ , se hace el cambio

$$y = x - p_c,$$

así:

$$x \sim p_c \quad \Leftrightarrow \quad y \sim 0.$$

Para transformar la ecuación se usa el desarrollo de Taylor:

$$f(y + p_c) = f'(p_c)y + g(y),$$

donde:

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{g(y)}{|y|} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(y) = o(|y|),$$

cuando  $|y| \rightarrow 0+$ .

La ecuación:

$$x' = f(x)$$

se escribe:

$$y' = Ay + g(y), \quad A = f'(p_c) \quad (3)$$

Haciendo

$$y = P^{-1}z,$$

el estudio de (3) cerca de  $y = 0$  se corresponde con el de

$$z' = Jz + h(z), \quad h(z) = o(|z|) \quad (4)$$

donde

$$J = PAP^{-1}$$

es la forma canónica de Jordan de  $A$ .

- Estudiar las órbitas de (2) cerca de  $x = p_c$  equivale a estudiar las órbitas de (4) cerca de  $z = 0$  (¡que es un punto crítico de la ecuación (4)!).

Resumiendo:

$$x' = f(x) \quad x = y + p_c \quad \Leftrightarrow$$

$$y' = Ay + g(y) \quad y = P^{-1}z \quad \Leftrightarrow$$

$$z' = Jz + h(z) \quad J = PAP^{-1}$$

y donde

$$A = f'(p_c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p_c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p_c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p_c) \end{pmatrix}$$

- En los siguientes teoremas se establece que el comportamiento de las órbitas de la última ecuación coincide cerca de cero con las de

$$z' = Jz.$$

**3. Soluciones en coordenadas polares.** Las coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  de  $(x, y)$  se definen como:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Las soluciones  $(x(t), y(t))$  de (2) se pueden escribir en coordenadas polares.

**Lema 1.** Sea  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  una aplicación de clase  $C^k$  que no se anula para ningún valor de  $t$ . Sean  $t_0 \in (a, b)$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  arbitrarios y tales que:

$$\begin{cases} x_0 = \rho_0 \cos \theta_0 \\ y_0 = \rho_0 \operatorname{sen} \theta_0 \end{cases} \quad \rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Existe entonces una única función  $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^k$  tal que  $\theta(t_0) = \theta_0$  y:

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = \rho(t) \operatorname{sen} \theta(t) \end{cases} \quad \rho(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2,$$

para todo  $t \in (a, b)$ .

Las versiones cartesiana y en coordenadas polares de la ecuación son:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \begin{cases} \rho' = R(\rho, \theta) \\ \theta' = \Theta(\rho, \theta). \end{cases}$$

Dada la ecuación cartesiana, la ecuación en polares se calcula de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \rho' = (\cos \theta)f + (\sen \theta)g \\ \theta' = \rho^{-1}(-(\sen \theta)f + (\cos \theta)g), \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sen \theta \\ -\sen \theta / \rho & \cos \theta / \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

Recíprocamente, de la ecuación en polares pasamos a la cartesiana:

$$\begin{cases} x' = \rho^{-1}Rx - \Theta y \\ y' = \rho^{-1}Ry + \Theta x, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\rho & -y \\ y/\rho & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix}.$$



**Ejemplo 2.** *La versión en polares de la ecuación cartesiana:*

$$\begin{cases} x' = y - x(x^2 + y^2) \\ y' = -x - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

es

$$\begin{cases} \rho' = -\rho^3 \\ \theta' = -1. \end{cases}$$

*La versión cartesiana de la ecuación en polares:*

$$\begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = -1 \end{cases}$$

es:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$$

## 4. Autovalores complejos: focos en el caso no lineal.

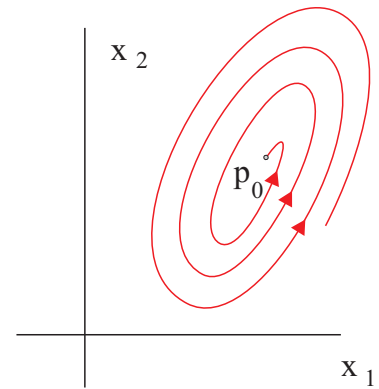
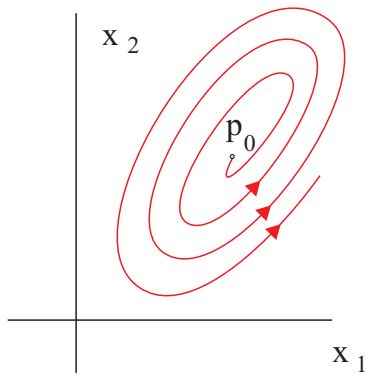
**Teorema 2.** *Sea  $p_c$  un punto crítico no degenerado de la ecuación:*

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

*tal que la matriz  $A = f'(p_c)$  admite dos autovalores complejos conjugados  $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ,  $\beta > 0$ .*

1. *Si  $\alpha < 0$ ,  $\exists U$  entorno de  $p_c$  t. q.  $\forall p_0 \in U$ , la semiórbita positiva  $\gamma^+(p_0)$  tiende a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  rotando infinitas veces alrededor del punto  $p_c$ .*
2. *Si  $\alpha > 0$ ,  $\exists U$  entorno de  $p_c$  t. q.  $\forall p_0 \in U$ , la semiórbita negativa  $\gamma^-(p_0)$  tiende a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  rotando infinitas veces alrededor del punto  $p_c$ .*

*Si  $\alpha > 0$  se dice que  $p_c$  es un **foco inestable** (no lineal), **foco estable** si  $\alpha < 0$ .*



Foco inestable (izquierda) y foco estable (derecha) de la ecuación  $x' = f(x)$ .

**Ejemplo 3.** Los puntos  $(2k\pi, 0)$  son focos de la ecuación

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen} x - cy \end{cases}$$

si  $0 < |c| < 2$ . Son estables si  $c > 0$  e inestables si  $c < 0$ .

**Demostración del Teorema 2.** Probamos el caso 1):  $\alpha < 0$ .

Basta estudiar las órbitas  $\gamma'$  próximas a  $(0, 0)$  de la ecuación:

$$z' = Jz + h(z),$$

donde  $\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{h(z)}{|z|} = 0$  y

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dado

$$0 < \varepsilon < \min\{-\alpha, \beta\}$$

existe  $\delta$  tal que:

$$|h(z)| < \varepsilon|z| = \varepsilon\rho \quad \text{si } |z| = \rho < \delta.$$

Tomamos  $z_0$  tal que  $|z_0| < \delta$  y hallamos la solución  $z(t)$  de

$$\begin{cases} z' = Jz + h(z) \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

La semiórbita  $\gamma'_+$  por  $z_0$  es:

$$\gamma'_+ = \{z(t) : t \in [0, \omega)\},$$

$[0, \omega)$  el dominio de existencia maximal de  $z(t)$ .

Cambiando a polares se obtiene:

$$\begin{cases} \rho' = \alpha\rho + h_1 \cos \theta + h_2 \sin \theta \\ \theta' = -\beta - \frac{h_1}{\rho} \sin \theta + \frac{h_2}{\rho} \cos \theta \end{cases}$$

Afirmamos que si:

$$|z_0| = \rho_0 < \delta \quad \Rightarrow \quad |z(t)| = \rho(t) < \delta$$

$\forall t \in [0, \omega)$ .

En efecto, llamamos:

$$t^* = \sup\{s > 0 : |z(t)| < \delta \text{ si } t < s\}.$$

Si  $t^* < \omega$  se tiene:

$$|z(t^*)| = \rho(t^*) = \delta.$$

Como  $|z(t)| = \rho(t) < \delta$  para  $t < t^*$ :

$$|h_1 \cos \theta + h_2 \operatorname{sen} \theta| \leq |h(z)| < \varepsilon \rho(t),$$

luego

$$\rho'(t) < (\alpha + \varepsilon)\rho(t) < 0 \quad \forall t \leq t^*.$$

Así  $\rho(t^*) < \delta$  que contradice la conclusión anterior.

Por otro lado:

$$\rho(t) < \delta \quad \forall t < \omega \quad \Rightarrow \omega = \infty.$$

Además:

$$\rho'(t) < (\alpha + \varepsilon)\rho(t) \quad \Rightarrow \rho(t) < \rho_0 e^{\alpha t} \rightarrow 0$$

cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Esto prueba que las soluciones con  $|z_0| < \delta$  cumplen  $z(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Para demostrar el comportamiento espiral notamos que si  $|z_0| < \delta$  entonces, al ser  $\rho(t) < \delta$ :

$$-\beta - \varepsilon < \left| -\beta - \frac{h_1}{\rho} \operatorname{sen} \theta + \frac{h_2}{\rho} \operatorname{cos} \theta \right| < \beta + \varepsilon,$$

para  $0 \leq t < \infty$ . De la ecuación para  $\theta$  resulta:

$$\theta_0 - (\beta + \varepsilon)t < \theta(t) < \theta_0 + (-\beta + \varepsilon)t$$

$$\Rightarrow \quad \theta(t) \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow \infty.$$

Hemos probado que  $z(t)$  da infinitas vueltas alrededor de  $(0, 0)$  y en sentido negativo cuando  $t \rightarrow \infty$ .

- Si  $P$  es la matriz de paso tal que  $A = P^{-1}JP$ , las órbitas de la ecuación original también rotan en sentido negativo si  $\det P^{-1} > 0$  mientras giran en sentido contrario si  $\det P^{-1} < 0$ .

- **Advertencia:** El caso  $\alpha = 0$  es de comportamiento dudoso con respecto al caso lineal. Obsérvese el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.** *Para el punto crítico  $(0,0)$  de las ecuaciones:*

$$\begin{cases} x' = y \pm x(x^2 + y^2) \\ y' = -x \pm y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

$\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ . *El punto  $(0,0)$  se comporta como un foco estable cuando el signo es “+” y como un foco inestable cuando el signo es “-”.*



**5. Autovalores reales distintos: sillas y nodos.** Suponemos en esta sección que las funciones  $f_1$  y  $f_2$  en la ecuación:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

son de clase  $C^2$ .

Asimismo que la matriz jacobiana  $A = f'(p_c)$  posee autovalores **reales** distintos  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Se designan por  $V_1$  y  $V_2$  a los autoespacios asociados a los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

**Teorema 3** (Propiedad del punto de silla). *Supongamos que:*

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

*Entonces,  $\exists U$  entorno de  $p_c$ , dos semiórbitas positivas:  $\gamma_1^+$ ,  $\gamma_2^+$ , y dos semiórbitas negativas  $\Gamma_1^-$ ,  $\Gamma_2^-$  contenidas  $U$  tales que:*

1) *Todas las semiórbitas positivas  $\gamma^+$  que estén contenidas en  $U$  satisfacen*

$$\gamma^+ \subset \gamma_1^+ \cup \gamma_2^+ \cup \{p_c\}$$

*y convergen a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , aproximándose a  $p_c$  de forma tangente a la recta  $p_c + V_1$ .*

2) *Toda semiórbita negativa  $\gamma^-$  en  $U$  cumple:*

$$\gamma^- \subset \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^- \cup \{p_c\}$$

*y se aproxima a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  de forma tangente a la recta  $p_c + V_2$ .*

3)  *$\gamma_1^+$  y  $\gamma_2^+$  se aproximan a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  siguiendo sentidos opuestos. Otro tanto sucede con  $\Gamma_1^-$  y  $\Gamma_2^-$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ .*

**Teorema 4 (Nodos).** *Supongamos que:*

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0.$$

*Entonces  $\exists U$ , entorno de  $p_c$  tal que  $\forall x_0 \in U$  la semiórbita positiva*

$$\gamma^+(x_0) \subset U$$

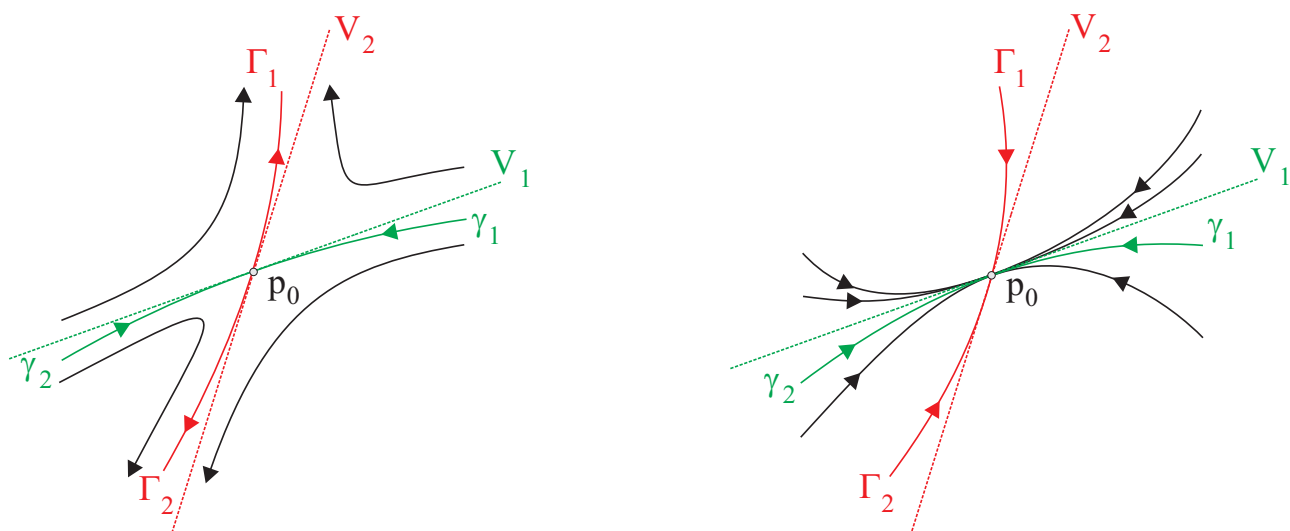
*y converge a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .*

*Más aún, exceptuando dos semiórbitas positivas:*

$$\Gamma_1^+, \Gamma_2^+ \subset U,$$

*llamadas “separatrices”, que convergen a  $p_c$  de forma tangente a  $p_c + V_2$  (en sentidos opuestos) cuando  $t \rightarrow +\infty$ , todas las restantes semiórbitas  $\gamma^+(x_0) \subset U$  se acercan a  $p_c$  de forma tangente a  $p_c + V_1$ .*

- Si  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$  la situación es análoga cambiando  $t$  por  $-t$ .



Un punto de silla (izquierda) y un nodo estable (derecha) en el caso no lineal  $x' = f(x)$ . Las órbitas se representan en un entorno adecuado  $U$  del punto  $p_c$ .

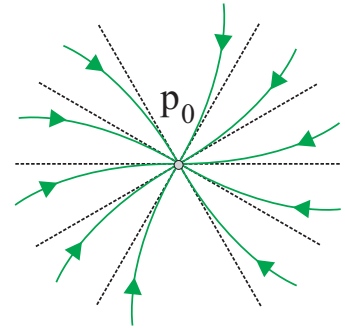
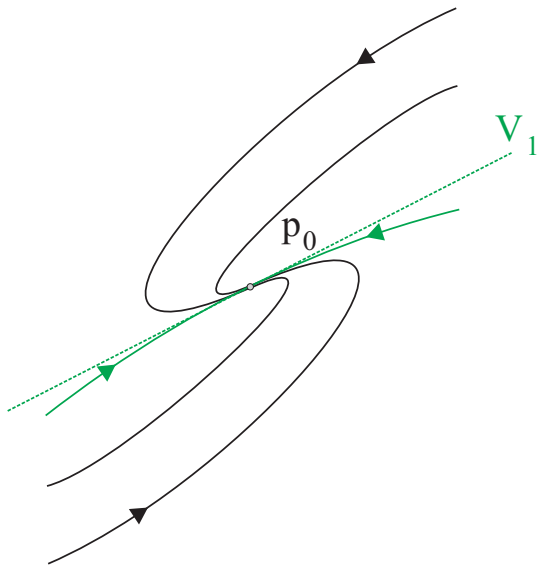
## 5. Autovalores reales iguales: nodos impropios.

**Teorema 5.** *Supongamos que  $\lambda_1$  es un autovalor doble y negativo de  $A = f'(p_c)$  representando por  $V_1$  el correspondiente autoespacio.*

a) *Si  $\dim V_1 = 2$  entonces existe un entorno  $U$  de  $p_c$  donde todas las semiórbitas positivas convergen a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Además, por cada semirrecta con extremo en  $p_c$  existe una semiórbita  $\gamma^+$  que se aproxima a  $p_c$  de forma tangente a dicha semirrecta, cuando  $t \rightarrow +\infty$ .*

b) *Si  $\dim V_1 = 1$  entonces existe un entorno  $U$  de  $p_c$  donde todas las semiórbitas  $\gamma^+$  convergen a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  acercándose a dicho punto de manera tangente a la recta  $p_c + V_1$ .*

- Si  $\lambda_1 > 0$  en el teorema, el comportamiento se deduce del teorema al cambiar  $t$  por  $-t$ .



Las dos configuraciones de la versión no lineal del nodo impropio estable. Las órbitas se representan en un entorno  $U$  del punto  $p_c$ .