Ecuaciones Diferenciales II

Ecuación del Calor

José C. Sabina de Lis

Universidad de La Laguna

La Laguna, 19 de noviembre de 2013

1. La ecuación del calor. La ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$u = u(x,t) =$ temperatura en x, en el instante t.

$D =$ coeficiente de difusión térmica.

Tras cambio de escala:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.}$$

Abreviadamente:

$$u_t = u_{xx}.$$

★ Difusión del calor.

★ Proceso irreversible $\Rightarrow t > 0$.

2. Solución fundamental.

La función:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

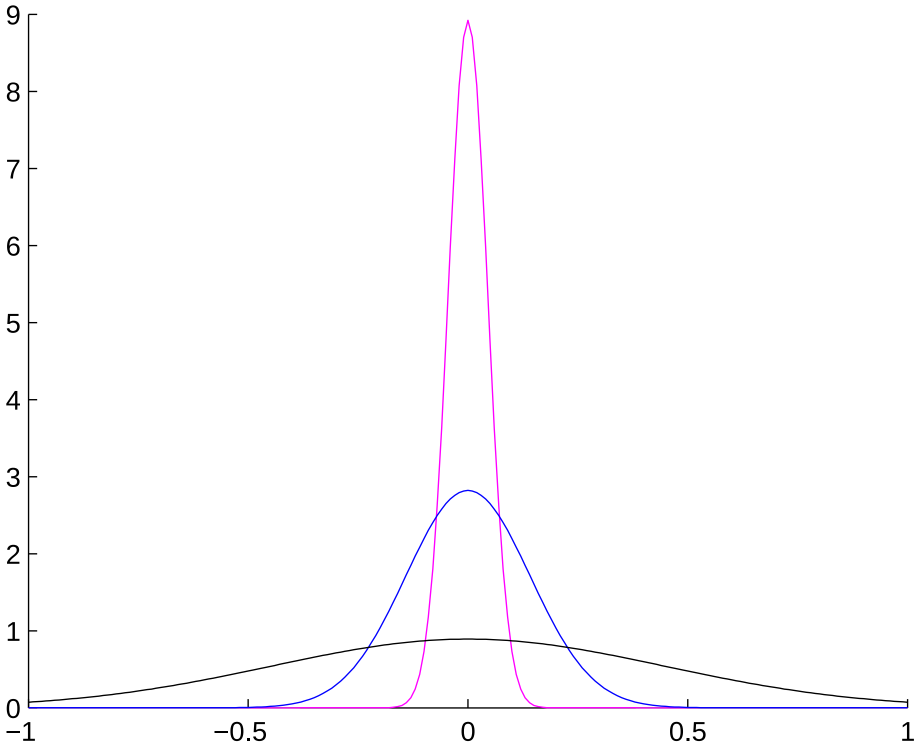
es la solución fundamental de la ecuación del calor en $t > 0$.

★ Dispersión de una "detonación" en $x = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \to \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & t = 0, \end{cases}$$

cuando $t \to 0+$.

★ Esto expresa el carácter altamente irreversible de la ecuación.



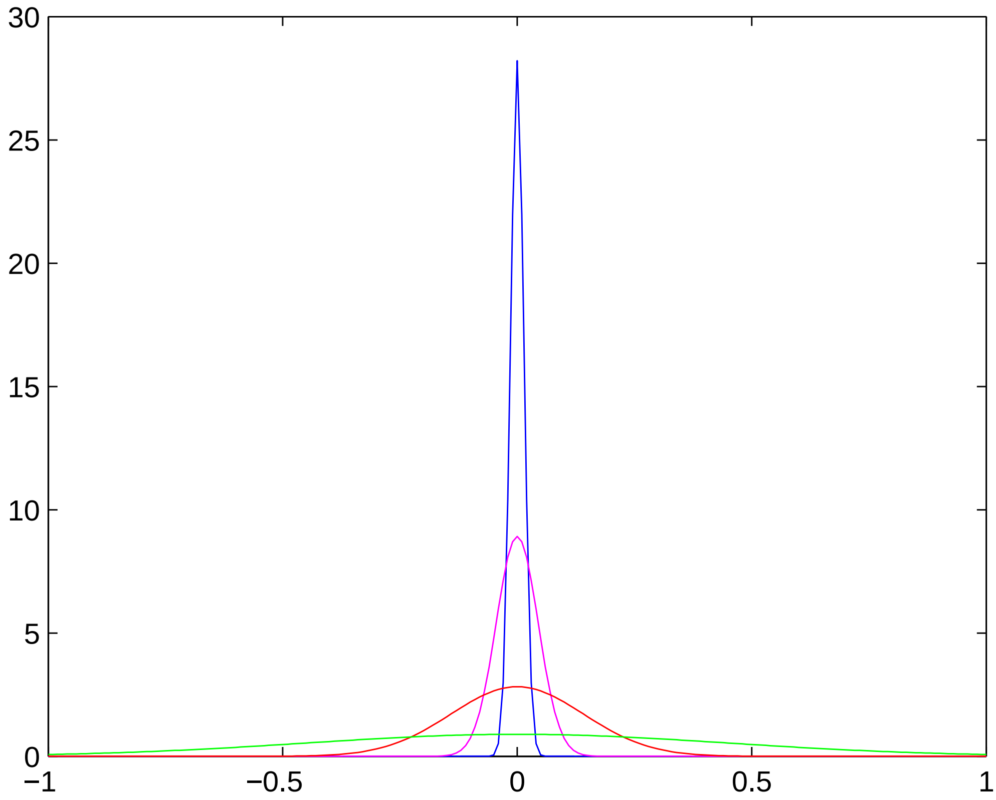
Perfiles de la solución fundamental:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

para:

$$t = 0{,}001, \qquad t = 0{,}01, \qquad \& \qquad t = 0{,}1$$

★ Velocidad de propagación ∞ de las perturbaciones.



Perfiles de la solución fundamental:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

$$t = 0{,}0001.$$

3. Propiedades de simetría.

Proposición 1. *Supóngase que $u(x,t)$ resuelve:*

$$u_t = u_{xx},$$

en $x \in \mathbb{R}, t > 0$. Entonces,

A) "Traslaciones & reflexiones":

$$v(x,t) = u(\pm x - y, t - \tau), \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}$$

solución en $x \in \mathbb{R}, t > \tau$.

B) "Cambio de escala":

$$u_\lambda(x,t) = u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t) \qquad \forall \lambda > 0,$$

solución de la ecuación del calor.

Ejemplo. La función:

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}},$$

también es solución en $t > \tau$.

4. Soluciones “autosemejantes”.

Son aquellas que permanecen invariantes frente a cambios de escala:

$$u(x,t) = u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t) \qquad \forall \lambda > 0,$$

$\forall x \in \mathbb{R}, t > 0$.

Ejemplo. Las funciones:

$$u(x,t) = \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \qquad \zeta = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

son autosemejantes.

Cuestión. ¿Quiénes son las soluciones autosemejantes de la ecuación del calor?

5. Problema de valor inicial. Se trata de:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R},\ \text{t>0} \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Se busca:

$$u(x,t) \in C^2[\mathbb{R} \times (0,\infty)],$$

tal que:

$$\lim_{(y,t)\to(x,0)} u(y,t) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definición 1. *Una solución clásica es aquella que cumple:*

$$u(x,t) \in C^2[\mathbb{R} \times (0,\infty)] \cap C[\mathbb{R} \times [0,\infty)].$$

Ha de ser $f \in C(\mathbb{R})$.

★ En muchos casos interesan datos f discontinuos. La función de Heaviside:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

6. Fórmula de Poisson.

Teorema 1. *Sea $f(x)$ una función acotada que es absolutamente Riemann–integrable en $\mathbb{R}$, se define:*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\, dy.$$

A) $u \in C^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+})$ satisface $u_t = u_{xx}$ en $t > 0$.

B) Si $f(x)$ es continua en x_0:

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = f(x_0).$$

C) Si además $f(x) \in C(\mathbb{R})$, $u(x,t)$ es la única solución clásica y acotada.

★ $u(x,t)$ es la solución de Poisson.

★ Se requiere un teorema de diferenciación de integrales.

7. Diferenciación de integrales. Se considera $K(x, t, y)$, $t > 0$ & $x, y \in \mathbb{R}$ tal que:

A) $\forall (x, t)$, $K(x, t, y)$ absolutamente Riemann integrable en $\mathbb{R}$ respecto de y.

B) $K(x, t, y)$ es C^1 respecto de (x, t) salvo quizás para un número finito de valores de y.

C) $\forall P_0 = (x_0, t_0)$, $\exists U$ entorno de P_0:

$$|K(x, t, y)| \leq f_1(y),$$

$$|K_x(x, t, y)| \leq f_2(y), \qquad |K_t(x, t, y)| \leq f_3(y),$$

$\forall y \in \mathbb{R}$, $f_i(y)$ absolutamente Riemann integrables en $\mathbb{R}$.

Se define:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t, y)\, dy.$$

Teorema 2. *La función* $u(x,t)$ *es de clase* C^1 *y:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K}{\partial x}(x,t,y)\ dy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K}{\partial t}(x,t,y)\ dy,$$

★ El teorema se extiende a C^k teniéndose:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^{\alpha}\partial t^{\beta}}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{\alpha+\beta} K}{\partial x^{\alpha}\partial t^{\beta}}(x,t,y)\ dy.$$

Estimaciones. Tomamos:

$$K(x,t,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}},$$

Para:

$$|x - x_0| < \delta \qquad |t - t_0| < \delta,$$

se tiene:

$$\frac{|x-y|^2}{4t} \geq \frac{|y|^2 - 2|x||y|}{4t} \geq \frac{|y|^2 - 2(|x_0| + \delta)|y|}{4(t_0 + \delta)}$$

luego:

$$K(x,t,y) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi(t_0 - \delta)}} e^{-\frac{|y|^2 - 2(|x_0|+\delta)|y|}{4(t_0+\delta)}} := f_1(y).$$

$$\boxed{f_1(y) = ae^{-b|y|^2 + c|y|}}$$

claramente absolutamente Riemann integrable en $\mathbb{R}$.

Las derivadas.

$$K_t = K_{xx} = \frac{t^{-3/2}}{4\sqrt{4\pi}}[t^{-1/2}(x-y)^2 - 2]e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}},$$

$$K_x = -\frac{t^{-3/2}}{2\sqrt{4\pi}}(x-y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}},$$

Por lo tanto:

$$|K_t| = |K_{xx}| \leq (a_1 + |y|^2)e^{-b|y|^2+c|y|},$$

$$|K_x| \leq (a_2 + |y|)e^{-b|y|^2+c|y|}.$$

Así:

$$\boxed{f_2(y) = (a_2 + |y|)e^{-b|y|^2+c|y|}}$$

y

$$\boxed{f_3(y) = (a_1 + |y|^2)e^{-b|y|^2+c|y|}.}$$

8. Conservación de la energía.

Teorema 3. *En las condiciones del teorema precedente se tiene que:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx,$$

para todo $t > 0$.

Teorema 4. *Para todo* $t > 0$

$$\inf_{\mathbb{R}} f \leq u(x,t) \leq \sup_{R} f \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

En particular:

$$f \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad u \geq 0.$$

9. La función de Heaviside como dato inicial.

El problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x,0) = \theta(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

tiene por solución a:

$$u(x,t) = \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

donde:

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Erf}\left(\frac{\zeta}{2}\right).$$

donde:

$$\mathrm{Erf}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\zeta} e^{-z^2}\, dz.$$

es la “función error”.