Ecuaciones Diferenciales II

Series de Fourier

José C. Sabina de Lis

Universidad de La Laguna

La Laguna, 19 de noviembre de 2013

1. Problemas de Contorno y series de autofunciones.

A) Series de Fourier en senos. El problema:

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, \pi] \\ x(0) = x(\pi) = 0, \end{cases}$$

- $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$, $\psi_n = \operatorname{sen} nt$.

Proposición 1. *Toda $f \in C^2[0, \pi]$ tal que*

$$f(0) = f(\pi) = 0$$

se representa en la forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \; dt,$$

siendo la serie uniformemente convergente en $[0, \pi]$.

El desarrollo converge en media cuadrática si $f(t) \in R[0, \pi]$*, sin más restricciones sobre* f.

B) Series de Fourier en cosenos. El problema:

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, \pi] \\ x'(0) = x'(\pi) = 0, \end{cases}$$

- $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $\psi_n = \cos nt$.

Proposición 2. *Toda* $f \in C^2[0, \pi]$ *tal que*

$$f'(0) = f'(\pi) = 0$$

se representa en la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \; dt,$$

siendo la serie uniformemente convergente en $[0, \pi]$.

El desarrollo converge en media cuadrática si $f(t) \in R[0, \pi]$, *sin más restricciones sobre* f.

C) Series de Fourier en cosenos & senos. Las funciones 2π–periódicas son el mejor ejemplo de las funciones del siguiente resultado.

Proposición 3. *Sea $f \in C^2[-\pi,\pi]$ tal que*

$$f(-\pi) = f(\pi), \qquad f'(-\pi) = f'(\pi).$$

Entonces:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \; dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \; dt \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \; dt,$$

siendo la serie uniformemente convergente en $[-\pi,\pi]$.

El desarrollo converge en media cuadrática si $f(t) \in R[-\pi,\pi]$, sin más restricciones sobre f.

Demostración. Para reducir el caso periódico a los anteriores escribimos:

$$f(t) = g(t) + h(t)$$

donde:

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad h(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}.$$

Al desarrollarlas en el intervalo $[0, \pi]$:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt, \tag{1}$$

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt, \tag{2}$$

donde, al converger uniformemente en $[0, \pi]$ también lo hacen en $[-\pi, \pi]$. $\square$

Definición 1. *Para* $\boxed{f \in R[0,\pi]}$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt, \qquad t \in [0,\pi]$$

se denomina el desarrollo de Fourier de f *en senos, en el intervalo* $[0,\pi]$,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt, \qquad t \in [0,\pi]$$

es el desarrollo de Fourier de f *en cosenos, en el intervalo* $[0,\pi]$.

Para $\boxed{f \in R[-\pi,\pi]}$,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt,$$

es simplemente el desarrollo en serie de Fourier de f, *en el intervalo* $[-\pi,\pi]$

Relación entre los tres desarrollos

• Si $f \in R[-\pi,\pi]$ es par en $[-\pi,\pi]$ su desarrollo de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \; dt.$$

que coincide con el desarrollo de Fourier en cosenos de su restricción al intervalo $[0,\pi]$.

• Si $f \in R[-\pi,\pi]$ es impar en $[-\pi,\pi]$ su desarrollo de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \; dt.$$

que coincide con el desarrollo de Fourier en senos de su restricción al intervalo $[0, \pi]$.

★ Si $f \in R[0, \pi]$ es una función arbitraria y $\bar{f}$ es su *extensión par* al intervalo $[-\pi, \pi]$, el desarrollo de $\bar{f}$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$\bar{f}(t) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \cos nt + \bar{b}_n \operatorname{sen} nt$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

pues $\bar{b}_n = 0$ y $\bar{a}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \; dt$, que es el desarrollo en serie de cosenos de f en $[0, \pi]$.

★ Análogamente, si $f \in R[0, \pi]$ y $\hat{f}$ es su *extensión* *impar* al intervalo $[-\pi, \pi]$, el desarrollo de $\hat{f}$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos nt + \hat{b}_n \operatorname{sen} nt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt$$

pues $\hat{a}_n = 0$ y $\hat{b}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt$, que es el desarrollo en serie de senos de f en $[0, \pi]$.

Ejemplo. El desarrollo de $f(t) = t$ en serie de cosenos en $[0, \pi]$:

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t.$$

El desarrollo de Fourier de $\bar{f}(t) = |t|$ en $[-\pi, \pi]$:

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t.$$

Ejemplo. El desarrollo de $f(t) = 1$ en serie de senos en $[0, \pi]$:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)t.$$

El desarrollo de Fourier de $\hat{f}(t) = signo(t)$ en $[-\pi, \pi]$:

$$\hat{f}(t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} nt.$$

2. Identidad de Parseval.

Teorema 1 (Identidades de Parseval). *Sean f, g funciones en* $R[-\pi, \pi]$ *se tiene que:*

a) $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt = \pi \left\{ \frac{a_0 \hat{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{a}_n + b_n \hat{b}_n \right\}$,

b) $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\, dt = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right\}$.

Si f, g en en $R[0, \pi]$ *se tiene que:*

c) $\int_0^{\pi} f(t)g(t)\, dt = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{a_0 \hat{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{a}_n \right\}$,

d) $\int_0^{\pi} f(t)^2\, dt = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right\}$,

mientras:

e) $\int_0^{\pi} f(t)g(t)\, dt = \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \hat{b}_n \right\}$,

f) $\int_0^{\pi} f(t)^2\, dt = \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right\}$.

Teorema 2 (Principio de identidad)**.** *Sean f y g funciones* <u>*continuas*</u> *en $[-\pi,\pi]$ con desarrollos en serie de Fourier :*

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt,$$

$$g(t)=\frac{\bar{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \cos nt + \bar{b}_n \operatorname{sen} nt.$$

Entonces $f(t)=g(t)$ si y sólo si

$$a_n=\bar{a}_n \qquad \& \qquad b_n=\bar{b}_n \qquad \textit{para todo } n.$$

Demostración. Recuérdese que las igualdades precedentes se entienden en “media cuadráctica”. $\square$

Teorema 3 (Integración término a término).
Sea $f \in R[-\pi, \pi]$ *entonces para* t_0 *fijo y cada* $t \in [-\pi, \pi]$ *se tiene que:*

$$\int_{t_0}^{t} f(s)\ ds = \frac{a_0}{2}(t - t_0) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{t_0}^{t} \cos ns\ ds + b_n \int_{t_0}^{t} \operatorname{sen} ns\ ds,$$

siendo la convergencia uniforme en $[-\pi, \pi]$*.*

Análogamente, para $f \in R[0, \pi]$*:*

$$\int_{t_0}^{t} f(s)\ ds = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{t_0}^{t} \operatorname{sen} ns\ ds,$$

$$\int_{t_0}^{t} f(s)\ ds = \frac{a_0}{2}(t - t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{t_0}^{t} \cos ns\ ds,$$

en donde $t_0, t \in [0, \pi]$ *y la convergencia es uniforme en* $[0, \pi]$*.*

Ejemplo/Ejercicio. La función $f(t) = 1$ se representa en serie de senos en el intervalo $[0, \pi]$:

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)t.$$

Por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

De aquí sale que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ejemplo/Ejercicio. La función $f(t) = 1$ se representa en serie de senos en el intervalo $[0, \pi]$:

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)t.$$

Al integrar la serie término a término obtenemos:

$$t = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t,$$

es decir:

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left\{ \cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \cdots \right\}.$$

Por el momento sólo sabemos que la primera serie converge en media cuadrática, mientras la segunda converge uniformemente en $[0, \pi]$.

Nota. Obsérvese que $f(t) = t$ no cumple las condiciones $f' = 0$ en $t = 0, \pi$. Sin embargo la serie converge uniformemente.

3. Convergencia puntual.

Para estudiar la convergencia puntual, la serie de referencia es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt$$

donde suponemos que:

$$f(t) \in R[-\pi, \pi]$$

es 2π–periódica:

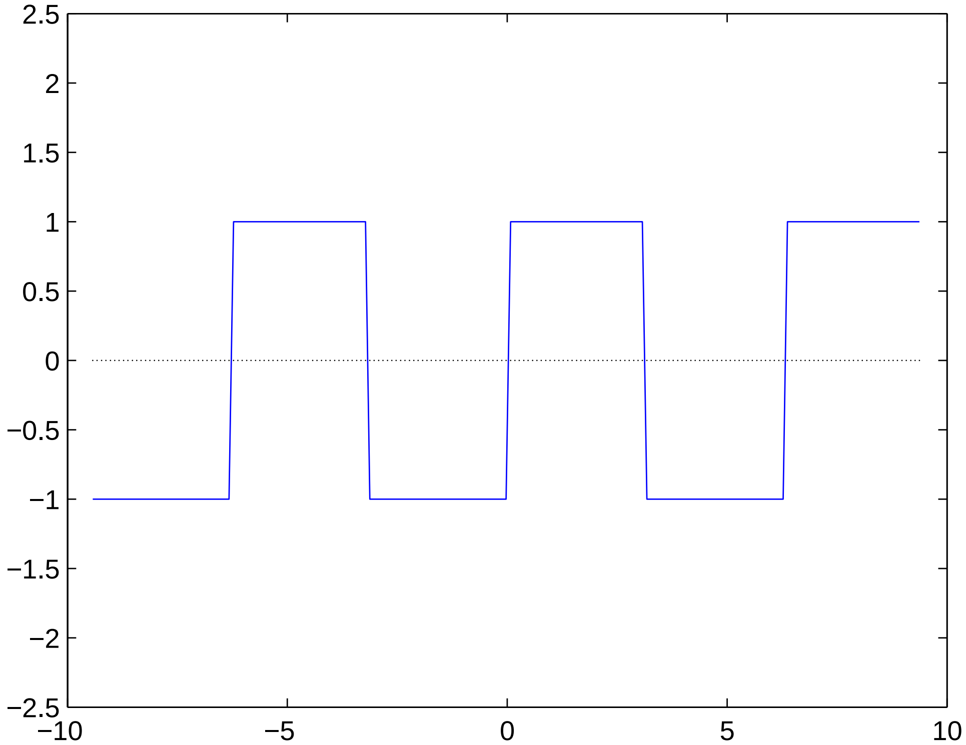
$$f(t + 2\pi) = f(t).$$

★ Funciones como $f(t) = t$, $f(t) = e^t$, etc, se extienden periódicamente fuera de $[-\pi, \pi]$.

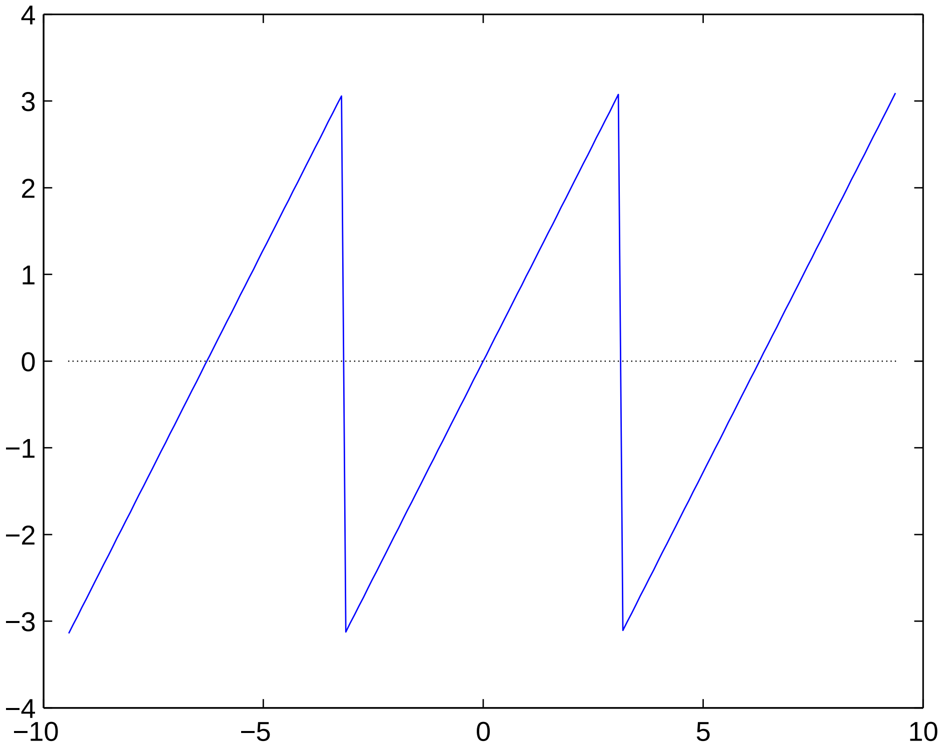
★ Para estudiar la serie de Fourier en senos de $f \in R[0, \pi]$, primero se la extiende impar a $[-\pi, \pi]$ y después 2π–periódicamente a $\mathbb{R}$.

★ Para estudiar la serie de Fourier en cosenos de $f \in R[0, \pi]$, primero se la extiende par a $[-\pi, \pi]$ y después 2π–periódicamente a $\mathbb{R}$.

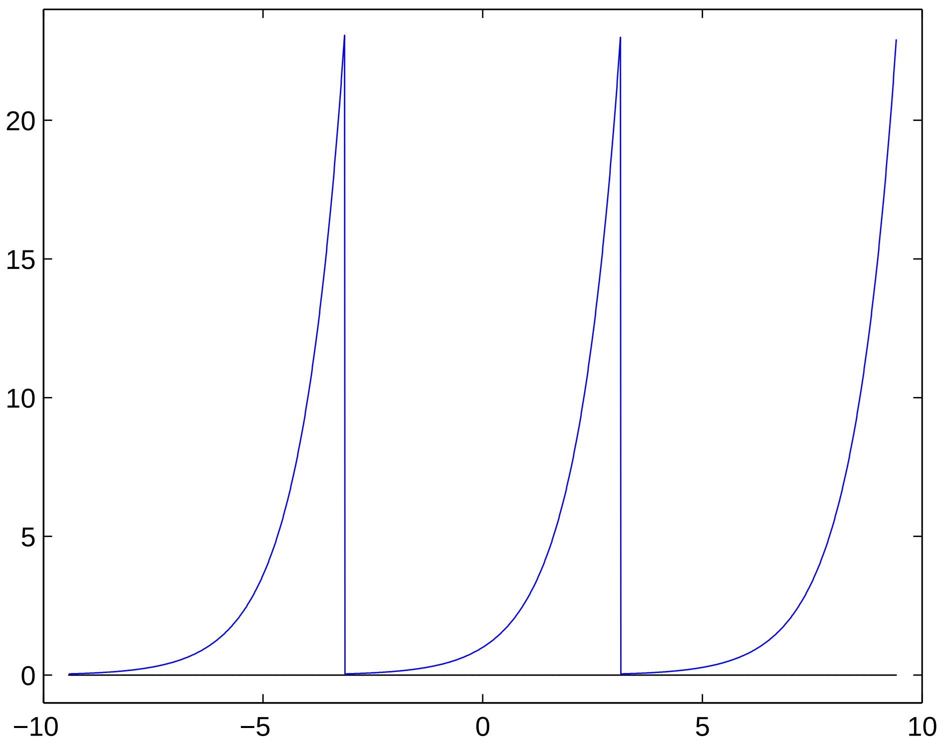
Extensiones periódicas: funciones definidas $[-\pi, \pi]$.



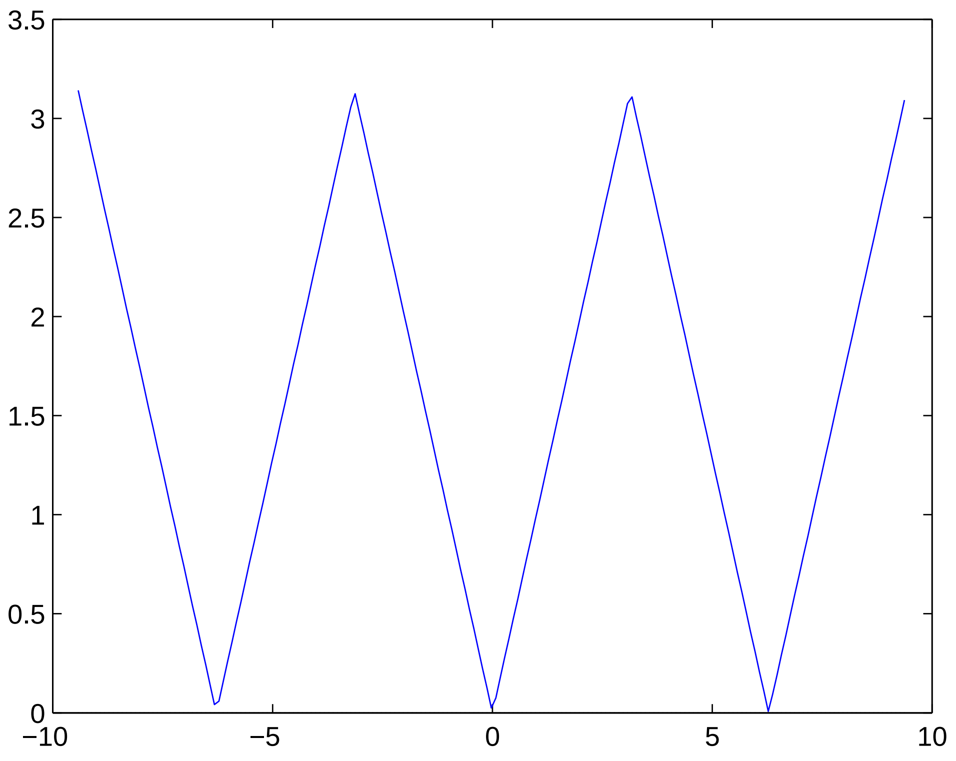
Extensión 2π periódica de $f(t) = signo(t)$



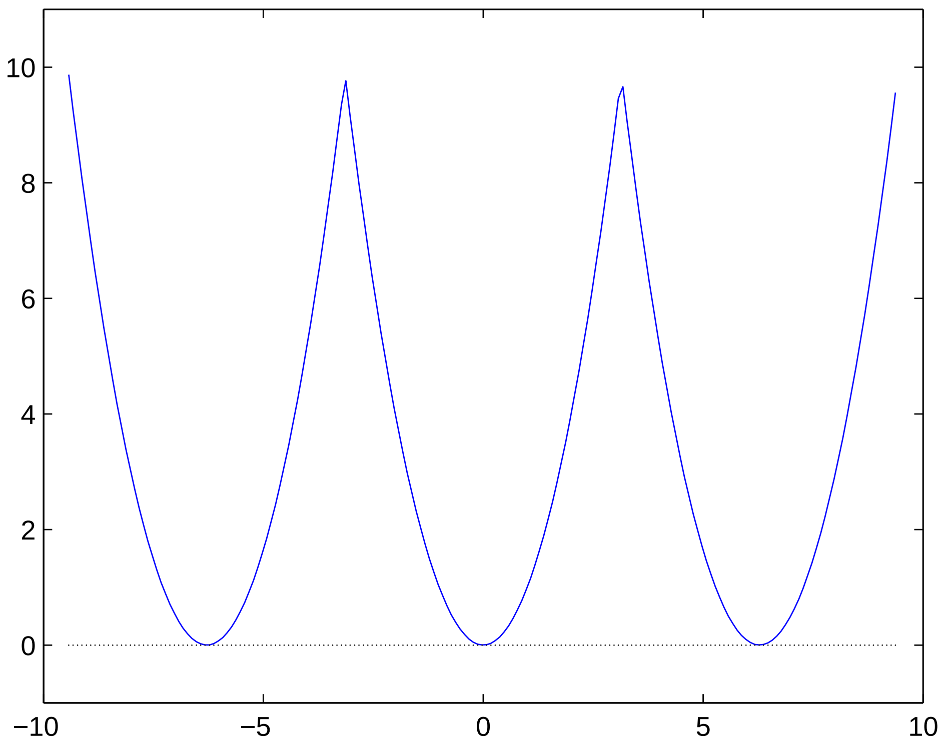
Extensión 2π periódica de $f(t) = t$



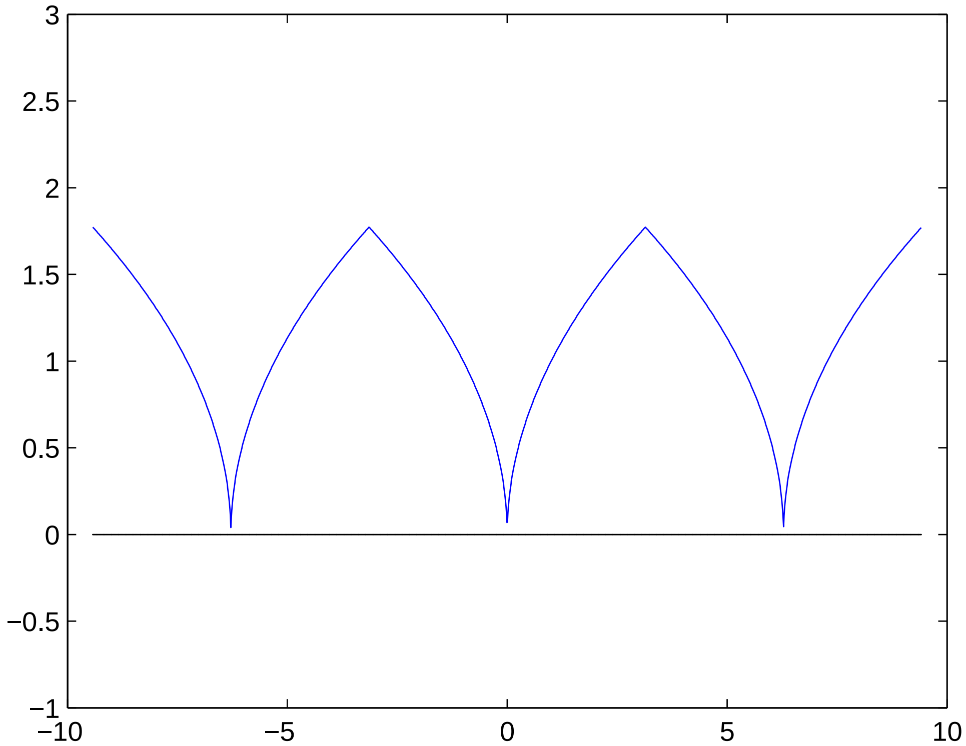
Extensión 2π periódica de $f(t) = e^t$



Extensión 2π periódica de $f(t) = |t|$

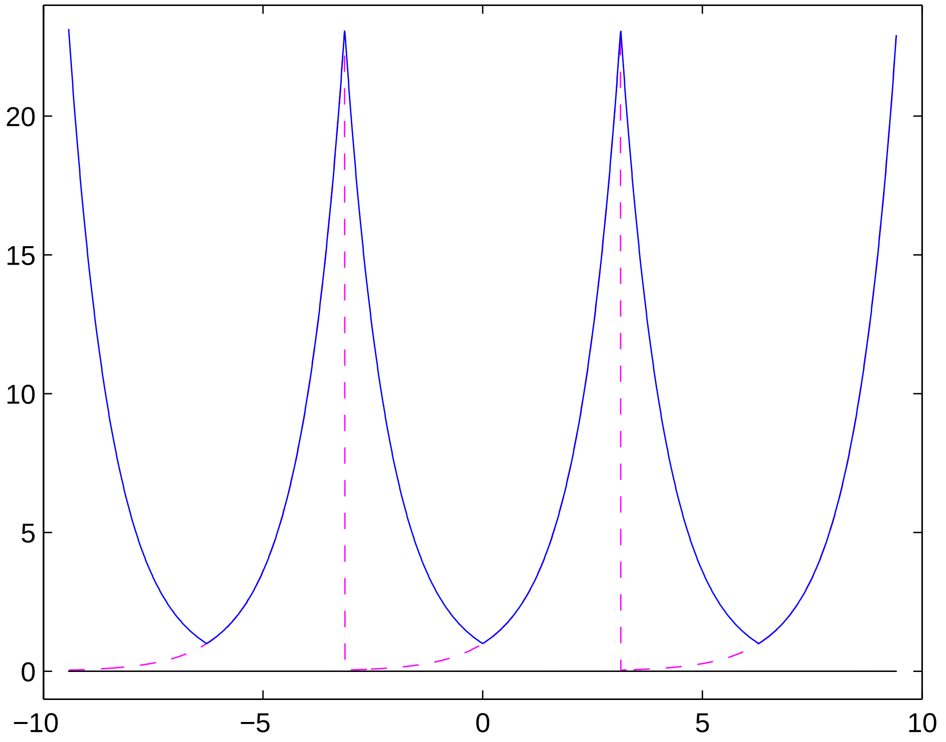


Extensión 2π periódica de $f(t) = t^2$

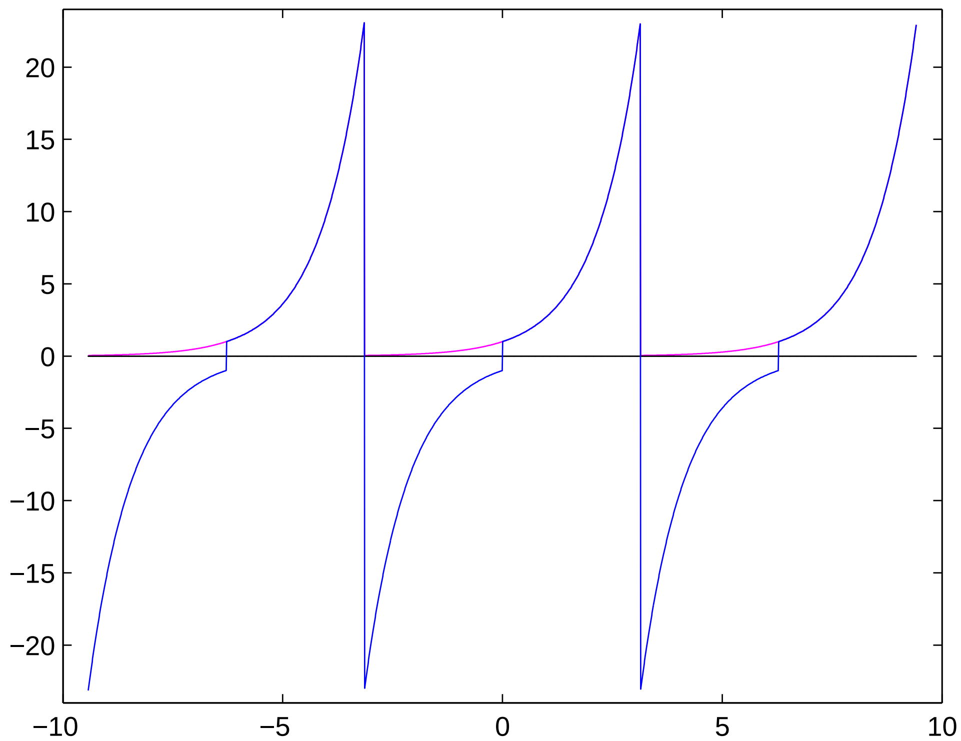


Extensión 2π periódica de $f(t) = \sqrt{|t|}$

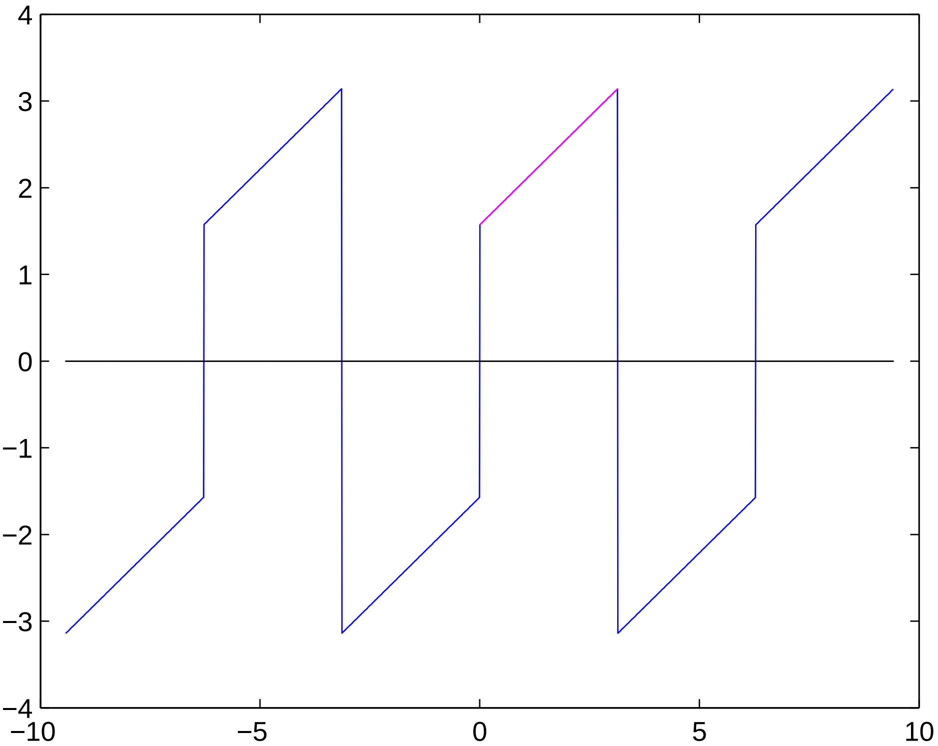
Extensiones periódicas: funciones definidas $[0, \pi]$.



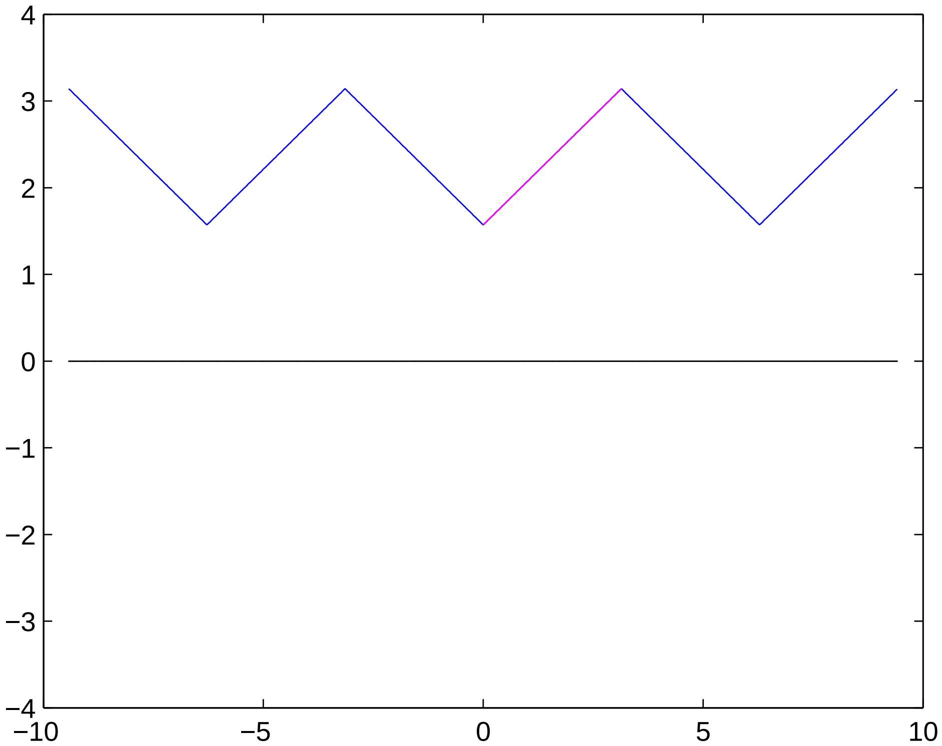
Extensión par 2π periódica de $f(t) = e^t$



Extensión impar 2π periódica de $f(t) = e^t$



Extensión impar 2π periódica de $f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}$



Extensión par 2π periódica de $f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}$

Teorema 4. *Sea $f(t)$ una función 2π–periódica que es C^1 a trozos en $[-\pi,\pi]$. Entonces:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt,$$

en cada punto $t \in \mathbb{R}$ donde f sea continua. En particular, la identidad es cierta $\forall t \in [-\pi,\pi]$ si f es continua en $\mathbb{R}$.

★ La continuidad de f en $t = t_0$ no basta para que:

$$f(t_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt_0 + b_n \operatorname{sen} nt_0.$$

El teorema requiere la derivabilidad en un entorno reducido de t_0 donde las derivadas admiten límites laterales.

Contraejemplos: L. Fejér (1910), C. Jordan, principios del siglo XX.

★ La serie de Fourier de las funciones $f(t) = t$, $f(t) = t^2$, $f(t) = |t|$ o $f(t) = e^t$ converge puntualmente en $(-\pi, \pi)$.

★ Las extensiones 2π−periódicas de $f(t) = t^2$ y $f(t) = |t|$ son continuas $\Rightarrow$ sus series convergen puntualmente en $[-\pi, \pi]$.

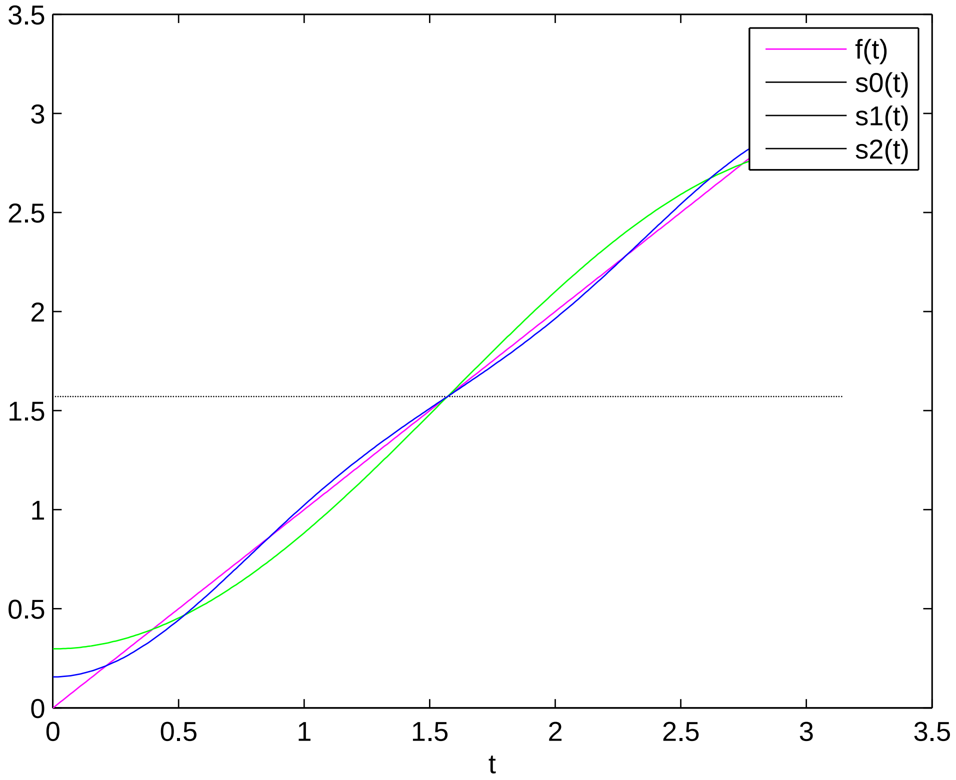
★ Las series de Fourier de $f(t) = t$ y $f(t) = e^t$ también convergen en $t = \pm\pi$. No lo hacen a los valores $f(\pm\pi)$.

Teorema 5. *En las condiciones precedentes:*

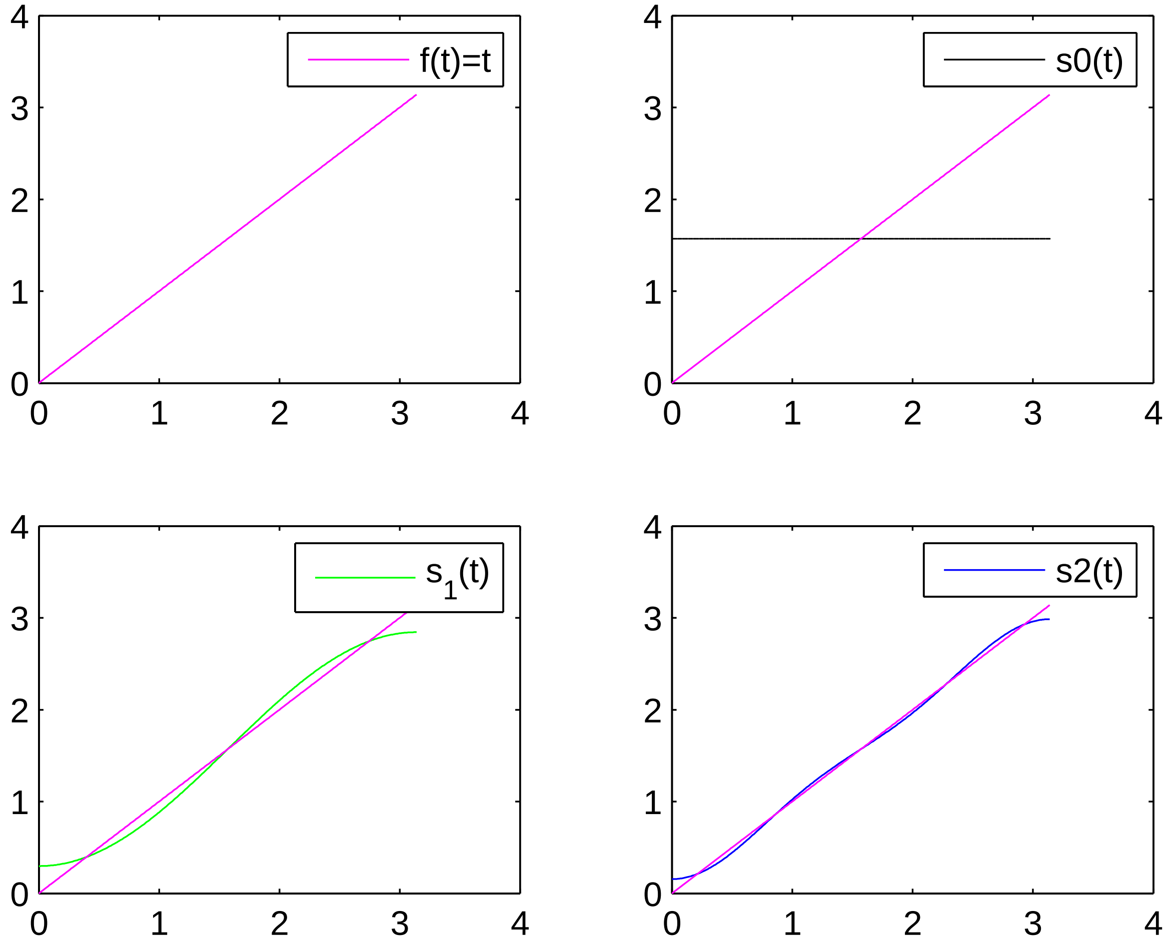
$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt,$$

donde $f(t+)$, $f(t-)$ *son los límites laterales de* f *en* t *por la derecha y por la izquierda, respectivamente.*

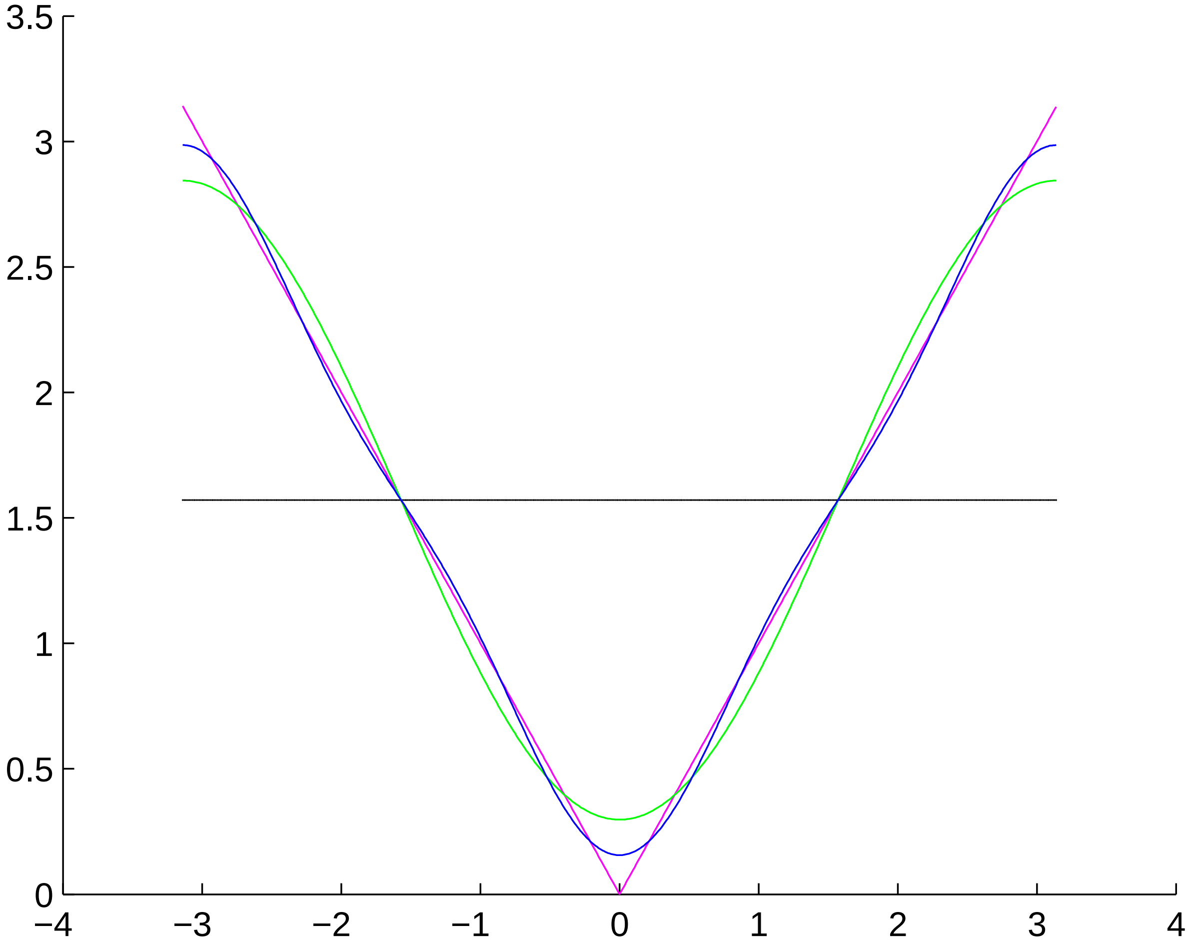
★ Si f es C^1 a trozos $\Rightarrow$ la serie de Fourier converge al "valor medio" de la discontinuidad de salto.



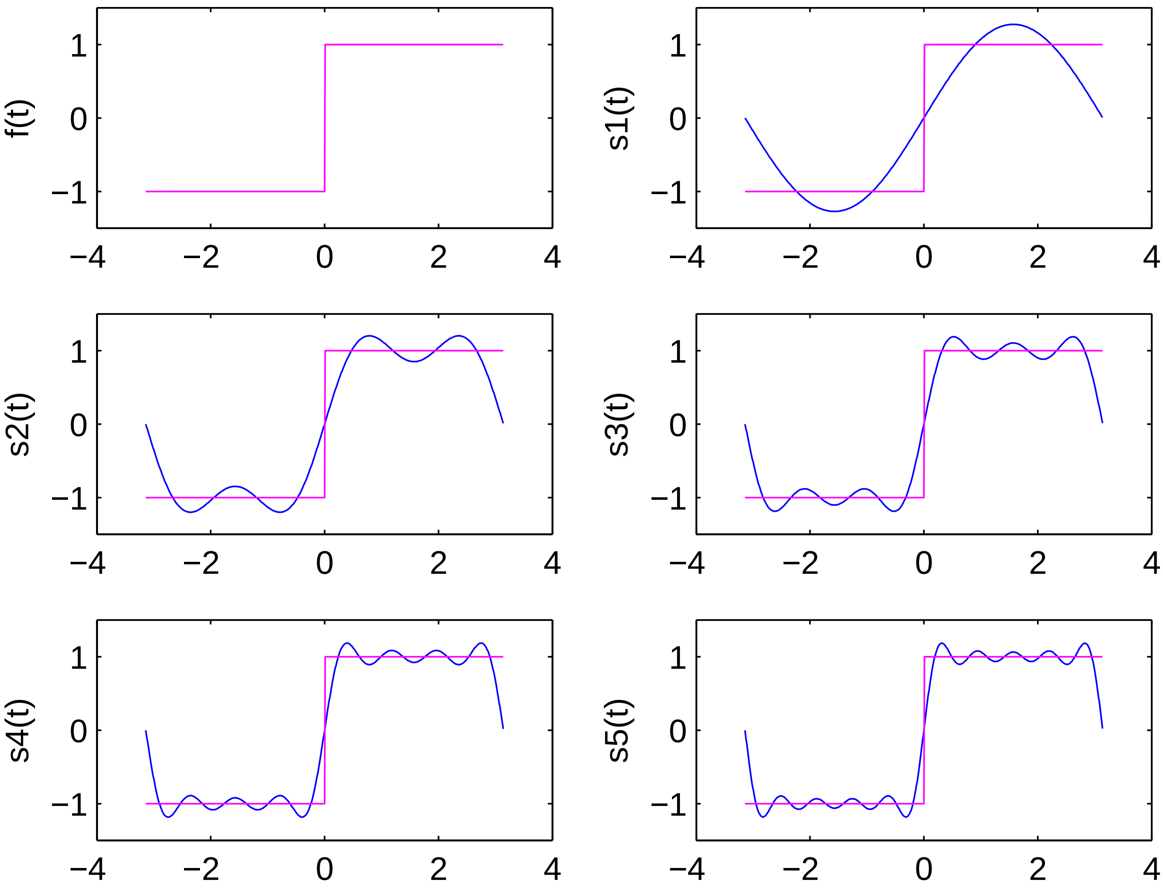
Las tres primeras sumas parciales de la serie de Fourier en cosenos de $f(t) = t$ y en el intervalo $[0, \pi]$. La primera es $s_0(t) = \pi/2$, luego vienen $s_1(t)$ y $s_2(t) = t$.



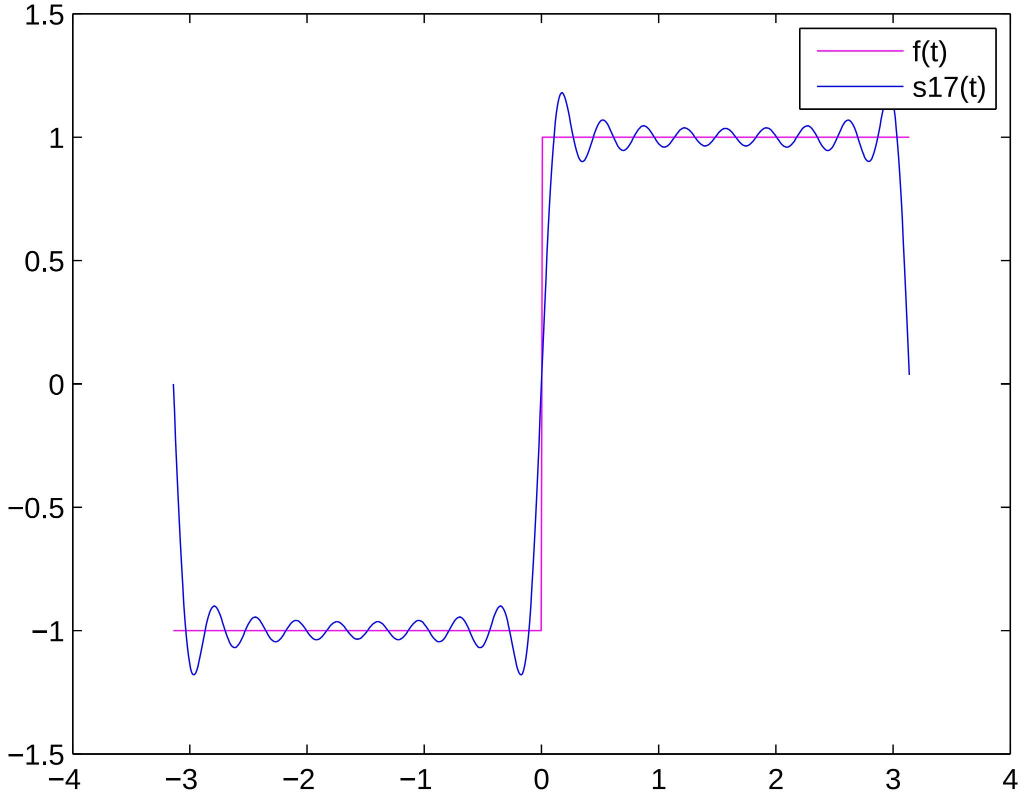
Las tres primeras sumas parciales de la serie de Fourier en cosenos de $f(t) = t$ en el intervalo $[0, \pi]$, $s_0(t) = \pi/2$, $s_1(t)$ y $s_2(t) = t$.



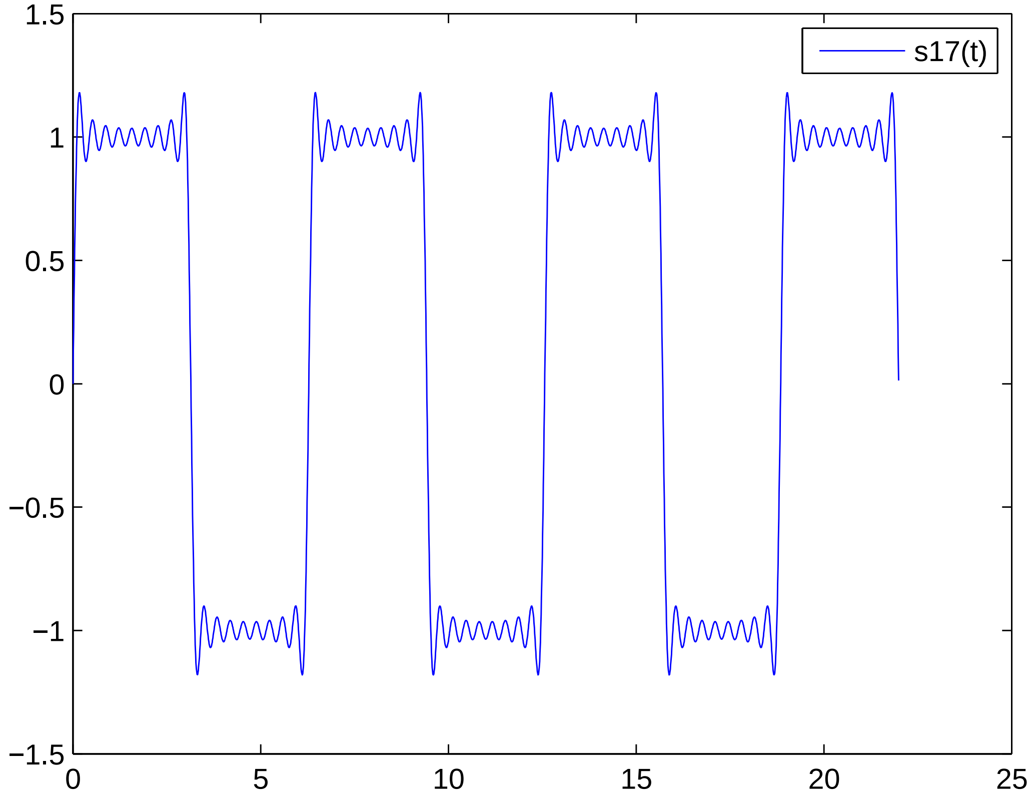
Las tres primeras sumas parciales de la serie de Fourier de $f(t) = |t|$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, $s_0(t) = \pi/2$, $s_1(t)$ y $s_2(t) = t$.



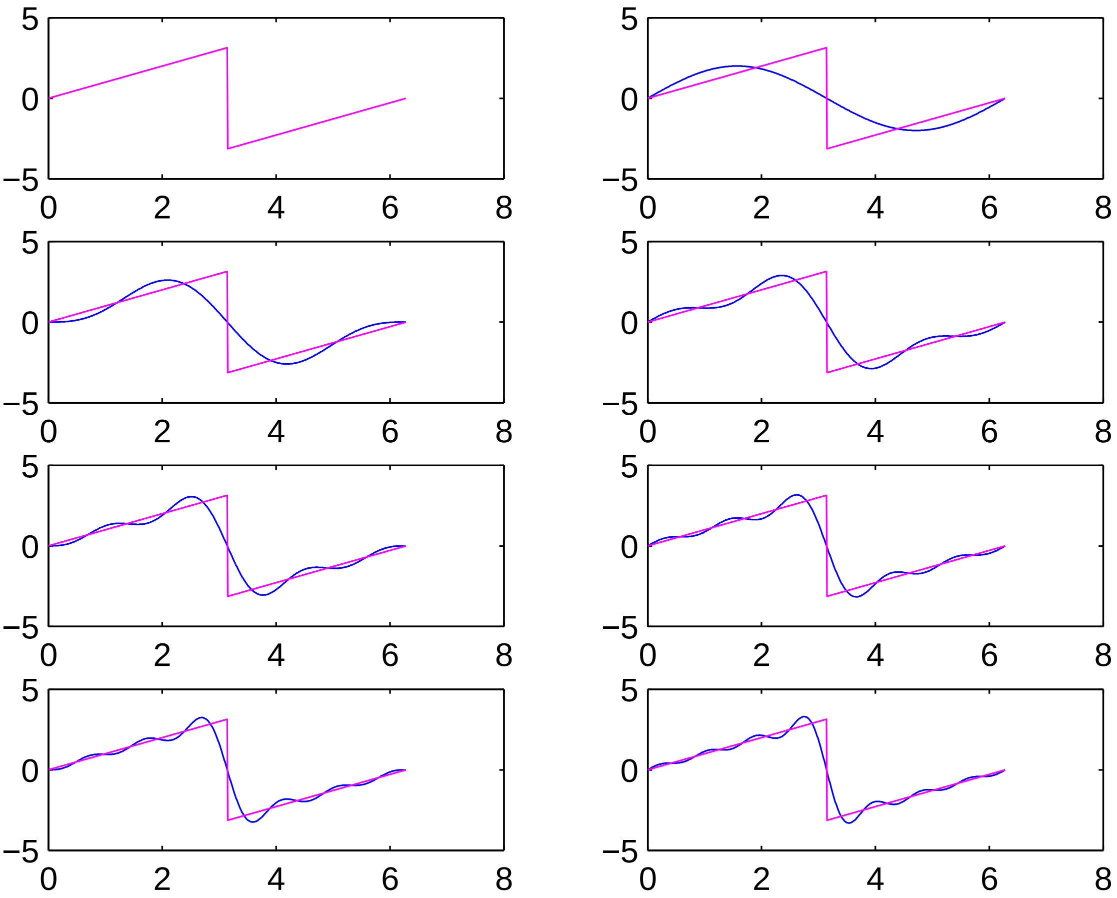
Las cinco primeras sumas parciales de la serie de Fourier de la función signo(t) en el intervalo $[-\pi, \pi]$.



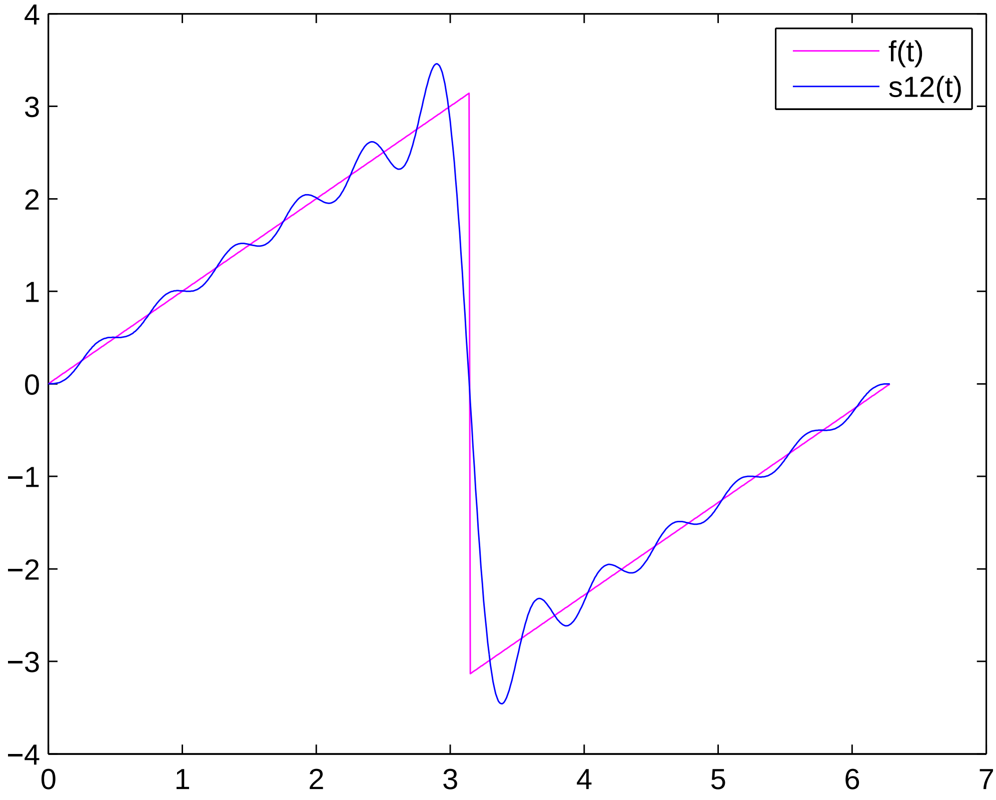
Suma parcial $s_{17}(t)$ de la serie de Fourier de la función signo(t) en el intervalo $[-\pi, \pi]$.



Suma parcial $s_{17}(t)$ de la serie de Fourier de la función signo(t) en el intervalo $[0, 7\pi]$.



Las siete primeras sumas parciales de la serie de Fourier de la función $f(t) = t$. Se han dibujado en el intervalo $[0, 2\pi]$.



La suma parcial $s_{12}(t)$ de la serie de Fourier de la función $f(t) = t$. Se ha dibujado en el intervalo $[0, 2\pi]$ para resaltar el "salto" en el punto $t = \pi$. Se observa la formación incipiente del "fenómeno de Gibbs".

1. Convergencia uniforme.

Un teorema de convergencia uniforme para series trigonométricas

Teorema 6. *Sea $f(t)$ una función continua y C^1 a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi]$ que cumple:*

$$f(-\pi) = f(\pi).$$

Entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt.$$

Teorema 7. *En las condiciones del teorema anterior:*

$$|f(t) - S_N(t)| \leq \left\{ \frac{\pi^2}{6} - \sum_1^N \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2} \times$$

$$\left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)^2 \; dt - \sum_1^N n^2 (a_n^2 + b_n^2) \right\}^{1/2}.$$

Ejercicio Hallar la serie de Fourier de $f(t) = |t|$. a) Estimar el error cometido al substituir f por s_3. b) Hallar N para que el error se menor que 0,1.

Solución.

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)t.$$

Llamamos E_N al error asociado a $S_N(t)$. Entonces $E_2, \ldots, E_5$:

0,3868 0.2375 0,2097 0,1558

mientras $E_6, \ldots, E_{10}$:

0,1434 0,1158 0,1088 0.0922 0,0877.

Vemos pues que con nueve términos $N = 9$ bajamos de 0,1.

Ejercicio. Hallar la serie de Fourier de $f(t) = t^4$. Determinar el error cometido al substituir f por s_3.

Solución.

$$t^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} \cos nt.$$

$$s_3(t) = \frac{\pi^4}{5} - 8(\pi^2 - 6)\cos t +$$

$$\frac{8(\pi^2 2^2 - 6)}{2^4} \cos 2t - \frac{8(\pi^2 3^2 - 6)}{3^4} \cos 3t.$$

El factor:

$$a := \left\{ \frac{\pi^2}{6} - \sum_{1}^{N} \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2}_{|N=3} = 0{,}5328.$$

$$b := \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)^2 \, dt - \sum_{1}^{N} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \right\}^{1/2}_{|N=3} \Rightarrow$$

$$b^2 = \frac{32\pi^6}{7} - 8^2(\pi^2 - 6)^2 -$$

$$\frac{8^2(4\pi^2 - 6)^2}{2^6} - \frac{8^2(9\pi^2 - 6)^2}{3^6} = 41{,}3947^2.$$

El error es:

$$E_3 = ab = \boxed{22.0531}.$$