

# Ecuaciones Diferenciales II

José C. Sabina de Lis  
Universidad de La Laguna

29 de octubre de 2013



# Índice general

<b>PRÓLOGO</b>	<b>IV</b>
<b>1. Teoría cualitativa</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones autónomas . . . . .	1
1.1.1. Sistemas gradiente . . . . .	6
1.2. Ejercicios . . . . .	6
1.3. Clasificación de órbitas . . . . .	11
1.4. Órbitas de las ecuaciones lineales . . . . .	14
1.5. Demostraciones . . . . .	19
1.5.1. Ejercicios . . . . .	25
1.6. Puntos críticos . . . . .	27
1.6.1. Péndulo con fricción . . . . .	32
1.6.2. Especies en competición . . . . .	33
1.6.3. Presa y depredador . . . . .	33
1.6.4. Ejercicios . . . . .	34
1.7. Sistemas gradiente . . . . .	36
1.7.1. Ejercicios . . . . .	37
1.8. La ecuación orbital . . . . .	38
1.8.1. Ejercicios . . . . .	40
1.9. Sistemas hamiltonianos . . . . .	46
1.9.1. Sistemas conservativos unidimensionales . . . . .	47
1.9.2. Órbitas y conjuntos de nivel . . . . .	49
1.9.3. Interacciones presa y depredador . . . . .	51
1.9.4. Ejercicios . . . . .	52
1.9.5. Ejercicios adicionales . . . . .	53
1.10. Problema de dos cuerpos . . . . .	54
1.10.1. Ejercicios . . . . .	56
1.11. Curvas de Jordan . . . . .	57
<b>2. Problemas de contorno</b>	<b>61</b>
2.1. Ecuaciones lineales. Solución fundamental . . . . .	61
2.1.1. Solución de (2.2) . . . . .	62
2.1.2. Solución de (2.3) . . . . .	63
2.1.3. Ejercicios . . . . .	66

2.2. Problemas de contorno . . . . .	68
2.2.1. Algunas condiciones de contorno distinguidas . . . . .	69
2.2.2. Teorema de la alternativa . . . . .	70
2.2.3. Ejercicios . . . . .	74
2.2.4. La función de Green . . . . .	75
2.2.5. Ejercicios . . . . .	79
2.2.6. Problemas de contorno autoadjuntos . . . . .	81
2.2.7. Ejercicios . . . . .	84
2.2.8. Problemas de autovalores autoadjuntos . . . . .	86
2.2.9. Existencia de autovalores . . . . .	89
2.2.10. Ejercicios . . . . .	91
2.2.11. ceros de las soluciones . . . . .	94
2.2.12. Ejercicios . . . . .	97
2.2.13. El problema de autovalores en coordenadas polares . . . .	100
2.2.14. Autovalores y funciones de Green: teoría de operadores .	104
2.2.15. Completitud del sistema de autofunciones: series de Fourier.	106
2.2.16. Ejercicios . . . . .	130
<b>3. EDPS</b>	<b>133</b>
3.1. Ecuación de las ondas . . . . .	133
3.1.1. Unicidad . . . . .	133
3.1.2. Problemas de valor inicial y de contorno . . . . .	135
3.2. Ecuación del calor unidimensional . . . . .	138
3.2.1. Problema de valor inicial . . . . .	138
3.2.2. Ejercicios . . . . .	142
3.2.3. Problema de valor inicial y de contorno . . . . .	144
3.2.4. Solución del problema de Dirichlet por separación de variables . . . . .	145
3.2.5. Solución del problema de Neumann por separación de variables . . . . .	146
3.2.6. Ejercicios . . . . .	146
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>149</b>

# Prólogo

Las presentes notas constituyen la versión electrónica del curso: “Ecuaciones Diferenciales II”, del 3<sup>er</sup> curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de La Laguna. Originalmente, los documentos se colocaron en la página web de la asignatura.

La Laguna, 29 de octubre de 2013.



# Capítulo 1

## Introducción a la teoría cualitativa

### 1.1. Ecuaciones autónomas

Una ecuación en la que el “tiempo”  $t$  no aparece explícitamente en el segundo miembro se llama *autónoma*. Con más precisión:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

abreviadamente,

$$x' = f(x). \tag{1.1}$$

A lo largo del capítulo se supone que la aplicación:

$$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

donde  $G$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , es de clase  $C^1$ .

Se trabajará principalmente con el caso  $n = 2$  donde

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Siguen ejemplos de estas ecuaciones:

*Ejemplo 1.1.* Sistemas lineales:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

con los  $a_{ij}$  constantes.

*Ejemplo 1.2.* Sistema presa–depredador:

$$\begin{cases} x' = x(1 - y) \\ y' = \lambda y(x - 1), \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$  es un parámetro.

*Ejemplo 1.3.* Sistema de dos especies en competición:

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \frac{y}{\beta}) \\ y' = \lambda y(1 - \frac{x}{\alpha} - y), \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$  es un parámetro,  $\alpha, \beta > 0$  constantes positivas.

*Ejemplo 1.4.* Ecuación del péndulo con fricción.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x - \lambda y, \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$  es un parámetro.

*Ejemplo 1.5.* Movimiento de un planeta alrededor del sol:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\mu \frac{x_1}{\rho^3} \\ \ddot{x}_2 = -\mu \frac{x_2}{\rho^3} \end{cases} \quad \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

donde  $\mu = GM$ ,  $G$  la constante de gravitación,  $M$  la masa del sol.

Volviendo al caso  $n$ -dimensional, que  $f$  sea de clase  $C^1$  implica que para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $x_0 \in G$  el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (1.2)$$

admite una única solución maximal  $(x, I)$ , donde  $I = (\alpha, \omega)$  representa al intervalo maximal de existencia de la solución  $x(t)$ . Cuando se hace necesario hacer referencia a las condiciones iniciales, la solución de (1.2) se representa como

$$x = x(t, t_0, x_0).$$

Se puede demostrar que el dominio de definición  $\Theta$  de la función  $x(t, t_0, x_0)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^{n+2}$ , siendo  $x(t, t_0, x_0)$  una función  $C^1$  en todas sus variables. Se denomina a  $x(t, t_0, x_0)$  la *solución general* de la ecuación.

**Teorema 1.1** (1ª Propiedad de traslación de fase). *Si  $x = x(t)$  es una solución maximal de (1.1) definida en  $(\alpha, \omega)$  entonces  $\forall \tau \in \mathbb{R}$ ,  $y(t) = x(t + \tau)$  también es una solución maximal definida en  $(\alpha - \tau, \omega - \tau)$ .*



Cuando el tiempo inicial es  $t_0 = 0$  la solución general de (1.2) se escribe abreviadamente:

$$x = \varphi(t, x_0).$$

Es decir, por definición  $\varphi(t, x_0) = x(t, 0, x_0)$ .

**Corolario 1.2.** *Con la notación precedente, la solución general de (1.2) se representa como:*

$$x(t, t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, x_0).$$

*Ejemplo 1.6.* La solución de  $x' = x$ ,  $x(t_0) = x_0$  es

$$x(t) = x_0 e^{(t-t_0)}.$$

**Definición 1.3.** *Se llama flujo asociado a (1.1) a la función  $\varphi(t, x_0) = x(t, x_0)$ .*

**Teorema 1.4** (2ª Propiedad de traslación de fase). *Sea  $\varphi$  el flujo asociado a la ecuación  $x' = f(x)$ . Entonces:*

$$\varphi(t, \varphi(s, x_0)) = \varphi(t + s, x_0).$$

En el caso de la ecuación lineal

$$x' = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

el flujo adopta la forma explícita:

$$\varphi(t, x) = e^{tA}x,$$

donde  $e^A$  representa la matriz exponencial.

*Observación 1.7.* Una parametrización  $C^1$  –un “camino”– regular es toda aplicación  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  que cumple  $\phi'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ . Una curva  $\gamma$  de clase  $C^1$  es el conjunto imagen  $\gamma = \phi(I)$  de una parametrización  $C^1$ . Si  $x_1 = \phi(t_1)$  es un punto de la curva entonces  $v = \phi'(t_1)$  define un vector tangente a  $\gamma$  en  $x_1$ . Más adelante hablaremos de curvas cerradas.

Ejemplo:

$$\phi(t) = (\cos t, \sin t), \quad I = \mathbb{R}, \quad \gamma \equiv \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Las órbitas son las curvas parametrizadas por las soluciones.

**Definición 1.5.** *Una órbita  $\gamma$  de la ecuación (1.1) es el conjunto  $\gamma = \{x(t) : t \in (\alpha, \omega), x(t) \text{ solución de (1.1)}\}$ , es decir, toda curva parametrizada por una solución.*

- *La órbita de la solución que pasa por  $x_0$  en el instante  $t_0$  es*

$$\gamma(x_0, t_0) = \{x(t, t_0, x_0) : t \in (\alpha, \omega)\}$$

- La órbita a la derecha de la solución que pasa por  $x_0$  en el instante  $t_0$  es

$$\gamma^+(x_0, t_0) = \{x(t, t_0, x_0) : t \in [t_0, \omega)\}$$

- La correspondiente semiórbita a la izquierda es

$$\gamma^-(x_0, t_0) = \{x(t, t_0, x_0) : t \in (\alpha, t_0]\}.$$

Las órbitas y semiórbitas que pasan por  $x_0$  no dependen en realidad del instante inicial  $t_0$ , por eso  $t_0$  puede suprimirse en las notaciones.

**Teorema 1.6.** *Por cada punto  $x_0 \in G$  sólo pasa una órbita  $\gamma$  (respectivamente, una semiórbita  $\gamma^\pm$ ) de (1.1). Se designarán por  $\gamma(x_0)$  (r.  $\gamma^\pm(x_0)$ ). Además, si dos soluciones  $x(t)$  e  $y(t)$  generan la misma órbita entonces existe  $\tau \in \mathbb{R}$  tal que  $y(t) = x(t + \tau)$ .*

*Observación 1.8.* No se debe confundir la solución  $x(t)$  que pasa por  $x_0$  en  $t_0$  (una función) con su órbita  $\gamma$  (un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ ). El teorema sugiere la posibilidad de reemplazar “las soluciones que toman en algún momento el valor  $x_0$ ” por la órbita  $\gamma$  que pasa por  $x_0$ . Esta estrategia resulta fundamental para resolver algunos problemas de tratamiento analítico muy complicado. Por ejemplo, la existencia y estabilidad de soluciones periódicas de (1.1).

**Definición 1.7.** *El conjunto de todas las órbitas de la ecuación (1.1) se denomina el espacio de fases.*

*Observación 1.9.* El objetivo de la teoría cualitativa es el estudio y descripción del espacio de fases de (1.1), con especial énfasis en la influencia que ejerce una clase singular de órbitas sobre el comportamiento asintótico ( $t \rightarrow \pm\infty$ ) del resto de las órbitas.

*Ejemplos 1.10.* Analícense todas las órbitas de las ecuaciones siguientes.

1.  $x' = x$
2.  $x' = x(1 - x)$
3.  $x' = x(1 - x)(2 - x)$
4. Las órbitas de la ecuación  $C^1$ ,  $x' = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  son meramente intervalos abiertos de la recta real, salvo las soluciones estacionarias cuyas órbitas son puntos.
5.  $x' = x(1 - x)$ ,  $y' = -y$ . Las órbitas que no son puntos críticos o tramos de segmentos rectilíneos en los ejes son

$$y = y_0 \frac{x_0}{x_0 - 1} \frac{x - 1}{x}.$$

En efecto, la solución de  $y' = -y$ ,  $y(0) = y_0$  es  $y(t) = y_0 e^{-t}$  mientras que la de  $x' = x(1 - x)$  con  $x(0) = x_0$  cumple:

$$\frac{1 - x}{x} = \frac{1 - x_0}{x_0} e^{-t}.$$

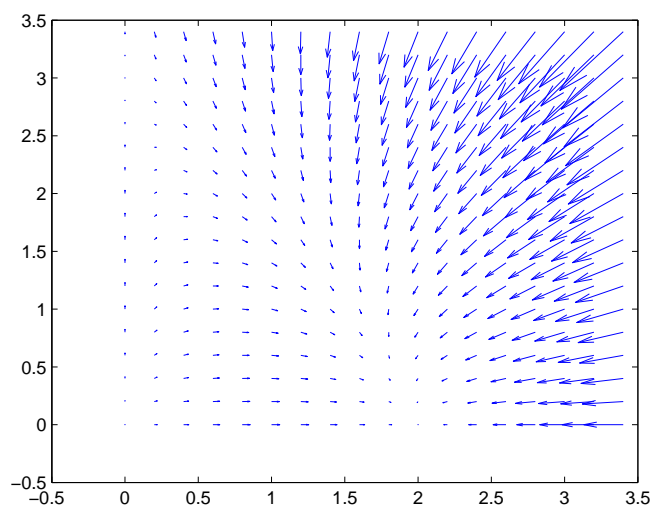


Figura 1.1: Campo de direcciones de la ecuación (1.3).

6.  $x' = y$ ,  $y' = -x$ . Las órbitas son  $x^2 + y^2 = r^2$ .

En las aplicaciones el segundo miembro de la ecuación (1.1) se denomina un *campo vectorial*.

**Definición 1.8.** Un “campo vectorial” (de clase  $C^1$ ) definido en un abierto  $G$  de  $\mathbb{R}^n$  es una aplicación (de clase  $C^1$ )  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

En muchos contextos las órbitas de (1.1) se denominan las “líneas del campo”. En mecánica de fluidos  $f(x)$  representa el campo de velocidades del fluido. Las órbitas se denominan las “líneas de corriente” (‘stream lines’).

En el caso de ecuaciones en el plano, el segundo miembro  $(f_1, f_2)$  se denomina el **campo de direcciones** de la ecuación. Saber trazar el campo de direcciones de una ecuación en el plano tiene interés para describir el comportamiento de sus soluciones (refrescar el método de las isoclinas).

En la Figura 1.1 se representa el campo de direcciones de la ecuación:

$$\begin{cases} x' = x(8 - 4x - y) \\ y' = y(3 - 3x - y). \end{cases} \quad (1.3)$$

Se ha trazado sobre una malla en el cuadrado  $[0, 3,5] \times [0, 3,5]$  en puntos uniformemente espaciados a una distancia  $h_1 = h_2 = 0,5$  en las direcciones de los ejes. Se ha empleado el paquete `quiver` de `Matlab` con magnificación 2,5.

### 1.1.1. Funciones que generan ecuaciones: sistemas gradiente, sistemas hamiltonianos

Una función  $\phi$  de clase  $C^1$  en un dominio  $G$  del plano genera la ecuación

$$\begin{cases} x' = -\phi_x \\ y' = -\phi_y, \end{cases}$$

donde  $\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ ,  $\phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ . Se la conoce como el sistema gradiente asociado a  $\phi$ . También se dice que  $\phi$  es el potencial de velocidades de la ecuación. Según veremos, las soluciones hacen a  $\phi$  decreciente (las soluciones “gastan”  $\phi$ ).

Análogamente, la ecuación

$$\begin{cases} x' = \phi_y \\ y' = -\phi_x, \end{cases}$$

define un sistema hamiltoniano en el que  $\phi$  es la función hamiltoniana. En este caso “ $\phi$ ” se conserva sobre las soluciones.

Tomemos por ejemplo  $\phi = -x^2/2 - y^2/2$ , los sistemas gradiente y hamiltoniano asociados son:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y, \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases}$$

El comando `gradient` de `Matalab` permite trazar el campo gradiente. Los comandos `surf`, `contour` permiten trazar la superficie y sus curvas de nivel. Usándolos vamos a introducir un ejemplo más vistoso. Se trata de la función:

$$\phi = xe^{-x^2/2 - y^2/2}.$$

La superficie  $z = \phi(x, y)$  se representa en la Figura 1.2 sobre una malla del intervalo  $(-2, 2) \times (-2, 2)$ .

El campo de direcciones del sistema gradiente asociado  $x' = -\phi_x$ ,  $y' = -\phi_y$  se traza sobre las curvas de nivel de  $\phi$  en la Figura 1.3.

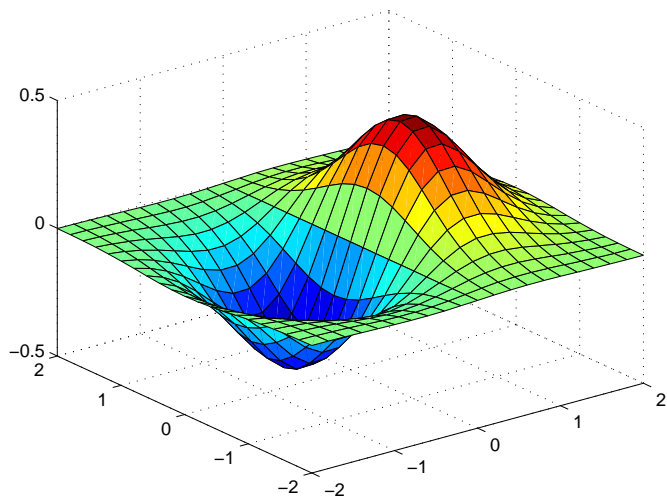
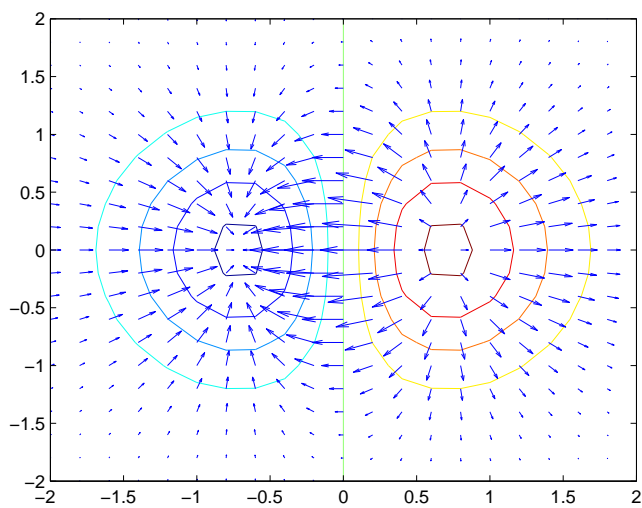
El campo de direcciones de la ecuación hamiltoniana  $x' = \phi_y$ ,  $y' = -\phi_x$  se muestra en la Figura 1.4, y en la Figura 1.5, en éste último caso, superpuesto a las curvas de nivel de  $\phi$ . Nótese que las líneas de nivel son las órbitas de la ecuación.

## 1.2. Ejercicios

1. Hallar el flujo  $\varphi(t, x)$  de cada una de las siguientes ecuaciones:

a)  $x' = x^2$

b)  $x' = x(1 - x)$

Figura 1.2: Superficie  $z = \phi(x, y)$ Figura 1.3: Campo de direcciones de  $x' = -\phi_x$ ,  $y' = -\phi_y$

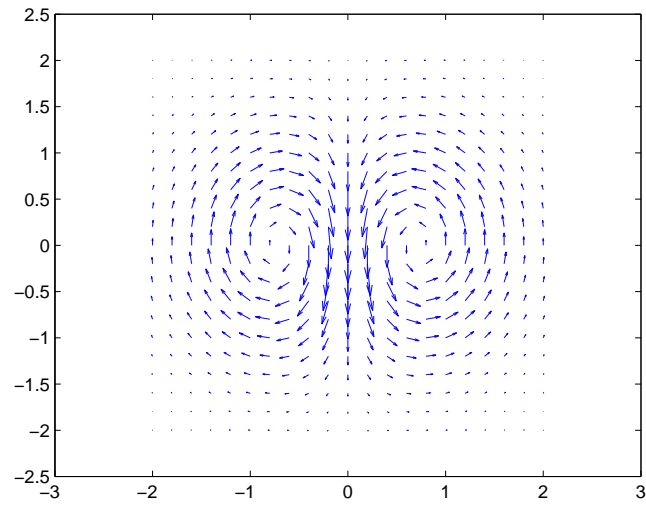


Figura 1.4: Campo de direcciones de  $x' = \phi_y$ ,  $y' = -\phi_x$

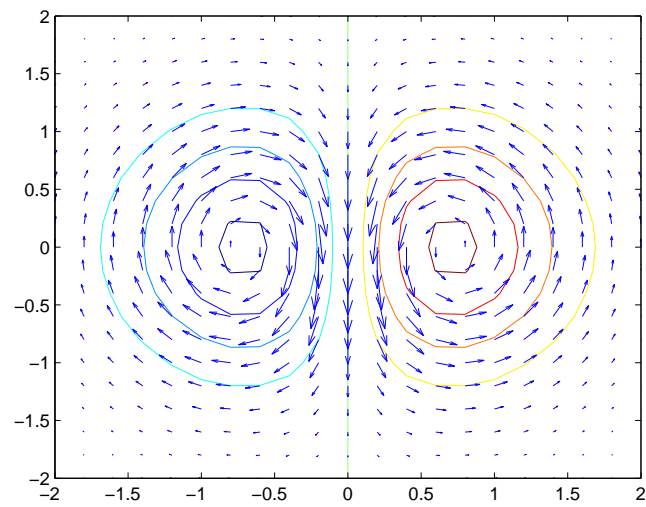


Figura 1.5: Campo de direcciones de  $x' = \phi_y$ ,  $y' = -\phi_x$  sobre las curvas de nivel de  $\phi$

c)  $x' = x^2 + 1$ .

2. Hallar el flujo  $\varphi(t, x)$  de los siguientes sistemas:

a)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x' = x(1-x) \\ y' = -y. \end{cases}$$

3. Hallar todas las órbitas de las ecuaciones del ejercicio 1.

4. Hallar todas las órbitas de las ecuaciones del ejercicio 2.

5. Trazar el campo de direcciones de las ecuaciones del ejercicio 2.

## Anexo: propiedades del flujo

En el siguiente resultado se supone por simplicidad que todas las soluciones de  $x' = f(x)$  están definidas en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.9.** *Supongamos que todas las soluciones de (1.1) están definidas en  $\mathbb{R}$ . Entonces la aplicación flujo*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times G &\longrightarrow G \\ (t, x_0) &\longmapsto \varphi(t, x_0) = x(t, x_0) \end{aligned}$$

satisface las siguientes propiedades:

- a)  $\varphi(t, x_0)$  es  $C^1$  y verifica  $\varphi(0, z) = z$ , para  $z \in G$ .
- b)  $\varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0)) = \varphi(t_1 + t_2, x_0)$ , para  $x_0 \in G$  y  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  arbitrarios.
- c) Para cada  $t$ ,  $\varphi_t(x) := \varphi(t, x)$  es una aplicación  $C^1$  y biyectiva de  $G$  en  $G$  con inversa  $C^1$ :

$$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}.$$

*Demostración.* Las propiedades son consecuencia de la definición.  $\varphi_t : G \rightarrow G$  es inyectiva y sobreyectiva pues dado  $y$  en  $G$ :

$$y = \varphi_t(x), \quad x = \varphi_{-t}(y).$$

□

*Observación 1.11.* Las aplicaciones biyectivas en  $C^1(G, \mathbb{R}^n)$  con imagen  $G$  e inversa  $C^1$  se llaman los difeomorfismos de  $G$ , escrito  $\text{Dif}(G)$ .

Según el teorema precedente, el flujo  $\varphi(t, \cdot)$  induce un grupo uniparamétrico  $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \text{Dif}(G)$  para la composición “o”:

$$\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}.$$

En el caso de la ecuación lineal

$$x' = Ax$$

este hecho es consecuencia inmediata de la representación explícita:  $\varphi_t = e^{tA}$ .



### 1.3. Clasificación de órbitas. Órbitas de una ecuación en el plano

Para ecuaciones  $x' = f(x)$  escalares ( $f$  es una función  $C^1$  definida en un intervalo de  $\mathbb{R}$  o en todo  $\mathbb{R}$ ) las órbitas son triviales. De hecho una órbita  $\gamma$  ha de ser  $\gamma = x(I)$ , donde  $x(t)$  es una solución maximal definida en  $I = (\alpha, \beta)$ . Por tanto  $\gamma$  ha de ser un intervalo que en algún caso podría reducirse a un punto. Esto se precisa mejor ahora.

**Teorema 1.10.** *Las órbitas de la ecuación escalar  $x' = f(x)$  son, o bien puntos  $\gamma = \{c\}$  o bien intervalos  $\gamma = (a, b)$ . En éste último caso  $f \neq 0$  en  $(a, b)$  y  $f$  se anula en los extremos si éstos pertenecen al dominio de la función.*

*Demostración.* Si  $x(t) = c$ ,  $c$  constante entonces el dominio de la solución es  $I = \mathbb{R}$  y la órbita es  $\gamma = \{c\}$ .

Si la solución  $x(t)$  no es constante entonces  $x'(t) \neq 0$  para todo  $t \in (\alpha, \omega)$ , pues si fuese  $x'(t_1) = 0$  y  $c_1 = x(t_1)$  entonces  $x_1(t) = c_1$  sería otra solución que coincidiría con  $x(t)$  en  $t_1$  y por unicidad  $x(t) = c_1$  para todo  $t$  que va contra el supuesto de que  $x(t)$  no es constante. Ahora si  $x'(t)$  es no nula entonces  $x(t)$  es creciente o decreciente, en cualquier caso un homeomorfismo, de lo que resulta que

$$\gamma = x((\alpha, \omega)) = (a, b).$$

Suponiendo, v. g. que  $x(t)$  es creciente resulta que  $\lim_{t \rightarrow \omega} x(t) = b$ ,  $\lim_{t \rightarrow \alpha} x(t) = a$ . Falta concluir que  $f(a)$  y  $f(b)$  son cero si  $a$  y  $b$  son finitos (y  $f$  está definida en esos puntos).

En efecto, si  $b$  es finito, un teorema de prolongabilidad afirma que  $\omega = \infty$ . Por tanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = b.$$

Un resultado general afirma entonces que  $f(b) = 0$ . Vamos a dar una prueba. Si  $x(t) \rightarrow b$  entonces  $x'(t) \rightarrow f(b)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En particular,

$$x'(t_n) \rightarrow f(b)$$

para toda  $t_n \rightarrow \infty$ . Ahora  $x(n+1) - x(n) = x'(t_n)$  para algún  $n < t_n < n+1$ . Así, cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $t_n \rightarrow \infty \Rightarrow$ :

$$x'(t_n) = x(n+1) - x(n) \rightarrow b - b = 0 \quad \Rightarrow \quad f(b) = 0.$$

□

Ya hemos hablado de parametrizaciones y de curvas  $C^1$ . Se dice que una curva  $\gamma$  es *cerrada* si admite una parametrización  $C^1$ ,  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I = [a, b]$ , tal que  $\phi(a) = \phi(b)$  y  $\phi'(a) = \phi'(b)$ <sup>1</sup>. Si  $\phi$  es además *inyectiva* (“uno-a-uno”) en el

<sup>1</sup>Si  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización  $C^1$  tal que  $\phi(a) = \phi(b)$  pero que cumple  $\phi'(a) = \lambda \phi'(b)$  para algún  $\lambda > 0$ , se puede probar que existe un cambio de variable  $t = h(s)$  que convierte a  $\phi$  en una parametrización cerrada de clase  $C^1$ .

intervalo  $[a, b]$  se dice entonces que  $\gamma$  es una *curva de Jordan*, en este caso de clase  $C^1$ .

Como ejemplo,  $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $I = [0, 2\pi]$ .

Cuando  $\phi$  es una parametrización cerrada de clase  $C^1$ ,  $\phi$  admite una extensión  $C^1$  a  $\mathbb{R}$  de periodo  $T = b - a$ .

Se enuncian dos resultados preliminares sobre funciones y soluciones periódicas.

**Lema 1.11.** *Sea  $x(t)$  una solución de la ecuación  $x' = f(x)$ , donde  $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 2$ . Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- i)  $x(t)$  es periódica.
- ii)  $\exists T > 0 \in \mathbb{R}$  tal que  $x(0) = x(T)$ .
- iii) Existen valores distintos  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $x(t_1) = x(t_2)$

*Demostración.* La cadena i)  $\Rightarrow$  ii)  $\Rightarrow$  iii) es evidente.

iii)  $\Rightarrow$  i). Si  $x(t)$  es solución de (1.1) con dominio  $(\alpha, \omega)$  y  $x(t_1) = x(t_2)$  entonces  $x(t_1) = x(t_1 + T)$  donde  $T = t_2 - t_1$ . Como  $x(t)$  e  $y(t) = x(t + T)$  son soluciones de  $x' = f(x)$  con el mismo dato inicial en  $t = t_1$  entonces son iguales. Esto significa que sus dominios  $(\alpha, \omega)$  y  $(\alpha - T, \omega - T)$  coinciden y por tanto han de ser  $\mathbb{R}$ . Además  $x(t) = x(t + T)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

En el curso de la demostración se ha probado lo siguiente.

**Corolario 1.12.** *Si  $x(t)$  es una solución que cumple iii), es decir, existen valores distintos  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $x(t_1) = x(t_2)$  entonces  $x(t)$  es eperiódica de periodo  $T = t_2 - t_1$ .*

Es fácil comprobar que si  $x(t)$  es periódica de periodo  $T > 0$  entonces también es periódica con periodo  $kT$  con  $k \in \mathbb{Z}$  cualquiera. Esto lleva a preguntarse cuál es el periodo positivo más pequeño de una función periódica.

**Definición 1.13.** *Se dice que  $T > 0$  es el periodo mínimo de una función periódica  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  si  $T$  es un periodo y  $x(t)$  no es periódica con periodo  $T_1 > 0$  menor que  $T$ .*

**Lema 1.14.** *Sea  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua, periódica y no constante. Entonces  $x(t)$  posee un periodo mínimo  $T > 0$  y todos los otros posibles periodos de la función son de la forma  $kT$  donde  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Si  $\mathcal{T}$  es el conjunto de periodos de  $x(t)$  resulta que  $\mathcal{T}$  es un grupo cerrado para la suma  $+$ .

Definamos  $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T} \cap (0, \infty)$  junto con  $T := \inf \mathcal{T}^+$ . Entonces, o bien  $T > 0$  o bien  $T = 0$ .

Si  $T = 0$  existe  $T_n > 0$  una sucesión de periodos tal que  $T_n \rightarrow 0$ . Dado  $t \in \mathbb{R}$  para todo  $n$  existe  $k = k(n)$  tal que:

$$kT_n \leq t < (k+1)T_n \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t - kT_n) \rightarrow x(0)$$

cuando  $n \rightarrow \infty$  pues  $0 \leq t - kT_n < T_n$  para todo  $n$ . Luego  $x(t) = x(0)$  para todo  $t$  y  $x(t)$  es constante lo cual no es posible. Por tanto  $T > 0$ .

Afirmamos que  $T$  es el periodo mínimo y que  $\mathcal{T} = \{kT : k \in \mathbb{Z}\}$ . En efecto, si  $T_1$  es otro periodo y no es múltiplo de  $T$  resulta

$$kT < T_1 < (k+1)T,$$

para algún entero  $k$ . De aquí se deduce que  $T_1 - kT$  es un periodo positivo estrictamente menor que  $T$  lo cual es imposible. Esto prueba la afirmación.  $\square$

**Teorema 1.15.** *Sea  $x = x(t)$  una solución de (1.1) con  $n \geq 2$ . Entonces se da una y sólo una de las siguientes opciones,*

- a) *O bien,  $x(t_1) \neq x(t_2)$  para  $t_1 \neq t_2$  (en este caso la órbita  $\gamma$  generada por  $x(t)$  se dice abierta),*
- b) *O bien existe  $T > 0$  tal que  $x(t+T) = x(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y además  $x(t_1) \neq x(t_2)$  para  $0 \leq t_1 < t_2 < T$  (en este caso  $T$  es el periodo mínimo y la órbita  $\gamma$  es una curva de Jordan),*
- c) *O bien  $x(t) = x_0$  para todo  $t$  (en este caso se dice que  $x_0$  -la órbita- es un punto crítico).*

*Observaciones 1.12.*

- a)  $x_0$  es un punto crítico de (1.1) si y sólo si  $f(x_0) = 0$ .
- b) El recíproco la afirmación b) cierto. Es decir, si la órbita de una solución es una curva de Jordan, entonces la solución que la genera es una función periódica no trivial (Teorema 1.21).
- c) Algunas órbitas abiertas empiezan ( $t = -\infty$ ) o terminan ( $t = \infty$ ) en puntos críticos (Teorema 1.19).

*Demostración del Teorema 1.15.* Si  $x(t)$  es una solución caben dos opciones:

- i)  $x(t)$  inyectiva,
- ii)  $x(t)$  no inyectiva.

En el primer caso se cumple a).

En el segundo hay dos opciones:  $x(t)$  constante que es el caso c) o bien  $x(t)$  no es constante. Comprobamos que entonces estamos en el caso b).

En efecto, han de existir  $t_1 < t_2$  tales que  $x(t_1) = x(t_2)$  luego  $x(t) = x(t + (t_2 - t_1))$  para todo  $t$ . Es decir,  $T_1 := t_2 - t_1$  es un periodo. Como  $x(t)$  no es constante entonces (Lema 1.14) admite un periodo mínimo  $T > 0$ . En ese caso  $x(t)$  es inyectiva en  $[0, T)$  porque si  $x(t'_1) = x(t'_2)$ ,  $t'_1, t'_2 \in [0, T)$ ,  $t'_1 < t'_2$ , resultaría que  $T' = t'_2 - t'_1$  es un periodo menor que  $T$  lo cual no es posible. Esto prueba b).  $\square$

## 1.4. Órbitas de las ecuaciones lineales

Consideramos ahora la ecuación lineal plana

$$x' = Ax \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1.4)$$

( $A$  es una matriz *real*) bajo la hipótesis  $\det A \neq 0$ . Se dice entonces que la ecuación lineal es “no degenerada”. Designamos por  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  los autovalores de  $A$ , por  $V_1$  y  $V_2$  los correspondientes autoespacios. Recuérdese que dichos autovalores son las raíces de:

$$\lambda^2 - (\text{traza } A)\lambda - \det A = 0,$$

donde  $\text{traza } A = a_{11} + a_{22}$ .

Se presenta a continuación una descripción detallada de las órbitas de la ecuación. Por ejemplo, en el teorema que sigue, las órbitas cerradas son elipses. Sin embargo se da la información en la terminología del caso no lineal (donde no se precisa la forma exacta de las órbitas).

**Teorema 1.16.** *Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  complejos conjugados,  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ,  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ ,  $\beta > 0$  de  $A$ . Entonces caben tres posibilidades:*

- i)  $\alpha < 0$ . Todas las soluciones no nulas  $x(t)$  de (1.4) tienden al punto crítico  $(0, 0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y a  $+\infty$  en módulo cuando  $t \rightarrow -\infty$ , rotando infinitas veces alrededor de  $(0, 0)$  (Figura 1.6).*
- ii)  $\alpha > 0$ . Todas las soluciones no nulas  $x(t)$  de (1.4) tienden al punto crítico  $(0, 0)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  y a  $+\infty$  en módulo cuando  $t \rightarrow +\infty$ , rotando infinitas veces alrededor de  $(0, 0)$ .*
- iii)  $\alpha = 0$ . Todas las soluciones  $x(t)$  son periódicas de periodo  $2\pi/\beta$  y rotan infinitas veces alrededor de  $(0, 0)$  (Figura 1.7).*

*En el caso i) se dice que el punto crítico  $(0, 0)$  es un foco estable y todas las órbitas distintas de  $(0, 0)$  describen espirales que se acercan a él cuando  $t \rightarrow \infty$ . En el segundo caso se dice que  $(0, 0)$  es un foco inestable y todas las otras órbitas describen espirales que se alejan de él cuando  $t \rightarrow \infty$ . En el caso iii) se dice que el punto  $(0, 0)$  es un centro lineal y las restantes órbitas son curvas cerradas que giran alrededor suyo.*

*Observación 1.13.* La condición necesaria y suficiente para que  $(0, 0)$  sea un foco es:

$$(\text{traza } A)^2 - 4\det A < 0 \quad \& \quad \text{traza } A \neq 0. \quad (1.5)$$

Si  $\text{traza } A > 0$  el foco es inestable, si  $\text{traza } A < 0$  el foco es estable. Nótese que la condición  $\det A > 0$  está implícita en (1.5).

El punto  $(0, 0)$  es un centro si y sólo si:

$$\det A > 0 \quad \& \quad \text{traza } A = 0.$$



Figura 1.6: Foco inestable (izquierda) y foco estable (derecha) de la ecuación lineal  $x' = Ax$ .

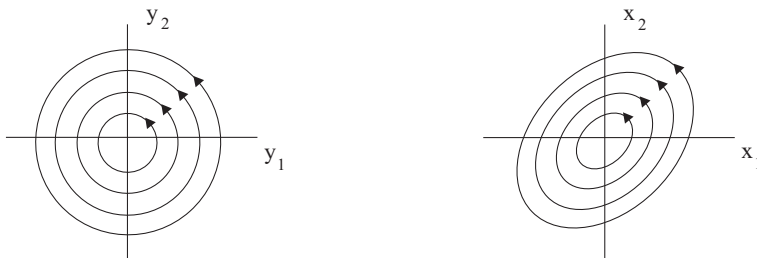


Figura 1.7: El origen  $(0, 0)$  es un centro de  $x' = Ax$ . A la izquierda se representan las órbitas de la ecuación transformada  $y' = Jy$ ,  $J$  la forma canónica real de  $A$ , que son además circunferencias.

*Ejemplos 1.14.*

a) Foco estable.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -10 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Centro.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

*Observación 1.15.* En el caso de autovalores complejos  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ,  $\beta > 0$ , se observa que las órbitas de  $y' = J_R y$  rotan en sentido negativo con velocidad angular  $\beta$ . Al aplicar la transformación  $x = P^{-1}y$  para regresar a la ecuación original, el sentido de rotación se mantiene si  $\det P > 0$  y se invierte si  $\det P < 0$ . Obsérvese la situación de los sistemas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En ambos casos los autovalores son  $\lambda = 1 \pm i$ . En el primero la rotación es a favor de las agujas del reloj, en el segundo al contrario.

**Teorema 1.17.** Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales y distintos de  $A$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Se tienen los siguientes casos:

- a) Si  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  y  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , las únicas semiórbitas positivas acotadas cuando  $t \rightarrow +\infty$ , que además tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  son  $(0,0)$  y las dos semirrectas de  $V_1 \setminus \{(0,0)\}$ . Análogamente las únicas semiórbitas negativas acotadas cuando  $t \rightarrow -\infty$ , que tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  son  $(0,0)$  y las dos semirrectas de  $V_2 \setminus \{(0,0)\}$ . En este caso se dice que el punto crítico  $(0,0)$  es un punto de silla (Figura 1.8).
- b)  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ . Si  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  todas las órbitas convergen a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Exceptuando las órbitas en  $V_2$  todas las restantes órbitas se acercan a  $(0,0)$  de forma tangente a  $V_1$ . En este caso se dice que el punto crítico  $(0,0)$  es un nodo estable. Si  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$  la situación es análoga cambiando  $t$  por  $-t$  y  $(0,0)$  se llama entonces nodo inestable (Figura 1.8).

*Observaciones 1.16.*

a) Una condición necesaria y suficiente para que  $(0,0)$  sea un punto de silla es que:

$$\det A < 0.$$

b) Una condición necesaria y suficiente para que  $(0,0)$  sea un nodo es que:

$$\det A > 0 \quad \& \quad (\text{traza } A)^2 - 4\det A > 0.$$

Si traza  $A > 0$  el nodo es inestable, si traza  $A < 0$  el nodo es estable.

*Ejemplo 1.17.*

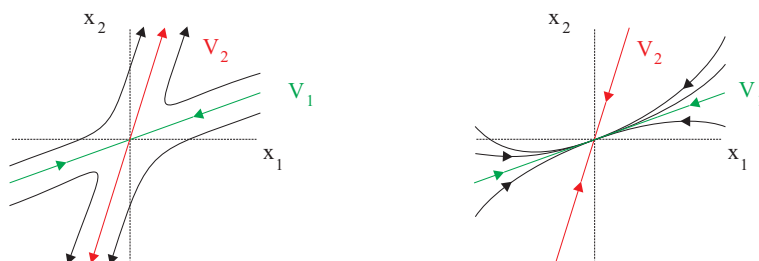


Figura 1.8: A la izquierda,  $(0,0)$  es un punto de silla. A la derecha,  $(0,0)$  es un nodo estable.

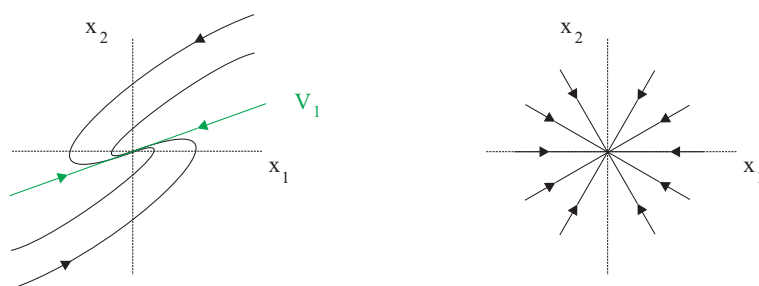


Figura 1.9: Las dos configuraciones de nodo impropio.

a) Punto de silla.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Nodo estable.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Teorema 1.18.** *Supongamos que  $\lambda_1$  es un autovalor doble y negativo de la matriz  $A$ .*

a) *Si  $\dim V_1 = 2$  entonces todas las órbitas son semirectas que convergen a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  (Figura 1.9).*

b) *Si  $\dim V_1 = 1$  entonces todas las órbitas de (1.4) convergen a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  acercándose a dicho punto de manera tangente a  $V_1$  (Figura 1.9).*

*En ambos casos se dice que el punto crítico  $(0,0)$  es un nodo impropio estable. Si  $\lambda_1$  es positivo, la situación es la misma una vez se ha cambiado  $t$  por  $-t$  y se dice que  $(0,0)$  es un nodo impropio inestable.*

**Observación 1.18.** Una condición necesaria y suficiente para que  $(0,0)$  sea un nodo impropio es:

$$(\text{traza } A)^2 - 4\det A = 0.$$

Las dos configuraciones de nodo se diferencian en la multiplicidad geométrica: la configuración en estrella corresponde a  $\gamma = 2$ . Nótese que en ese caso la matriz  $A$  tiene necesariamente la forma  $\lambda_1 I$ .

*Ejemplo 1.19.*

a) Nodo impropio estable.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



## 1.5. Demostraciones

*Demostración del Teorema 1.16.* Dado  $x_0$  la órbita  $\gamma$  que pasa por el punto  $x_0$  es

$$\gamma = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

donde  $x(t)$  es la solución de:

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Nótese que

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}.$$

Para simplificar el estudio de  $\gamma$  introducimos el cambio lineal

$$x = P^{-1}y$$

donde  $P$  es una matriz invertible de inversa  $P^{-1}$ . El cambio transforma la órbita  $\gamma$  en la curva:

$$\gamma' = \{y(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

donde  $y(t) = Px(t)$ , la solución de

$$\begin{cases} y' = Jy \\ y(0) = y_0 = Px_0. \end{cases}$$

Eligiendo  $P$  adecuadamente, como se dice más adelante,  $J$  tiene la forma:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

y la solución  $y(t)$  es

$$y(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sen \beta t \\ -\sen \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix} \quad y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix}.$$

La solución representa un giro de ángulo  $\beta t$  (velocidad angular  $\beta$ ) seguido del producto por el escalar  $e^{\alpha t}$ .

Como:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha t} (y_{01} \cos \beta t + y_{02} \sen \beta t) \\ y_2 &= e^{\alpha t} (-y_{01} \sen \beta t + y_{02} \cos \beta t) \end{aligned}$$

resulta que

$$\sqrt{y_1^2 + y_2^2} = e^{\alpha t} \sqrt{y_{01}^2 + y_{02}^2}.$$

Si  $\alpha < 0$ :

$$|y(t)| \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty \quad |y(t)| \rightarrow \infty \text{ si } t \rightarrow -\infty,$$

girando infinitas veces alrededor de  $(0,0)$  con velocidad angular  $\beta$  y a favor de las agujas del reloj (sentido negativo). Si  $\alpha > 0$

$$|y(t)| \rightarrow \infty \text{ si } t \rightarrow \infty \quad |y(t)| \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow -\infty,$$

girando infinitas veces alrededor de  $(0,0)$  con velocidad angular  $\beta$  y a favor de las agujas del reloj (sentido negativo). En ambos casos las órbitas  $\gamma'$  son espirales.

Finalmente, si  $\alpha = 0$  las órbitas son circunferencias que giran infinitas veces alrededor de  $(0,0)$  con velocidad angular  $\beta$  y a favor de las agujas del reloj (sentido negativo).

Finalmente, la órbita original  $\gamma$  tiene la forma:

$$\gamma = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{P^{-1}y(t) : t \in \mathbb{R}\} = P^{-1}\gamma',$$

es decir es la transformada de  $\gamma'$  por la aplicación lineal de matriz  $P^{-1}$ . Esto significa que las espirales rotando alrededor de  $(0,0)$  pasan a ser espirales rotando alrededor de  $(0,0)$  mientras que las circunferencias se transforman en elipses. Finalmente, el sentido de giro (a favor o en contra de las agujas del reloj) se preserva si  $\det P > 0$ , se invierte si  $\det P < 0$ .

En cuanto a la matriz  $P^{-1}$  ésta se forma calculando primero el autovector complejo  $v = (v_1, v_2)$  asociado a  $\lambda = \alpha + i\beta$  (recuérdese que  $\beta > 0$ ). Si  $u_1 = \Re v_1$ ,  $u_2 = \Re v_2$ ,  $w_1 = \Im v_1$ ,  $w_2 = \Im v_2$  ( $\Re z$  es la parte real de  $z$ ,  $\Im z$  es la parte imaginaria de  $z$ ), la matriz  $P^{-1}$  es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{pmatrix}.$$

□

Debe observarse que el estudio del caso  $\alpha > 0$  se deduce del  $\alpha < 0$ . En efecto si  $\alpha > 0$  y  $x(t)$  resuelve

$$x' = Ax$$

hacemos el cambio:

$$z(t) = x(-t).$$

Para la nueva función  $z(t)$  que  $t \rightarrow \infty$  significa  $t \rightarrow -\infty$  en la función original  $x(t)$ . En otras palabras  $z(t)$  viaja al “pasado” de  $x(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Ahora  $z(t)$  cumple:

$$z' = -Az$$

y los autovalores de  $-A$  son  $\lambda = -\alpha \pm i\beta$ . Como  $-\alpha < 0$  entonces  $|z(t)| \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$  y  $|z(t)| \rightarrow \infty$  si  $t \rightarrow -\infty$ . Esto implica que  $|x(t)| \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow -\infty$  mientras que  $|x(t)| \rightarrow \infty$  si  $t \rightarrow \infty$ .

Usaremos esta procedimiento más tarde. Nos referiremos a él llamándolo el “cambio  $t \rightarrow -t$ ”.

*Demostración del Teorema 1.17.* Como en Teorema 1.16, dado  $x_0$  la órbita  $\gamma$  que pasa por el punto  $x_0$  es

$$\gamma = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

donde  $x(t)$  es la solución de:

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

De nuevo:

$$x(t) = e^{At} x_0, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$$

y para simplificar el estudio de  $\gamma$  introducimos el cambio lineal

$$x = P^{-1}y$$

donde  $P$  es de nuevo una matriz invertible de inversa  $P^{-1}$  cuyo cálculo especificamos más abajo. El cambio transforma la órbita  $\gamma$  en la curva:

$$\gamma' = \{y(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

donde  $y(t) = Px(t)$ , es la solución de

$$\begin{cases} y' = Jy \\ y(0) = y_0 = Px_0, \end{cases}$$

y donde  $J$  tiene la forma:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

La solución  $y(t)$  del problema es:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_{01}e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= y_{02}e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Comenzamos analizando las órbitas que yacen en los ejes  $0y_1$ ,  $0y_2$ . Si  $y_{02} = 0$  la órbita por  $(y_{01}, 0)$  es el semieje abierto que contiene a  $(y_{01}, 0)$ , por ejemplo  $\{(y_1, 0) : y_1 > 0\}$  si  $y_{01} > 0$ . En efecto, la solución  $y(t)$  tiene la forma:

$$y_1(t) = y_{01}e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = 0.$$

Se recorre de  $+\infty$  a 0 si  $\lambda_1 < 0$ , de 0 a  $\infty$  si  $\lambda_1 > 0$ . Análogamente, la órbita que pasa por  $(0, y_{02})$  es el semieje abierto que contiene a  $(0, y_{02})$  y se recorrerá de  $+\infty$  a 0 si  $\lambda_2 < 0$ , de 0 a  $\infty$  si  $\lambda_2 > 0$ . Por lo tanto ya tenemos 4 órbitas que son los semiejes abiertos (la quinta es el propio punto  $(0, 0)$ ).

Para estudiar el resto de las órbitas empezamos por el caso a),  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Si tomamos  $y_{01}, y_{02}$  positivos, entonces la órbita por  $y_0$  tiene por ecuación:

$$y_2 = y_{02} \left( \frac{y_1}{y_{01}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Se recorre con  $y_1$  decreciente e  $y_2$  creciente cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por otra parte,  $y_2 \rightarrow \infty$  si  $y_1 \rightarrow 0+$  mientras  $y_2 \rightarrow 0$  cuando  $y_1 \rightarrow \infty$  pues el cociente  $\lambda_2/\lambda_1$  es negativo. El comportamiento de las órbitas en los otros cuadrantes es idéntico. Esta configuración se llama de “punto de silla”. Nótese que las soluciones en el eje  $Oy_1$  convergen a  $(0,0)$  mientras que las soluciones en el eje  $Oy_2$  divergen a infinito, salvo, claro está, la solución constante  $(0,0)$ .

En el caso b),  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , la órbita de  $y_0$  en el primer cuadrante es:

$$y_2 = y_{02} \left( \frac{y_1}{y_{01}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

pero ahora el exponente  $\lambda_2/\lambda_1$  es positivo. Tiene la forma de una parábola tangente al eje  $Oy_1$  en  $(0,0)$  (más precisamente, el trozo de parábola contenido en el primer cuadrante). Se recorre en el sentido de  $y_1$  e  $y_2$  decrecientes y la solución  $y(t) \rightarrow (0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Asimismo, las soluciones en los semiejes tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . El comportamiento en los otros cuadrantes es similar y todas las órbitas entran tangentes al eje  $Oy_1$  en el origen, cuando  $t \rightarrow \infty$ , con la excepción de las dos órbitas que corresponden a los dos semiejes del eje  $Oy_2$ .

Ahora hay que regresar a las coordenadas originales. La órbita  $\gamma$  que pasa por  $x_0$  tiene la forma:

$$\gamma = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{P^{-1}y(t) : t \in \mathbb{R}\} = P^{-1}\gamma',$$

es decir es la transformada de  $\gamma'$  por la aplicación lineal de matriz  $P^{-1}$ . La matriz  $P^{-1}$  tiene por columnas las coordenadas de los autovectores  $u$  y  $w$  asociados a los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente.

Esto significa que  $P^{-1}$  transforma el eje  $Oy_1$  y sus órbitas en el autoespacio  $V_1$  asociado a  $\lambda_1$  y eje  $Oy_2$  y sus órbitas en el autoespacio  $V_2$  asociado al autovalor  $\lambda_2$ . Esto se traduce, en los dos casos a) y b) en que los dos autoespacios  $V_1$  y  $V_2$  están formados por tres órbitas (los dos semiespacios y el origen  $(0,0)$ ). En el caso a) las órbitas tienden a  $(0,0)$  en  $V_1$  y tienden a infinito en  $V_2$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En el caso b) todas las órbitas, en los autoespacios o fuera de ellos tienden a  $(0,0)$ .

En el caso b), y como consecuencia de la transformación  $P^{-1}$ , todas las órbitas convergen  $(0,0)$ , entrando tangentes a  $V_1$  y cuando  $t \rightarrow \infty$ , con la excepción de las órbitas que yacen en  $V_2$ , que convergen a  $(0,0)$  sobre este subespacio.

Finalmente, en el caso a), las órbitas fuera de los subespacios  $V_1, V_2$  no convergen a  $(0,0)$  sino que se alejan a infinito cuando  $t \rightarrow \infty$  (y lo mismo ocurre cuando  $t \rightarrow -\infty$ ).

□

*Demostración del Teorema 1.18.* Como en los teoremas anteriores la órbita  $\gamma$  que pasa por el punto  $x_0$  es

$$\gamma = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

donde  $x(t)$  es la solución de:

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

De nuevo:

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}.$$

Se introduce el cambio lineal

$$x = P^{-1}y$$

donde  $P$  una matriz invertible de inversa  $P^{-1}$  que especificamos más abajo. El cambio transforma la órbita  $\gamma$  en la curva:

$$\gamma' = \{y(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

donde  $y(t) = Px(t)$ , es la solución de

$$\begin{cases} y' = Jy \\ y(0) = y_0 = Px_0. \end{cases}$$

Ahora la forma de  $J$  difiere en los casos a) y b). En el caso a)

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

La solución  $y(t)$  del problema es:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_{01}e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= y_{02}e^{\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

Las órbitas en los ejes están parametrizadas por:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_{01}e^{\lambda_1 t} & y_2(t) &= 0 & \text{si } y_0 &= (y_{01}, 0), \\ y_1(t) &= 0 & y_2(t) &= y_{02}e^{\lambda_1 t} & \text{si } y_0 &= (0, y_{02}). \end{aligned}$$

Cuando  $y_{01}, y_{02}$  son no nulos la órbita  $\gamma$  tiene por ecuación:

$$y_2 = \frac{y_{02}}{y_{01}}y_1 \quad y_1 > 0,$$

o bien,

$$y_2 = \frac{y_{02}}{y_{01}}y_1 \quad y_1 < 0,$$

dependiendo del cuadrante en el que esté situado el valor inicial  $y_0$ . Por otro lado, se demuestra que en caso a) la matriz original  $A$  debe tener la forma  $A = J$  con lo que en este caso no hace falta hacer el cambio  $P$ .

En el caso b)

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $P^{-1}$  tiene por columnas los vectores  $v_1$  y  $v_2$ , donde  $v_1$  es cualquier vector tal que

$$(A - \lambda_1 I)v_1 \neq 0 \quad \& \quad v_2 = (A - \lambda_1 I)v_1.$$

Nótese que  $v_2$  genera el autoespacio asociado a  $\lambda_1$  que es unidimensional.

La solución  $y(t)$  del problema es:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_{01}e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= (y_{01}t + y_{02})e^{\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

Las órbitas en los ejes sólo yacen en el eje  $0y_2$  y están parametrizadas por:

$$y_1 = 0 \quad y_2 = y_{02}e^{\lambda_1 t}.$$

Por tanto se reducen a los dos semiejes abiertos y se recorren de forma que  $y_2 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . La órbita restante en el eje  $0y_2$  es el propio punto  $(0, 0)$ .

La ecuación de las restantes órbitas es:

$$y_2 = \left( y_{02} + \frac{y_{01}}{\lambda} \log \left( \frac{y_1}{y_{01}} \right) \right) \left( \frac{y_1}{y_{01}} \right),$$

donde o bien  $y_1 > 0$ , o bien  $y_1 < 0$  dependiendo de cómo sea el signo de  $y_{01}$ .

Esto prueba que las órbitas  $\gamma'$  entran tangentes al eje  $0y_2$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Para regresar a las coordenadas originales se observa de nuevo que la órbita  $\gamma$  que pasa por  $x_0$  tiene la forma:

$$\gamma = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{P^{-1}y(t) : t \in \mathbb{R}\} = P^{-1}\gamma',$$

es decir es la transformada de  $\gamma'$  por la aplicación lineal de matriz  $P^{-1}$ . La matriz  $P^{-1}$  aplica el eje  $0y_2$  en el autoespacio  $V_1$  asociado al autovalor  $\lambda_1$ . Por ello todas las órbitas de la ecuación original convergen a  $(0, 0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , aproximándose de forma tangente a  $V_1$ .  $\square$

**1.5.1. Ejercicios**

1. Hállense todas las órbitas –junto con la orientación respectiva de las mismas– de las siguientes ecuaciones:

$$a) x' = x, \quad b) x' = x - x^2, \quad c) x' = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

¿Cómo es la forma general de las órbitas  $\gamma \subset \mathbb{R}$  de una ecuación escalar  $x' = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ? Si  $\gamma$  es una de tales órbitas, trácese la gráfica de todas las soluciones de la ecuación que la tienen por órbita.

2. Estudiar las órbitas de las siguientes ecuaciones lineales dando una descripción de su comportamiento con especial énfasis en las proximidades del punto singular  $(x, y) = (0, 0)$ :

a)

$$\begin{aligned}x' &= -2x + 6y \\y' &= -2x + 5y.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x' &= -9x + 13y \\y' &= -5x + 7y.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x' &= -18x + 30y \\y' &= -10x + 17y.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}x' &= -8x + 13y \\y' &= -5x + 8y.\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}x' &= -6y \\y' &= 2x - 7y.\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}x' &= -5x - 4y \\y' &= -x - y.\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}x' &= 4y \\y' &= -x + 4y.\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}x' &= -7x + 13y \\y' &= -5x + 9y.\end{aligned}$$

## Anexo: resultados especiales

La siguiente propiedad explica cuál es el comportamiento de algunas órbitas abiertas.

**Teorema 1.19.** *Sea  $x(t)$  una solución maximal de (1.1) definida en  $(\alpha, \omega)$  tal que  $\omega = \infty$  (respectivamente,  $\alpha = -\infty$ ) y  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$  ( $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x^*$ ). Entonces  $f(x^*) = 0$  es decir,  $x^*$  es un punto crítico de la ecuación.*

Se introduce ahora un resultado que permite probar la existencia de soluciones periódicas a través de sus órbitas. La prueba –que ofrecemos al lector curioso– la derivamos en un Anexo final de este capítulo (ver también el libro de [14]).

**Teorema 1.20.** *Si  $\Gamma$  es una curva de Jordan sin puntos críticos de (1.1) y  $\gamma$  es una órbita de la ecuación contenida en  $\Gamma$  ( $\gamma \subset \Gamma$ ) entonces  $\gamma = \Gamma$  y por tanto  $\gamma$  es la órbita de una solución periódica.*

Las que son “abiertas” (ver el teorema de clasificación) no pueden ser compactas. Se prueba también en el anexo el siguiente resultado.

**Teorema 1.21.** *Si  $\gamma$  es una órbita compacta de (1.1) y no es un punto crítico, entonces es la órbita de una solución periódica.*

En particular, si la órbita  $\gamma$  de una solución  $x(t)$  de (1.1) es una curva de Jordan entonces tal órbita está parametrizada por una solución periódica. Nótese que esta observación tiene en la práctica menos interés que el Teorema 1.20, el cual se aplica fácilmente a ecuaciones con una “integral primera”.



## 1.6. El comportamiento de una ecuación plana en el entorno de puntos críticos no degenerados.

Consideraremos la ecuación  $C^1$  en un abierto  $G$  del plano,

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.6)$$

que ahora estudiamos en las proximidades de un punto crítico  $(x_c, y_c)$ . Recuerdese a tales efectos el comportamiento de los sistemas lineales planos con respecto al punto crítico (aislado)  $(x_c, y_c) = (0, 0)$ . Nuestra primera definición es,

**Definición 1.22.** *Un punto crítico  $p_c = (x_c, y_c)$  de (1.6) se dice no degenerado si  $f'(p_c)$ , la matriz jacobiana de  $f = (f_1, f_2)$  en  $p_c$ , es invertible (tiene determinante no nulo).*

**Teorema 1.23.** *Un punto crítico  $p_c = (x_c, y_c)$  no degenerado de (1.6) es un punto crítico aislado para dicha ecuación. Es decir, existe un entorno  $U$  de  $p_c$  donde no hay otros puntos críticos para dicha ecuación.*

*Observación 1.20.* Para evitar confusiones señalamos que  $x$  representará en algunos casos el vector  $(x_1, x_2)$  (lo mismo con  $y, z$  respecto de  $(y_1, y_2)$  ó  $(z_1, z_2)$ ), en otros la primera componente del vector  $(x, y)$ .

Cuando se estudia la ecuación (1.1)

$$x' = f(x) \quad (1.7)$$

cerca de un punto crítico  $p_c \in \mathbb{R}^2$ , resulta conveniente hacer el cambio  $y = x - p_c$ , tras el que la ecuación se transforma en (teorema de Taylor)

$$y' = Ay + g(y), \quad (1.8)$$

donde  $A = f'(p_c)$ ,  $g(y) = o(|y|)$  y donde  $o(|y|)$  es una función  $C^1$  que tiene la propiedad:

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{o(|y|)}{|y|} = 0.$$

Estudiar las órbitas de (1.7) cerca de  $p_c$  equivale a estudiar las órbitas de (1.8) cerca de  $y = 0$  (¡que es un punto crítico de la ecuación (1.8)!). Por otra parte, el estudio de (1.8) cerca de  $y = 0$  se corresponde con el de

$$z' = Jz + h(z), \quad (1.9)$$

con  $h(z) = o(|z|)$ , ecuación que se obtiene de (1.8) tras el cambio lineal  $y = P^{-1}z$ , donde  $P$  es una matriz invertible; en la que  $J = PAP^{-1}$ . Esto permite simplificar la matriz  $A$  original con el objeto de tener el mayor número de ceros posible (por ejemplo si  $J$  es la forma canónica de Jordan de  $A$ ).

En algunos casos es conveniente estudiar las ecuaciones planas en otros sistemas de coordenadas. Por ejemplo en coordenadas polares. La ecuación:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases} \quad (1.10)$$

se puede expresar, haciendo  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \operatorname{sen} \theta$ , en la forma:

$$\begin{cases} \rho' = R(\rho, \theta) \\ \theta' = \Theta(\rho, \theta). \end{cases} \quad (1.11)$$

El fundamento de esta afirmación reposa en el siguiente lema.

**Lema 1.24.** *Sea  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  una aplicación de clase  $C^k$  que no se anula para ningún valor de  $t$ . Sean  $t_0 \in (a, b)$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  arbitrarios y tales que:*

$$(x_0, y_0) = \rho_0(\cos \theta_0, \operatorname{sen} \theta_0) \quad \rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

*Existe entonces una única función  $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^k$  tal que  $\theta(t_0) = \theta_0$  y:*

$$\varphi(t) = \rho(t)(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t)) \quad t \in (a, b),$$

*donde  $\rho(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$ .*

A los efectos del presente estudio conviene establecer la relación entre ambas ecuaciones. En efecto, escribiendo

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho(t) \cos \theta(t) \\ y(t) &= \rho(t) \operatorname{sen} \theta(t) \end{aligned}$$

y derivando con respecto a  $t$  obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho' \\ \rho\theta' \end{pmatrix}.$$

De (1.6) se obtiene la siguiente expresión de (1.11):

$$\begin{cases} \rho' = \cos \theta f + \operatorname{sen} \theta g \\ \theta' = \rho^{-1}(-\operatorname{sen} \theta f + \cos \theta g), \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \rho' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta/\rho & \cos \theta/\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, de (1.11) se obtienen las ecuaciones (1.6) en la forma siguiente:

$$\begin{cases} x' = \rho^{-1}Rx - \Theta y \\ y' = \rho^{-1}Ry + \Theta x, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\rho & -y \\ y/\rho & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Theta \end{pmatrix}.$$

El lenguaje de las coordenadas polares es muy conveniente cuando se trata con órbitas cerradas o fenómenos de vorticidad en ecuaciones diferenciales ordinarias.



Figura 1.10: Foco inestable (izquierda) y foco estable (derecha) de la ecuación  $x' = f(x)$ .

**Teorema 1.25.** *Sea  $p_c$  un punto crítico no degenerado de la ecuación (1.6) tal que la matriz  $A = f'(p_c)$  admite dos autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  complejos conjugados, es decir  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ,  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$  ( $\beta > 0$ ). Si  $\alpha < 0$  ( $> 0$ ) entonces existe un entorno  $U$  de  $p_c$  tal que  $\forall p_0 \in U$ , la semiórbita positiva  $\gamma^+(p_0)$  (negativa  $\gamma^-(p_0)$ ) de (1.6) tiende a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  ( $-\infty$ ) rotando infinitas veces alrededor del punto  $p_c$ . Si  $\alpha > 0$  se dice que  $p_c$  es un foco (no lineal) inestable, foco estable si  $\alpha < 0$  (Figura 1.10).*

*Demostración.* Suponemos  $\alpha < 0$ . Haciendo el cambio  $y = x - p_c$ ,  $y = P^{-1}z$  la ecuación se reescribe:

$$z' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} z + h(z)$$

donde  $|h(z)| = o(|z|)$  cuando  $|z| \rightarrow 0$ . Se observa que  $x \rightarrow p_c$  si y sólo si  $z \rightarrow 0$ . Cambiado  $z$  a polares se obtiene:

$$\begin{cases} \rho' = \alpha\rho + h_1 \cos \theta + h_2 \sin \theta \\ \theta' = -\beta - (h_1/\rho) \sin \theta + (h_2/\rho) \cos \theta \end{cases}$$

Tomamos  $0 < \varepsilon < \min\{-\alpha, \beta\}$  y existe  $\delta$  tal que  $|h(z)| < \varepsilon|z|$  para  $|z| < \delta$ . Tomando un dato inicial  $\rho_0 < \delta$  se tiene inicialmente:

$$\rho(t) < \delta \Rightarrow \rho' < (\alpha + \varepsilon)\rho \Rightarrow \rho(t) < \rho_0 e^{(\alpha + \varepsilon)t}.$$

La negatividad de  $\alpha + \varepsilon$  implica que siempre se ha de tener  $\rho(t) < \delta$ , luego la solución está definida en  $[0, \infty)$ . Además  $\rho(t) \rightarrow 0$  exponencialmente cuando  $t \rightarrow \infty$ . Yendo a la segunda ecuación resulta que:

$$\theta_0 - (\beta + \varepsilon)t \leq \theta(t) \leq \theta_0 + (-\beta + \varepsilon)t$$

para todo  $t \geq 0$ . Así  $\theta(t) \rightarrow -\infty$  y la semiórbita  $\gamma^+(p_0)$  gira infinitas veces alrededor del origen cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

*Observación 1.21.* Si  $\alpha = 0$  en el teorema, no se puede predecir en principio el comportamiento de las órbitas cerca de  $p_c$ . La situación genérica es que salvo

por un número finito, se pierden la totalidad de las órbitas periódicas de período  $2\pi/\beta$  del caso lineal. En el ejemplo,

$$\begin{cases} \rho' = -\rho^3 \\ \theta' = -1 \end{cases}$$

que en coordenadas cartesianas se expresa

$$\begin{cases} x' = y - x(x^2 + y^2) \\ y' = -x - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

desaparecen todas las soluciones periódicas del problema lineal asociado

$$\begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$$

Lo mismo sucede con

$$\begin{cases} \rho' = \rho^3 \\ \theta' = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y + x(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

En los siguientes teoremas es necesario suponer que  $f = f(x)$  es de clase  $C^2$  en (1.6).

**Teorema 1.26.** *Supongamos que los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de  $f'(p_c)$  son reales y distintos,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Entonces,*

- a) [Propiedad del punto de silla] *Si  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  existe un entorno  $U$  de  $p_c$ , dos semiórbitas positivas  $\gamma_1^+$ ,  $\gamma_2^+$ , y dos semiórbitas negativas  $\Gamma_1^-$ ,  $\Gamma_2^-$  contenidas todas ellas en  $U$  con las propiedades siguientes. Todas las semiórbitas positivas  $\gamma^+$  que estén contenidas en  $U$  satisfacen  $\gamma^+ \subset \gamma_1^+ \cup \gamma_2^+ \cup \{p_c\}$  y convergen además a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , aproximándose a  $p_c$  de forma tangente a la recta  $p_c + V_1$  ( $V_1$  el autoespacio asociado al autovalor  $\lambda_1$ ). Análogamente, toda semiórbita negativa  $\gamma^-$  en  $U$  debe estar contenida en  $\Gamma_1^- \cup \Gamma_2^- \cup \{p_c\}$  y deberá aproximarse a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  de forma tangente a la recta  $p_c + V_2$  ( $V_2$  el autoespacio asociado a  $\lambda_2$ ). Además,  $\gamma_1^+$  y  $\gamma_2^+$ , así como  $\Gamma_1^-$  y  $\Gamma_2^-$  se aproximan a  $p_c$  siguiendo sentidos opuestos (Figura 1.11).*
- b)  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ . *Si  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  existe un entorno  $U$  de  $p_c$  en el que todas las semiórbitas positivas (omitimos a continuación la palabra positiva) convergen a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Exceptuando dos semiórbitas en  $U$ ,  $\Gamma_1^+$ ,  $\Gamma_2^+$ , llamadas separatrices, que convergen a  $p_c$  de forma tangente a  $p_c + V_2$  (en sentidos opuestos) cuando  $t \rightarrow +\infty$ , todas las restantes semiórbitas en  $U$  se acercan a  $p_c$  de forma tangente a  $p_c + V_1$ . Si  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$  la situación es análoga cambiando  $t$  por  $-t$  (Figura 1.11).*

El siguiente teorema generaliza los fenómenos correspondientes observados en el caso lineal.

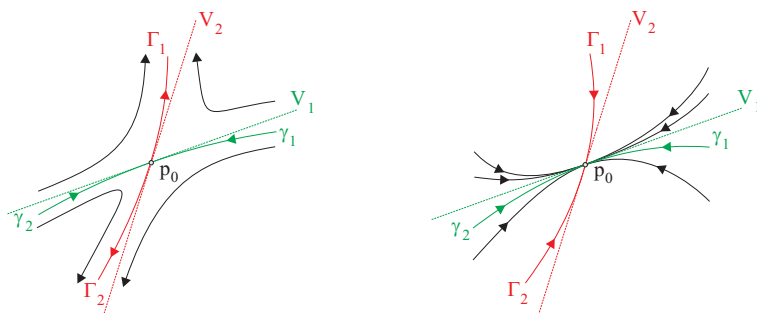


Figura 1.11: Un punto de silla (izquierda) y un nodo estable (derecha) en el caso no lineal  $x' = f(x)$ . Las órbitas se representan en un entorno adecuado  $U$  del punto  $p_c$ .

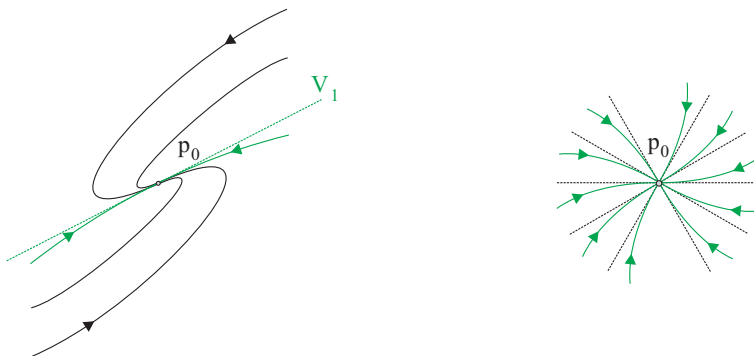


Figura 1.12: Las dos configuraciones de la versión no lineal del nodo impropio estable. Las órbitas se representan en un entorno  $U$  del punto  $p_c$ .

**Teorema 1.27.** *Supongamos que  $\lambda_1$  es un autovalor doble y negativo de  $f'(p_c)$  representando por  $V_1$  el correspondiente autoespacio.*

- Si  $\dim V_1 = 2$  entonces existe un entorno  $U$  de  $p_c$  donde todas las semiórbitas convergen a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Además, por cada semirrecta que empieza en  $p_c$  existe una semiórbita  $\gamma^+$  que se aproxima a  $p_c$  de forma tangente a dicha semirrecta, cuando  $t \rightarrow +\infty$ .*
- Si  $\dim V_1 = 1$  entonces existe un entorno  $U$  de  $p_c$  donde todas las semiórbitas  $\gamma^+$  convergen a  $p_c$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  acercándose a dicho punto de manera tangente a la recta  $p_c + V_1$  (Figura 1.12).*

Las siguientes definiciones fueron introducidas por M. Lyapunov a principios del siglo XX.

**Definición 1.28.** *Un punto crítico  $p_c$  de (1.6) se dice estable si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  (que depende de  $\varepsilon$  y en principio de  $t_0$ ) tal que si  $\bar{x}_0$  cumple  $|\bar{x}_0 - p_c| < \delta$  entonces  $|x(t, t_0, \bar{x}_0) - p_c| < \varepsilon$  para todo  $t > t_0$ .*

Un punto crítico  $p_c$  de (1.6) se dice asintóticamente estable si a) es estable, b) existe  $r > 0$  (que en principio depende de  $t_0$ ) tal si  $|\bar{x}_0 - p_c| < r$  entonces:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, \bar{x}_0) = p_c.$$

Ejemplos 1.22.

a) El punto crítico  $(0, 0)$  es estable para la ecuación:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x, \end{cases}$$

pero no es asintóticamente estable.

b)  $(x, y) = (0, 0)$  es un punto crítico asintóticamente estable para la ecuación

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - cy, \end{cases}$$

donde  $c > 0$ .

En los resultados precedentes están implícitos los siguientes teoremas también debidos a Lyapunov.

**Teorema 1.29** (Lyapunov). *Sea  $p_c$  un punto crítico de la ecuación (1.6) tal que  $f'(p_c)$  tiene sus autovalores con la parte real negativa. Entonces  $p_c$  es asintóticamente estable.*

**Corolario 1.30.** *Sea  $p_c$  un punto crítico no degenerado de la ecuación (1.6) tal que alguno de los autovalores de  $f'(p_c)$  tiene la parte real positiva. Entonces  $p_c$  es inestable.*

*Observación 1.23.* Se demuestra en un curso de teoría de estabilidad (ver [6]) que tanto el Teorema 1.29 como el Corolario 1.30 son ciertos en el caso  $n$ -dimensional. Más aún, en el caso del Corolario 1.30 la condición de no degeneración de  $p_c$  resulta superflua.

### 1.6.1. Péndulo con fricción

Un péndulo de longitud  $l$ , masa  $m$  moviéndose por efecto de la gravedad en un medio donde la fricción aerodinámica es  $c > 0$  se describe mediante la ecuación:

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + h \operatorname{sen} \theta = 0, \quad k = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{g}{l}.$$

Los equilibrios, módulo simetrías son  $(\theta, v) = (\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$  y  $(\theta, v) = (\theta, \dot{\theta}) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ .

El segundo siempre es inestable y da lugar a un punto de silla.

El primero es un foco estable si  $k^2 < 4h$ , un nodo impropio si  $k^2 = 4h$  y un nodo estable si  $k^2 > 4h$ .

*Observación 1.24.* El péndulo sin fricción  $c = 0$  es ligeramente más difícil de analizar. Eso se hará más adelante.

### 1.6.2. Especies en competición

Dos especies  $x$  e  $y$  que compiten en un medio por los *mismos* recursos pueden describirse mediante el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x' = r_1x(1 - \frac{x}{K_1} - \frac{y}{B}) \\ y' = r_2y(1 - \frac{x}{A} - \frac{y}{K_2}). \end{cases}$$

en donde  $x(t)$  e  $y(t)$  representan el número de individuos (todos los coeficientes son positivos). Efectuado las normalizaciones:

$$u = \frac{x}{K_1}, \quad v = \frac{y}{K_2}, \quad \alpha = \frac{A}{K_1}, \quad \beta = \frac{B}{K_2}, \quad \tau = r_1t, \quad \lambda = \frac{r_2}{r_1},$$

obtenemos el sistema simplificado:

$$\begin{cases} u' = u(1 - u - \frac{v}{\beta}) \\ v' = \lambda v(1 - \frac{u}{\alpha} - v). \end{cases}$$

Siempre tiene tres equilibrios que representan la extinción de las especies o de alguna de ellas:

$$(u, v) = (0, 0), \quad (u, v) = (1, 0), \quad (u, v) = (0, 1).$$

Como estamos interesados únicamente en soluciones positivas, existe un equilibrio positivo (de componentes positivas) si y sólo si

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) > 0.$$

Éste es:

$$u_c = \frac{\alpha(\beta - 1)}{\alpha\beta - 1}, \quad v_c = \frac{\beta(\alpha - 1)}{\alpha\beta - 1}.$$

El punto  $(u_c, v_c)$  es estable cuando  $\alpha\beta > 1$ . En ese caso  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  son sillas. El punto  $(u_c, v_c)$  es un punto de silla cuando  $\alpha\beta < 1$ . En ese caso  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  son nodos estables.

El punto  $(0, 0)$  es en todos los casos inestable (nunca se da la extinción simultánea de las dos especies). Más precisamente, es un nodo inestable.

### 1.6.3. Presa y depredador

En una variante de la situación anterior  $x$  es una presa sometida a crecimiento logístico mientras  $y$  es su depredador. Un posible modelo que describe esta situación es:

$$\begin{cases} x' = rx(1 - \frac{x}{K} - \frac{y}{B}) \\ y' = Cxy - Dy, \end{cases}$$

en donde todas las constantes implicadas son positivas. Si efectuamos las normalizaciones:

$$u = \frac{x}{\bar{x}}, \quad \bar{x} = \frac{D}{C}, \quad v = \frac{y}{B}, \quad \alpha = \frac{K}{\bar{x}}, \quad \beta = \frac{B}{K_2}, \quad \tau = rt, \quad \lambda = \frac{D}{r},$$

la ecuación se escribe en la forma:

$$\begin{cases} u' = u(1 - \frac{u}{\alpha} - v) \\ v' = \lambda v(u - 1). \end{cases}$$

El punto  $(0, 0)$  es siempre un punto de silla. El punto  $(\alpha, 0)$  es un nodo estable para  $0 < \alpha < 1$  y un silla para  $\alpha > 1$ . Para  $\alpha > 1$  existe otro punto de equilibrio de componentes positivas (en el modelo sólo tienen sentido las soluciones positivas) dado por:

$$u_c = 1 \quad v_c = \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

Dicho punto es un nodo estable para

$$0 < \lambda \leq \frac{1}{4\alpha(\alpha - 1)}$$

y un foco estable para

$$\lambda > \frac{1}{4\alpha(\alpha - 1)}.$$

#### 1.6.4. Ejercicios

1. Estudiar los equilibrios de las ecuaciones:

$$\begin{cases} \rho' = \mp \rho^3 \\ \theta' = -1 \end{cases}.$$

2. Estudiar los equilibrios de la ecuación:

$$\begin{cases} \rho' = \rho(1 - \rho) \\ \theta' = -1 \end{cases}.$$

Describir el resto de las órbitas.

3. Analizar los equilibrios de la ecuación:

$$\begin{cases} u' = u(1 - u - \frac{v}{\beta}) \\ v' = \lambda v(1 - \frac{u}{\alpha} - v), \end{cases} \quad \lambda > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Demostrar que todas las solución con datos iniciales positivos son siempre positivas.



4. Analizar los equilibrios de la ecuación:

$$\begin{cases} u' = u(1 - \frac{u}{\alpha} - v) \\ v' = \lambda v(u - 1) \end{cases} \quad \alpha > 0, \lambda > 0.$$

demostrar que todas las solución con datos iniciales positivos son siempre positivas.

5. ♣ Estudiar el comportamiento de las órbitas de la ecuación:

$$x_1' = -x_1 - \frac{x_2}{\log(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}, \quad x_2' = -x_2 + \frac{x_1}{\log(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}$$

cerca del punto crítico  $(0, 0)$ . En la ecuación, se entiende que el segundo miembro se anula en  $(0, 0)$ .

*Observación.* El segundo miembro es de clase  $C^1$  pero no es  $C^2$  cerca de  $(0, 0)$ . Nótese que la parte lineal de la ecuación constituye un nodo estable impropio.

6. ♣ Estudiar el comportamiento de las órbitas de la ecuación:

$$x_1' = -x_1 + x_2 + \frac{x_1}{\log(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}, \quad x_2' = -x_1 - x_2 + \frac{x_2}{\log(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}$$

cerca del punto crítico  $(0, 0)$ . En la ecuación, se entiende que el segundo miembro se anula en  $(0, 0)$ .

7. ♣ Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua en un entorno  $U$  del origen  $(0, 0)$  y  $A \in M_{2 \times 2}$  una matriz invertible. Supóngase además que

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = 0.$$

Demuéstrese la existencia de un entorno  $V$  de  $(0, 0)$  en el que  $(0, 0)$  es la única solución de:

$$Ax + f(x) = 0.$$

8. ♣ Sea  $p_c$  un punto crítico no degenerado de la ecuación  $x' = f(x)$  (se supone que  $f$  es de clase  $C^1$ ). Supongamos, como en el Teorema 1.27-b), que  $A = f'(p_c)$  posee un autovalor real doble  $\lambda_1 < 0$  de multiplicidad geométrica 1. Demuéstrese que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un cambio de variable  $x = P^{-1}y + p_c$ , donde  $P$  es una cierta matriz invertible, tal que la ecuación se transforma en:

$$y' = Jy + g(y), \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \varepsilon & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

en donde  $\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{|g(y)|}{|y|} = 0$ . Pruébese, cambiando a polares y eligiendo adecuadamente  $\varepsilon$ , que todas las semiórbitas positivas  $\gamma^+$  que empiezan cerca de  $(0, 0)$  tienden a  $(0, 0)$  exponencialmente cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## 1.7. Sistemas gradiente

**Definición 1.31.** Dada una función  $\phi \in C^1(G, \mathbb{R})$ , donde  $G$  es un dominio (un abierto y conexo), el sistema gradiente asociado a  $\phi$  se define como:

$$\begin{cases} x' = -\phi_x \\ y' = -\phi_y, \end{cases} \quad (1.12)$$

donde  $\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ ,  $\phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ . En este caso se dice que  $\phi$  es el potencial de velocidades de la ecuación.

En mecánica de fluidos las órbitas describen las trayectorias fluidas y  $-\nabla\phi$  mide las velocidades de las mismas, de ahí el término “potencial de velocidades”.

**Proposición 1.32.** Los puntos críticos  $p_c$  de la función  $\phi$  son los puntos críticos del sistema. Además:

- i) Si  $p_c$  es un mínimo relativo de  $\phi$  con  $D^2\phi > 0$  entonces  $p_c$  es un nodo estable del sistema.
- ii) Si  $p_c$  es un máximo relativo de  $\phi$  con  $D^2\phi < 0$  entonces  $p_c$  es un nodo inestable del sistema.
- iii) Si  $p_c$  es un punto de silla de  $\phi$  con  $\det D^2\phi \neq 0$  entonces  $p_c$  es un punto de silla del sistema.
- iv) Los sistemas gradiente no admiten puntos críticos de tipo “foco”.

**Proposición 1.33.** Las soluciones  $(x(t), y(t))$  del sistema hacen a  $\phi$  estrictamente decrecientes salvo que la solución sea constante (un punto crítico).

En base a esta proposición las órbitas del sistema se denominan “líneas (curvas) de máximo descenso”. Nótese que  $-\nabla\phi$  apunta en la dirección donde el decrecimiento de  $\phi$  es máximo.

**Corolario 1.34.** Un sistema gradiente no admite órbitas cerradas.

Por otra parte, las órbitas de un sistema gradiente son ortogonales a las curvas de nivel de la función.

**Definición 1.35.** Para  $c$  constante, el conjunto de nivel  $\gamma_c$  de la función  $\phi$  se define como:

$$\gamma_c = \{(x, y) : \phi(x, y) = c\}.$$

Se dice que  $c$  es un valor crítico de  $\phi$  si existe  $p$  con  $\phi(p) = c$  tal que  $\nabla\phi(p) = 0$ . En caso contrario se dice que  $c$  es un valor no crítico.

**Proposición 1.36.** Sea  $\phi \in C^1(G)$ . Si  $c$  es un valor no crítico entonces cada una de las componentes conexas  $\gamma'_c$  de  $\gamma_c$  constituye una curva parametrizada de clase  $C^1$ .

Cada una de las componentes  $\gamma'_c$  se suele denominar curva de nivel de  $\phi$  (por abuso de notación este calificativo se suele aplicar a  $\gamma_c$ ).

*Idea de la prueba.* Si  $p_0 \in \gamma'_c$ , como  $\nabla\phi(p_0) \neq 0$  si, por ejemplo,  $\phi_y \neq 0$  entonces todo un entorno de  $p_0$  en  $\gamma'_c$  se representa en la forma  $y = h(x)$  con  $h$  de clase  $C^1$ . Esto prueba la afirmación a nivel local. La conexidad de  $\gamma'_c$  permite globalizar el resultado.  $\square$

*Observación 1.25.* Cuando  $c$  es crítico el teorema se puede aplicar a cada una de las componentes de  $\gamma_c \setminus \mathcal{P}$ , resultando que cada una de éstas es una curva  $C^1$  ( $\mathcal{P}$  denota el conjunto de puntos críticos).

**Corolario 1.37.** *Las órbitas del sistema gradiente (1.12) son ortogonales a las curvas de nivel de  $\phi$ .*

*Demostración.* Basta observar que en cada punto  $p \in \gamma_c$  donde  $\nabla\phi \neq 0$ ,  $\nabla\phi$  es ortogonal al vector tangente a  $\gamma_c$  en  $p$ . Esto se deja como ejercicio.  $\square$

### 1.7.1. Ejercicios

1. Construir y estudiar los sistemas gradientes asociados a las funciones:

a)  $\phi = x^2 + y^2$

b)  $\phi = -x^2 - y^2$

c)  $\phi = x^2 - y^2$ .

2. Construir y estudiar el sistema gradiente asociado a la función:

$$\phi = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

donde  $ac - b^2 \neq 0$ .

3. Estúdiense las órbitas del sistema gradiente (1.12) asociado a la función:

$$\phi = xe^{-x^2/2-y^2/2}.$$

A tales efecto se sugiere primero analizar los puntos críticos. Para el comportamiento global de las órbitas se propone comprobar que la función:

$$V = \log|y| - \log\sqrt{|1-x^2|}$$

es constante sobre las soluciones de la ecuación.

**Observaciones.** La gráfica de la superficie  $z = \phi(x, y)$  se representa en la Figura 1.2, mientras el campo de direcciones se traza en la Figura 1.3.

4. Pruébese que si  $\gamma_c$  es una curva de nivel, lo cual lleva implícito que  $\nabla\phi \neq 0$  en cada uno de sus puntos, entonces  $\nabla\phi$  es ortogonal a  $\gamma_c$

## 1.8. La ecuación orbital

Consideremos la ecuación (1.6)

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

cuyo segundo miembro suponemos de clase  $C^1$  en un dominio  $G$  del plano.

Estudiamos la órbita  $\gamma$  que pasa por  $p_0 = (x_0, y_0)$  desde un nuevo punto de vista. Suponemos que  $p_0$  no es punto crítico (en caso contrario todo está dicho). Entonces  $f(p_0)$  ó  $g(p_0)$  son no nulos, por ejemplo  $f(p_0) \neq 0$ . Llamamos  $\Omega$  la componente conexa del conjunto

$$\{(x, y) : f(x, y) \neq 0\} \quad (1.13)$$

a la que pertenece  $p_0$ .

Entonces se tiene que aquella parte de  $\gamma$  que pasa por  $p_0$  y se encuentra contenida en  $\Omega$ , es decir la componente de  $\gamma \cap \Omega$  que pasa por  $p_0$ , coincide con la gráfica de la solución maximal  $y = Y(x)$  del problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} & (x, y) \in \Omega \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Normalmente, la órbita completa  $\gamma$  puede cruzar varias de las componentes conexas del conjunto (1.13) a través del lugar  $f(x, y) = 0$  que típicamente consta de la unión de varias curvas. En un punto  $(x_1, y_1)$  de la curva  $f(x, y) = 0$  la componente conexa de la órbita  $\gamma$  en el abierto  $\{(x, y) : g(x, y) \neq 0\}$  se puede expresar como la gráfica de la solución maximal  $x = X(y)$  del problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \\ x(y_1) = x_1. \end{cases} \quad (1.15)$$

Las ecuaciones (1.14) y (1.15) se denominan la ecuación orbital y se pueden escribir de manera conjunta como:

$$\frac{dx}{f(x, y)} = \frac{dy}{g(x, y)}.$$

Todas estas ideas se extienden fácilmente al caso  $n$ -dimensional.

Una descripción más detallada de las afirmaciones precedentes se recoge en el Anexo al final de esta sección.

*Ejemplo 1.26* (Circunferencias). La ecuación orbital de la ecuación

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x, \end{cases}$$

en la región  $y \neq 0$  es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Las soluciones hacen constante la función  $V(x, y) = x^2 + y^2$ . Se puede comprobar que todas las órbitas son circunferencias.

*Ejemplo 1.27.* [Ecuaciones de Lotka-Volterra]. Las ecuaciones de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax - Bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -Cy + Dxy\end{aligned}$$

constituyen un modelo sencillo para “imitar” la relación trófica entre una presa ( $x$  el número de efectivos) y su depredador  $y$  en un medio. Las ecuaciones ganan mucho si refieren a la población de equilibrio:

$$x_c = \frac{C}{D}, \quad y_c = \frac{A}{B}.$$

En efecto, llamando:

$$u = \frac{x}{x_0}, \quad v = \frac{y}{y_0},$$

e introduciendo la escala de tiempos:

$$\tau = At$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= u(1-v) \\ \frac{dv}{dt} &= \alpha v(u-1)\end{aligned}\tag{1.16}$$

$\alpha = \frac{C}{A}$ . Considerando la ecuación orbital:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha v(u-1)}{u(1-v)},$$

y haciendo separación de variables se observa que la función:

$$V(u, v) = \alpha(u - \log u) + v - \log v,$$

se conserva sobre las soluciones de las ecuaciones de Lotka-Volterra en el primer cuadrante, es decir,  $V(u(t), v(t))$  es constante sobre cada solución  $(u(t), v(t))$ . Esto significa que las órbitas de la ecuación yacen en las curvas de nivel de  $V$ .

Debe observarse que las funciones  $V$  de los ejemplos anteriores se conservan sobre las soluciones de las respectivas ecuaciones. Ello da pie a la siguiente definición.

**Definición 1.38.** Una función  $C^1$ ,  $V = V(x)$ , se dice una integral primera para la ecuación  $n$ -dimensional (1.1) si  $V(x(t)) = c$  (constante) sobre cada solución  $x(t)$ .

**Teorema 1.39.** Una función  $V = V(x)$  de clase  $C^1$  es una integral primera de la ecuación (1.6) en  $G$  si y sólo si

$$\nabla V(x) \cdot f(x) = 0 \quad (\text{producto escalar})$$

para cada  $x \in G$ .

*Demostración.* Al considerar la función  $\varphi(t) = V(x(t))$ , ésta es constante si y sólo si  $\varphi'(t) = 0$ , pero

$$\varphi'(t) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)).$$

□

*Observaciones 1.28.*

- a) Si la ecuación (1.1) admite una integral primera en un abierto  $G$  y  $\gamma \subset G$  es una órbita de la ecuación entonces  $\gamma \subset \{x \in G : V(x) = c\}$  para cierta constante  $c$ .
- b) La función  $V(u, v) = \alpha(u - \log u) + v - \log v$  es una integral primera de las ecuaciones de Lotka-Volterra.

### 1.8.1. Ejercicios

1. Empleando la ecuación orbital, estúdiense las órbitas de las siguientes ecuaciones:

a)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - y) \\ y' = \lambda y(1 - x - y) \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$  es una constante.

e)

$$\begin{cases} x' = x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + y \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} x' = x(1 - x) \\ y' = -y \end{cases}$$

2. Cálculase una integral primera para cada una de las ecuaciones del ejercicio anterior.

3. Hállese una integral primera de la ecuación:

$$\begin{cases} x' = x(x - 2y) \\ y' = y(y - 2x). \end{cases}$$

Con la ayuda de la integral primera y el campo de direcciones estúdiase el comportamiento de las órbitas en el primer cuadrante.

4. Hállese una integral primera de la ecuación:

$$\begin{cases} x' = (x^2 - 1)e^{-\rho^2/2} \\ y' = xy e^{-\rho^2/2} \end{cases} \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

## Anexo: La ecuación orbital

Consideramos la ecuación  $C^1$  en un abierto  $G$  del plano:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Asimismo  $\Omega_k^+$  representa una componente conexa del conjunto  $\{(x, y) \in G : f(x, y) > 0\}$  que por el momento representamos como  $\Omega^+$  para abreviar. Tenemos la siguiente propiedad.

**Proposición 1.40.** Sean  $p_0 = (x_0, y_0) \in \Omega^+$  y  $\gamma^+$  la órbita de la ecuación (1.6) que pasa por  $p_0$ :

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

observada en  $\Omega^+$ . Entonces:

$$\gamma^+ = \{(x, y) : y = h(x), \quad x \in (a, b)\}$$

donde  $(h, (a, b))$  es la solución maximal del problema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} & (x, y) \in \Omega^+ \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.17)$$

*Demostración.* El problema:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) & x(0) = x_0 \\ y' = g(x, y) & y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.18)$$

admite una única solución maximal  $(x(t), y(t))$  definida en  $I_+ = (\alpha_+, \omega_+)$  con  $(x(t), y(t)) \in \Omega_+$  para  $t \in I_+$ . Como  $x'(t) > 0$ ,  $x : I^+ \rightarrow (a_+, b_+)$  define un difeomorfismo con  $(a_+, b_+) = x(I_+)$ . Si  $x \mapsto \tau(x)$  es la inversa de  $x(t)$  y  $h_+(x) = y(\tau(x))$  entonces  $(h_+, (a_+, b_+))$  define una solución de (1.17). Luego  $(a_+, b_+) \subset (a, b)$  y  $h_+(x) = h(x)$  en  $(a_+, b_+)$ . Nótese que en particular la solución del problema original se escribe en la forma:

$$(x(t), y(t)) = (x(t), h_+(x(t))) \quad t \in I_+,$$

de donde,

$$\gamma^+ = \{(x, y) : y = h_+(x), \quad x \in (a_+, b_+)\}.$$

Ahora consideramos la solución maximal  $(h, (a, b))$  de (1.17). Introducimos el problema:

$$\begin{cases} x' = f(x, h(x)) & x \in (a, b) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Su solución maximal  $(\xi, (\alpha_0, \omega_0))$  satisface  $\xi(t) \rightarrow a$  y  $\xi(t) \rightarrow b$  cuando  $t \rightarrow \alpha_0$  y  $t \rightarrow \omega_0$ , respectivamente. Ello es consecuencia de que  $f(x, h(x)) > 0$  para  $x \in (a, b)$ . Asimismo:

$$(x(t), y(t)) = (\xi(t), h(\xi(t))) \quad t \in (\alpha_0, \omega_0)$$

es solución de (1.18). En particular  $(\alpha_0, \omega_0) \subset I_+$  luego  $\xi(\alpha_0, \omega_0) = x(\alpha_0, \omega_0)$  es decir  $(a, b) \subset (a_+, b_+)$ . De lo establecido más arriba  $(a, b) = (a_+, b_+)$  y por tanto  $h = h_+$ , luego hemos terminado.  $\square$

*Observación 1.29.* Una cuenta alternativa para comprobar que la solución

$$(h_+(x), (a_+, b_+))$$

coincide con  $(h, (a, b))$  es como sigue.

Trataremos de probar directamente que  $h_+$  no se puede prolongar como solución de (1.17) a la derecha de  $b_+$ .

Esto es sin duda cierto cuando o bien  $b_+ = \infty$  o bien no existe  $\lim_{x \rightarrow b_+} h_+(x)$  o tal límite es  $\pm\infty$ . Suponemos por tanto que tanto  $b_+$  como  $h_+(b_+ -) := \lim_{x \rightarrow b_+} h_+(x)$  son finitos.



Nótese que una condición necesaria para que  $h_+$  se pueda prolongar es que

$$(b_+, h_+(b_+ -)) \in \Omega^+. \quad (1.19)$$

Si nos fijamos ahora en  $\omega_+$  pueden pasar dos cosas. O bien  $\omega_+ = \infty$  o bien  $\omega_+ < \infty$ . En el primer caso notamos que  $x(t)$  resuelve:

$$x'(t) = f(x(t), h_+(x(t))),$$

de donde al ser  $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$  resulta que:

$$f(b_+, h_+(b_+ -)) = 0.$$

Esto es incompatible con (1.19). En el caso  $\omega_+ < \infty$  debe ser:

$$\lim(x(t), y(t)) = (b_+, h_+(b_+ -)) \in \partial\Omega^+,$$

pues  $(x(t), y(t))$  es solución maximal de (1.18). Una vez más (1.19) no se cumple.

En la siguiente propiedad  $\Omega^+$  representa una componente de  $\{(x, y) \in G : f(x, y) > 0\}$ .

**Proposición 1.41.** *Sea  $\gamma$  una órbita de la ecuación (1.6). Entonces cada componente de  $\gamma \cap \Omega^+$  se representa mediante la gráfica en  $\mathbb{R}^2$  de una solución maximal de la ecuación orbital*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)},$$

observada esta ecuación en  $\Omega^+$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\bar{x} : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametriza la órbita completa  $\gamma$  mientras que  $\gamma'$  es una componente fijada de  $\gamma \cap \Omega^+$ . Afirmamos que  $\gamma' = \bar{x}(\alpha', \omega')$ , es decir, que  $\gamma'$  se parametriza completamente sobre un intervalo abierto  $(\alpha', \omega') \subset (\alpha, \omega)$ . Si esto es así resulta que  $x'(t) > 0$  en  $(\alpha', \omega')$  y por tanto  $x(t)$  es invertible sobre un intervalo imagen  $(a, b)$  mediante  $t = \tau(x)$ . Es decir,  $\gamma' = \{(x, h(x)) : a < x < b\}$ ,  $h(x) = y(\tau(x))$ . Razonando como en la proposición anterior se concluye que  $y = h(x)$  constituye una solución maximal de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{f}.$$

Para probar la afirmación suponemos primero que  $\gamma$  es cerrada. En este caso debe haber al menos un punto  $p_0$  de  $\gamma$  en  $\Omega^-$ . Suponemos sin pérdida de generalidad que  $p_0 = \bar{x}(0)$ . Se observa entonces que  $\bar{x} : (0, T) \rightarrow \gamma \setminus \{p_0\}$  es un homeomorfismo y como  $\gamma' \subset \gamma \setminus \{p_0\}$  existe un conexo  $J \subset (0, T)$  tal que  $\bar{x}(J) = \gamma'$ . Es muy fácil ver que  $J$  es abierto y hemos terminado.

En el caso en que  $\gamma$  es abierta es posible demostrar que  $\bar{x} : (\alpha, \omega) \rightarrow \gamma$  es un homeomorfismo, donde  $\gamma$  se observa con la topología inducida por  $\mathbb{R}^2$ . Este hecho es consecuencia de que en el plano las órbitas abiertas carecen de

puntos recurrentes<sup>2</sup> ([11], p. 248). Ello permite probar que la parametrización es abierta sobre su imagen (se omiten detalles por brevedad). Por consiguiente  $J = \bar{x}^{-1}(\gamma')$  es conexo y abierto (ésto último es fácil de probar) y concluimos la demostración.  $\square$

*Observación 1.30.* Si  $\gamma$  es una órbita de la ecuación (1.6) y  $\Omega^+ = \{(x, y) \in G : f(x, y) > 0\}$  entonces  $\Omega^+ = \cup \Omega_n^+$  donde  $\Omega_n^+$  son las componentes de  $\Omega^+$ . Entonces:

$$\gamma \cap \Omega^+ = \cup_n (\gamma \cap \Omega_n^+),$$

y cada componente de  $\gamma \cap \Omega_n^+$  se representa mediante la gráfica de una solución maximal de la ecuación orbital

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Si  $\Omega^- = \{(x, y) \in G : f(x, y) < 0\}$  y  $\Omega_n^-$  son sus componentes, entonces  $\gamma \cap \Omega^- = \cup_n (\gamma \cap \Omega_n^-)$  y un análisis idéntico al de arriba prueba que cada componente de  $\gamma \cap \Omega_n^-$  se representa mediante la gráfica de una solución maximal de dicha ecuación.

Análogamente, si  $\Lambda^+ = \{(x, y) \in G : g(x, y) > 0\}$ ,  $\Lambda^- = \{(x, y) \in G : g(x, y) < 0\}$  y sus componentes son  $\Lambda_n^\pm$  entonces las componentes de  $\gamma \cap \Lambda_n^\pm$  se representan mediante las gráficas de soluciones maximales de la ecuación orbital:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

observada en  $\Lambda_n^\pm$ .

Finalmente, si la órbita  $\gamma$  no es un punto crítico entonces  $\gamma \subset \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Lambda^+ \cup \Lambda^-$  luego se describe totalmente mediante la gráfica de una de las dos versiones de la ecuación orbital.

*Ejemplo 1.31.* [Ecuaciones de Lotka-Volterra]. Las órbitas de la ecuación

$$\begin{cases} x' = Ax - Bxy \\ y' = -Cy + Dxy, \end{cases} \quad A, B, C, D > 0,$$

en el primer cuadrante  $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ , se pueden describir mediante la gráfica de las soluciones de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-Cy + Dxy}{Ax - Bxy},$$

cuando dichas órbitas se observan en los dominios:

$$\Omega^+ = \left\{ y < \frac{A}{B} \right\} \quad \Omega^- = \left\{ y > \frac{A}{B} \right\}.$$

<sup>2</sup>Se dice que un punto  $q \in \gamma$  es recurrente si existe  $t_n \rightarrow \infty$  o  $t_n \rightarrow -\infty$  tal que  $\bar{x}(t_n) \rightarrow q$ .

Alternativamente, los trozos de las órbitas que yacen en las regiones:

$$\Lambda^+ = \left\{ x > \frac{C}{D} \right\} \quad \Lambda^- = \left\{ x < \frac{C}{D} \right\},$$

no son otra cosa que las gráficas de las soluciones de la ecuación:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{Ax - Bxy}{-Cy + Dxy}.$$

Como se vio, las órbitas se representan de manera conjunta mediante las curvas de nivel de la función:

$$V(x, y) = A \log y - By + C \log x - Dx.$$

## 1.9. Sistemas hamiltonianos

**Definición 1.42.** Un sistema hamiltoniano definido en un dominio  $G \subset \mathbb{R}^2$  es toda ecuación de la forma:

$$\begin{cases} x' = V_y \\ y' = -V_x, \end{cases}$$

en donde  $V(x, y)$  es una función de clase  $C^1$  en  $G$ .

La notación  $H(x, y)$  en lugar de  $V(x, y)$  es más usual en mecánica donde se la llama la función hamiltoniana. Es inmediato comprobar que  $V$  se conserva sobre las soluciones.

**Proposición 1.43.** *La función  $V$  constituye una integral primera del sistema hamiltoniano.*

La ecuación orbital de un sistema hamiltoniano es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{V_y}{V_x},$$

luego si “despejamos” formalmente las diferenciales<sup>3</sup> obtenemos:

$$V_x dx + V_y dy = 0.$$

Es decir, las ecuaciones orbitales de los sistemas hamiltonianos son ecuaciones exactas.

La siguiente propiedad se sigue del estudio de las ecuaciones exactas en el capítulo de integración elemental.

**Proposición 1.44.** *Sean  $f, g$  funciones de clase  $C^1$  en un dominio  $G$  del plano y supongamos que*

$$\operatorname{div} (f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (x, y) \in G.$$

*Entonces, todo  $p_0 \in G$  que no sea un punto crítico de la ecuación:*

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

*admite un entorno  $U$  en el que está definida una función  $V = V(x, y)$  de clase  $C^1$  (única salvo constantes aditivas) tal que:*

$$f = \frac{\partial V}{\partial y} \quad g = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

*en  $U$ . En particular, la ecuación es hamiltoniana en  $U$  y  $V(x, y)$  es una integral primera en dicho entorno.*

*Si además,  $G$  es simplemente conexo, entonces  $V$  se puede definir en la totalidad del dominio  $G$ .*

<sup>3</sup>Esto es una pura manipulación simbólica.

*Observación 1.32.* Como comprobaremos en los ejemplos que siguen, la existencia de una integral primera en el entorno de un punto crítico en el plano trae como consecuencia la existencia de infinitas órbitas cerradas rodeando a dicho punto. Esta configuración se llama un centro no lineal.

Usando las ideas de la Proposición 1.44 se establece un resultado similar para sistemas gradiente.

**Proposición 1.45.** Sean  $f, g$  funciones de clase  $C^1$  en un dominio  $G$  del plano y supongamos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (x, y) \in G.$$

Entonces, todo  $p_0 \in G$  que no sea un punto crítico de la ecuación:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

admite un entorno  $U$  en el que está definida una función  $V = V(x, y)$  de clase  $C^1$  (única salvo constantes aditivas) tal que:

$$f = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad g = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

en  $U$ . En particular, la ecuación define un sistema gradiente en  $U$ .

Si además,  $G$  es simplemente conexo, entonces  $V$  se puede definir en la totalidad del dominio  $G$ .

### 1.9.1. Sistemas conservativos unidimensionales

La ecuación:

$$x'' + f(x) = 0, \tag{1.20}$$

define una generalización de la ecuación del péndulo. Se puede escribir,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x). \end{cases}$$

Una función hamiltoniana de la ecuación (por tanto, una integral primera) tiene la forma:

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + F(x)$$

donde

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds.$$

Para trazar las órbitas de la ecuación basta construir las curvas de nivel de la función  $V$ , poniendo atención en aquellos casos donde dichas curvas contienen puntos críticos.

Los puntos críticos del sistema son de la forma  $(x, y) = (x^*, 0)$  donde  $f(x^*) = 0$ . Como:

$$F'(x^*) = f(x^*) = 0,$$

tales  $x^*$  son exactamente los puntos críticos de la función  $F(x)$ .

Se distinguen ahora dos casos:

- a)  $f'(x^*) > 0$ . Entonces  $x^*$  es un mínimo relativo estricto de  $F$  y para valores  $c$  de la energía:

$$c^* = F(x^*) < c < c^* + \delta$$

las curvas de nivel  $V = c$  constituyen órbitas cerradas (curvas de Jordan) cuya expresión explícita es:

$$y = \pm \sqrt{2(c - F(x))}.$$

El punto  $(x^*, 0)$  está rodeado por una familia de órbitas cerradas: se le denomina un centro no lineal.

- b)  $f'(x^*) < 0$ . En este caso,  $x^*$  define un máximo relativo estricto de  $F$ . El punto  $(x^*, 0)$  es un punto de silla y para  $c^* = F(x^*)$  la curva  $V = c^*$ , es decir:

$$y = \pm \sqrt{2(c^* - F(x))},$$

contiene a las variedades estable e inestable de  $(x^*, 0)$ . Agrupa así al punto crítico y localmente, a cuatro semiórbitas (dos positivas, dos negativas). El resto de las órbitas próximas a  $(x^*, 0)$  se construye dándole valores a  $c$ :

$$c^* - \delta < c < c^* + \delta$$

y trazando las las curvas de nivel  $V = c$  en la forma:

$$y = \pm \sqrt{2(c - F(x))}.$$

En el caso específico de la ecuación del péndulo sin fricción:

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0$$

una integral primera es:

$$V = \frac{v^2}{2} + (1 - \cos \theta), \quad v = \dot{\theta}.$$

Los puntos  $(2k\pi, 0)$  son centros no lineales y los puntos  $((2k+1)\pi, 0)$  son puntos de silla.

### 1.9.2. Órbitas y conjuntos de nivel

Ya se dijo que si  $V$  es una integral primera de la ecuación (1.1) en un dominio  $G$  del plano entonces sus órbitas están contenidas en los conjuntos de nivel

$$\{(x, y)/V(x, y) = c\}$$

( $c = \text{constante}$ ). El ejemplo del péndulo muestra que  $V(x, y) = c$  puede contener más de una órbita.

Sin ir más lejos, si  $x(t)$  es una solución de (1.1) en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $x(t) \neq x^*$  y satisface  $x(t) \rightarrow x^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$  ó  $t \rightarrow -\infty$  entonces tanto la órbita  $\gamma$  de  $x(t)$  como  $\{x^*\}$  se encuentran en el mismo conjunto de nivel  $V(x) = c$  (¿por qué?).

En el caso de sistemas hamiltonianos, la siguiente propiedad permite conocer el número de órbitas que yacen un conjunto de nivel  $V = c$ . Nótese que en algunos casos patológicos pudiera haber una infinidad de dichas órbitas.

**Proposición 1.46.** *Sea  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^2$  y consideremos el sistema*

$$\begin{cases} x' = V_y \\ y' = -V_x. \end{cases}$$

*Sea  $\mathcal{P}$  el conjunto de puntos críticos de dicha ecuación. Supóngase que el conjunto de nivel  $\{V = c\}$  es no vacío. Entonces en  $\{V = c\} \setminus \mathcal{P}$  hay tantas órbitas como componentes conexas tenga dicho conjunto.*

*Ejemplo 1.33.* La ecuación

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 - x, \end{cases}$$

está en las condiciones de la propiedad para la función:

$$V = -\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

El conjunto,

$$V(x, y) = \frac{1}{6},$$

consta de cuatro órbitas. Una de ellas el punto crítico  $(1, 0)$ . Si de  $V = 1/6$  quitamos  $(1, 0)$  obtenemos tres componentes conexas que son las órbitas no triviales que hay en  $V = 1/6$ . La componente conexa acotada es una órbita que conecta el punto  $(1, 0)$  consigo mismo empleando un tiempo infinito en el trayecto. Tal órbita se llama homoclínica.

*Demostración de la Proposición 1.46.* Comenzamos con una observación. Si  $p_0 = (x_0, y_0) \in \{V = c\} \setminus \mathcal{P}$  entonces, por el teorema de la función implícita, existe un entorno  $U_0$  de  $p_0$  en  $\mathbb{R}^2$  tal que:

$$(\{V = c\} \setminus \mathcal{P}) \cap U_0 = \{(x, y) : y = h(x) \ x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\}$$

para ciertos  $\varepsilon > 0$  y una función  $h(x)$  de clase  $C^1$  en  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  (hemos supuesto que  $f = V_y \neq 0$  en  $p_0$ , caso contrario  $g = -V_x$  es no nula en  $p_0$  y una afirmación análoga es cierta si intercambiamos los papeles de  $x$  e  $y$ ).

Nótese que  $y = h(x)$  es la solución en  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  de la ecuación orbital

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{f}$$

con la condición inicial  $y(x_0) = x_0$ .

Sea ahora  $\gamma$  una órbita cualquiera en  $\{V = c\} \setminus \mathcal{P}$  parametrizada por una solución  $(\xi(t), \eta(t))$ ,  $t \in (\alpha, \omega)$ . Sabemos que  $\gamma \subset \{V = c\} \setminus \mathcal{P}$  y como  $\gamma$  es conexa, está contenida en la componente conexa  $\mathcal{C}$  en  $\{V = c\} \setminus \mathcal{P}$  que pase por cualquiera de los puntos de  $\gamma$ .

Probamos en primer lugar que  $\gamma$  es un abierto en  $\{V = c\} \setminus \mathcal{P}$ . En efecto si  $p_0 = (\xi(t_0), \eta(t_0))$  sabemos que:

$$\eta(t) = h(\xi(t))$$

mientras

$$\xi' = f(\xi, h(\xi))$$

con la condición inicial  $\xi(t_0) = x_0$ . Como  $f(x, h(x)) \neq 0$  en  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  se tiene que  $\xi(t)$  recorre la banda  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  en tiempo finito y como  $(\xi(t), \eta(t))$  es una solución maximal, el intervalo de tiempo donde ello transcurre está incluido en  $(\alpha, \omega)$ . Ahora si  $\xi(t)$  recorre  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  ello significa que  $(\xi(t), \eta(t))$  recorre completamente  $\{V = c\} \setminus \mathcal{P} \cap U_0$  que está entonces contenido en  $\gamma$ .

Ahora demostramos que  $\gamma$  es un cerrado en  $\{V = c\} \setminus \mathcal{P}$ . Supongamos que  $p^* = (x^*, y^*) = \lim(\xi(t_n), \eta(t_n))$  y sean  $U^*$  y  $h^*(x)$  el entorno y la función introducidos al comienzo de la prueba y asociados al punto  $(x^*, y^*)$  ( $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$  es el dominio de existencia de  $h^*$ ). Para  $n$  grande se tiene que  $(\xi(t_n), \eta(t_n)) \in U^*$  por lo tanto si  $\xi^* = \xi(t_n)$  entonces  $\xi(t)$  resuelve:

$$\xi' = f(\xi, h^*(\xi))$$

con dato inicial  $\xi(t) = \xi^*$  en  $t = t_n$ , con  $\eta(t) = h^*(\xi(t))$ . Como  $f(\xi, h^*(\xi)) \neq 0$  en  $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$  entonces  $\xi(t)$  toma todos los valores del intervalo  $(x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$  en un entorno finito de  $t_n$ . En particular  $\xi(t^*) = x^*$  y  $\eta(t^*) = h(x^*) = y^*$  (se ha tenido en cuenta que  $(\xi(t), \eta(t))$  es una solución maximal). Luego  $p^* \in \gamma$ .

Como  $\gamma$  es a la vez abierto y cerrado en  $\{V = c\} \setminus \mathcal{P}$  entonces  $\gamma = \mathcal{C}$  y hemos terminado. □

La siguiente propiedad resulta de mucha utilidad para ampliar el alcance de la Proposición 1.46.

**Proposición 1.47.** *Sean  $(f, g)$  un campo  $C^1$  en un dominio  $G$  del plano y  $\mu = \mu(x, y)$  una función continua en  $G$  que no se anula nunca (por tanto mantiene el signo). Entonces las ecuaciones (1.7) y*

$$\begin{cases} x' = \mu(x, y)f(x, y) \\ y' = \mu(x, y)g(x, y), \end{cases}$$



poseen exactamente las mismas órbitas en  $G$ .

### 1.9.3. Interacciones presa y depredador

El punto  $p_c = (1, 1)$ , es un equilibrio para las ecuaciones de Lotka-Volterra (1.16). La matriz:

$$f'(p_c) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores son  $\lambda = \pm i\sqrt{\alpha}$  y por tanto el comportamiento de las órbitas cerca de  $(1, 1)$  es dudoso desde el punto de vista de los resultados descritos en este capítulo. Sin embargo la función

$$V(u, v) = \alpha(u - \log u) + v - \log v - (\alpha + 1),$$

permite describir las órbitas cerca de  $(1, 1)$  (incluso en la totalidad del primer cuadrante). Se comprueba que:

- a)  $V$  es estrictamente convexa en  $u > 0, v > 0$ .
- b)  $(1, 1)$  es el único punto crítico de  $V$  en el primer cuadrante.
- c)  $V(u, v) \rightarrow \infty$  cuando  $(x, y)$  tiende a cualquier punto de los semiejes  $u > 0$  o  $v > 0$ . Además  $(1, 1)$  es un mínimo absoluto de  $V$  en el primer cuadrante en donde  $V$  toma el valor 0.

Para cada  $c > 0$  la curva de nivel  $\Gamma_c$

$$V(u, v) = c$$

representa una curva de Jordan (convexa) que contiene a  $(1, 1)$  en su interior. Como no contiene punto crítico alguno se concluye (ver Teorema 1.50 en el Anexo) que es la órbita de una solución periódica. Además,  $\Gamma_c \rightarrow (1, 1)$  cuando  $c \rightarrow 0+$ . Por tanto  $(1, 1)$  tiene la estructura de un “centro” y por ello este tipo de puntos se denomina un “centro no lineal”. Junto con el péndulo sin rozamiento, se obtiene otro ejemplo más donde la estructura lineal también se reproduce en el caso no lineal. El primer cuadrante está lleno de órbitas cerradas que rodean al equilibrio  $(1, 1)$ . Representan las fluctuaciones periódicas del sistema presa depredador en torno a sus valores de equilibrio.

Se comprueba asimismo que el origen  $(0, 0)$ , el estado de extinción del sistema, es un punto de silla. Los ejes constituyen sus variedades estable e inestable.

*Observación 1.34.* El sistema (1.16) no siendo Hamiltoniano tiene exactamente las mismas órbitas que

$$\begin{cases} u' = V_v \\ v' = -V_u. \end{cases}$$

Basta multiplicar ambas ecuaciones por  $\mu = uv$  para obtener (1.16). Se le aplican así las conclusiones de la Proposición 1.46.

## 1.9.4. Ejercicios

1. Decidir si los sistemas que siguen son de tipo gradiente o hamiltoniano. En todos los casos estúdiense sus órbitas.

- a)  $x' = x + 2y, y' = -y$   
 b)  $x' = y_2 + 2xy, y' = x_2 + 2xy$   
 c)  $x' = x_2 - 2xy, y' = y_2 - 2xy$   
 d)  $x' = x_2 - 2xy, y' = y_2 - x_2$   
 e)  $x' = -\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} y, y' = -2 \operatorname{sen} x \cos x \cos y.$

2. Se considera la ecuación lineal:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- a) Déense condiciones para que sea un sistema gradiente calculando en ese caso la función  $V$ .  
 b) La misma cuestión ahora relativa a sistemas hamiltonianos.  
 3. Hállense los puntos singulares y decídase –siempre que sea posible– el comportamiento de las órbitas en las proximidades de dichos puntos:

- a)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 - x, \end{cases}$$

- b)

$$\begin{cases} u' = v + u - \frac{1}{3}u^3 \\ v' = -\varepsilon u \end{cases} \quad (\varepsilon > 0),$$

- c)

$$u'' + cu' + u(1 - u) = 0 \quad c \in \mathbb{R}.$$

En el caso a) demuéstrese que las soluciones  $(x(t), y(t))$  de la ecuación hacen constante la función:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4.$$

4. Estúdiense las órbitas de la ecuación:

$$x'' + \operatorname{sen} x = 0.$$

5. Estudiar las órbitas de la ecuación:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 - x, \end{cases}$$

**1.9.5. Ejercicios adicionales**

1. Hállense los puntos singulares y decídase –siempre que sea posible– el comportamiento de las órbitas en las proximidades de dichos puntos:

a)  $x' = y - 1, y' = x + y + 5$

b)  $x' = 3x^2 - xy, y' = 4xy - 3y^2$

c)  $x' = (x + 1)(y - 2), y' = x^2 - x - 2.$

d)  $x'_1 = 1 - x_2, x'_2 = x_1^3 + x_2$

e)  $x'_1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1), x'_2 = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$

2. Estúdiense las órbitas de los siguientes sistemas autónomos no lineales:

a)  $x' = x^2, y' = x^2 + y^2 + xy.$

b)  $x' = x + y + 6, y' = 3x - y - 6$

c)  $x' = x^2 - 2y^{-3}, y' = 3x^2 - 2xy.$

3. Analizar las órbitas de la ecuación:

$$\begin{cases} x' = (-3x - y)(x^2 + y^2 - 1) \\ y' = 2x(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

*Indicación.* Obsérvese que, tomando las debidas precauciones, la ecuación orbital es sencilla.

## 1.10. Soluciones periódicas y el problema de los dos cuerpos

Una cuestión de capital importancia de la que no se ha tratado es la de la existencia de órbitas cerradas de ecuaciones autónomas, que se conocen como oscilaciones libres o ciclos entre otros nombres.

El ejemplo fundamental de órbitas cerradas lo brindan las órbitas de objetos celestes (estrellas, planetas, satélites, etc) que es de donde se importó precisamente la terminología “órbita”.

El problema de los dos cuerpos, que tratamos a continuación, se sitúa en los propios orígenes del cálculo infinitesimal.

Se consideran dos cuerpos o masas  $m_1$  y  $m_2$  (dos objetos celestes) que interactúan entre sí por efecto de la atracción gravitatoria mutua. Una prueba rigurosa de que el movimiento relativo de los mismos siempre es una cónica la dio Newton por vez primera al integrar de forma geométrica las ecuaciones del problema.

Como se explicó en el Capítulo I—Ejemplo ??—si  $\bar{r}$  es el centro de gravedad,  $\bar{x}_1 - \bar{r}$ ,  $\bar{x}_2 - \bar{r}$  son las posiciones relativas de los cuerpos con respecto al centro de gravedad,  $\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$  entonces

$$\bar{x}_1 - \bar{r} = -\theta\bar{x}, \quad \bar{x}_2 - \bar{r} = (1 - \theta)\bar{x},$$

donde  $1 - \theta = m_1/M$ ,  $\theta = m_2/M$  y finalmente:

$$\ddot{\bar{x}} = -\mu \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|^3},$$

donde  $\mu = GM = G(m_1 + m_2)$ . El movimiento de  $\bar{x}$  es plano, basta con derivar el producto vectorial:

$$(\bar{x} \times \dot{\bar{x}})' = \dot{\bar{x}} \times \dot{\bar{x}} + \bar{x} \times \ddot{\bar{x}} = 0,$$

luego  $\bar{x} \times \dot{\bar{x}} = e$  ( $e$  constante) y  $\bar{x} \cdot e = 0$ . El movimiento es pues plano.

Usando entonces coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  se llega a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - r\dot{\theta}^2 &= -\frac{\mu}{\rho^2}, \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} &= 0. \end{aligned}$$

De la segunda relación se deduce que  $\mathcal{J} = \rho^2\dot{\theta}$  es una constante del movimiento que resulta especialmente relevante. En efecto, el área  $A$  barrida por la órbita entre los instantes  $t_0$  y  $t$  (de ángulos correspondientes  $\theta_0$  y  $\theta$ ) resulta ser:

$$A(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} \rho(\theta_1)^2 d\theta_1,$$

en donde  $\rho = \rho(\theta)$  en la órbita. Como  $\rho = \rho(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$ , la velocidad areolar  $(A(\theta(t)))'$  vale:

$$\dot{A} = \frac{1}{2} \rho^2(t) \dot{\theta}(t).$$

La conservación de  $\mathcal{J}$  es entonces una prueba de la segunda ley de Kepler.

Por otra parte:

$$dt = \frac{\rho^2}{\mathcal{J}} d\theta,$$

luego, si  $h = h(t)$  es una función de  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{dh}{d\theta}, \\ \frac{d^2h}{dt^2} &= \frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{dh}{dt} \right). \end{aligned}$$

Para  $\rho = \rho(\theta)$ :

$$\frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\mathcal{J}}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) = -\frac{\mu}{\rho^2} + \frac{\mathcal{J}^2}{\rho^3}.$$

Poniendo  $u = \frac{1}{\rho}$  llegamos por fin a:

$$u'' + u = \frac{\mu}{\mathcal{J}^2},$$

de donde:

$$u = \frac{\mu}{\mathcal{J}^2} + C \cos(\theta - \omega), \quad B > 0. \quad (1.21)$$

El valor de las constantes  $\mathcal{J}$ ,  $\omega$  y  $C$  viene dado por las condiciones iniciales:

$$\bar{x}_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}, \quad \dot{\bar{x}}_0 = \rho_1 e^{i\theta_1},$$

en la forma:

$$\dot{\rho}_0 = \rho_1 \cos(\theta_1 - \theta_0), \quad \dot{\theta}_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0} \sin(\theta_1 - \theta_0), \quad \mathcal{J} = \rho_1 \rho_0 \sin(\theta_1 - \theta_0),$$

donde  $\dot{\rho}_0 = \dot{\rho}(0)$ ,  $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(0)$ , mientras  $C$  y el ángulo  $\omega$  se deducen de la ecuación:

$$C e^{i\omega} = \left( \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{\mu}{\mathcal{J}^2} \right) - \frac{\dot{\rho}_0}{\mathcal{J}} i \right) e^{i\theta_0},$$

en particular:

$$C = \sqrt{\left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{\mu}{\mathcal{J}^2} \right)^2 + \left( \frac{\dot{\rho}_0}{\mathcal{J}} \right)^2}.$$

De la ecuación (1.21)

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)},$$

con  $p^{-1} = \frac{\mu}{\mathcal{J}^2}$ ,  $e = Cp$ , que es la ecuación de una cónica de excentricidad  $e$ .

No es difícil comprobar que  $e = 0$  corresponde a la circunferencia,  $0 < e < 1$  a la elipse,  $e = 1$  a la parábola y  $e > 1$  al caso de la hipérbola. En consecuencia,

las órbitas del movimiento relativo son cónicas. Obsérvese que en el caso de las elipses y circunferencias se obtienen órbitas cerradas. Se deduce así de forma directa la existencia de movimientos periódicos en el problema.

En todos los casos, el origen  $\bar{x} = 0$  está localizado en uno de los focos de la cónica, lo que significa que los planetas orbitan entorno al centro de gravedad que constituye uno de los focos de la cónica. Cuando  $m_1$  es mucho más grande que  $m_2$  (sol–tierra) se puede suponer que  $m_1$  ocupa el centro de gravedad, que se mueve en movimiento rectilíneo uniforme y que es  $m_2$  quien orbita alrededor de  $m_1$ . Esta es la primera ley de Kepler que afirma que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses y que éste se halla en uno de sus focos.

Suponiendo órbitas elípticas  $\omega$  constituye el argumento del “periastro” (“perihelio” en el caso del sistema sol–tierra, “perigeo” en el sistema tierra–luna). Es el ángulo que marca la posición más próxima del cuerpo ligero  $m_1$  (la tierra) con respecto al más pesado  $m_2$  (el sol).

Con sólo un poco de trabajo más se prueba fácilmente la tercera ley de Kepler para órbitas elípticas que afirma que el cuadrado del periodo  $T$  es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita, con una constante que es independiente del planeta (ver más detalles en [8], una excelente introducción a la mecánica celeste). El periodo  $T$  es, obviamente, el año del planeta.

### 1.10.1. Ejercicios

1. Dedúzcanse las expresiones para  $\dot{\rho}_0$ ,  $\dot{\theta}_0$ ,  $\mathcal{J}$ ,  $C$  y  $\omega$  presentadas en el problema de los dos cuerpos. Demuéstrese la afirmación allí enunciada sobre la posición que marca el perihelio.

*Indicación.* Se tiene:

$$\bar{x} = \rho e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{x}} = (\dot{\rho} + i\rho\dot{\theta})e^{i\theta}.$$

## 1.11. Anexo: Órbitas que son curvas de Jordan

Presentamos algunos lemas (cf. [14]). En lo que sigue usamos las letras  $J, I$  para designar los intervalos cerrados  $[a, b]$  y  $[\alpha, \beta]$ , respectivamente.

**Lema 1.48.** *Sea  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J = [a, b]$ , continua y localmente inyectiva. Entonces  $h$  es inyectiva y por tanto estrictamente monótona.*

*Demostración.* Observamos que si  $h$  es inyectiva en  $J$  entonces  $h(a) < h(b)$  ó  $h(a) > h(b)$ . En el primer caso por ejemplo,  $h(a) < h(y) < h(b)$  si  $a < y < b$  pues si, pongamos por caso,  $h(y) > h(b)$  existiría  $a < c < y$  con  $h(c) = h(b)$  (teorema del valor medio) lo cual no es posible. Si  $a < x < y < b$  aplicamos el razonamiento en el intervalo  $[a, y]$  y concluimos que  $h(a) < h(x) < h(y)$ . Por tanto  $h$  es creciente (estrictamente) en  $J$ .

Ahora probamos el lema.  $h$  es inyectiva en el intervalo  $[a, a + \varepsilon]$  por tanto creciente (por ejemplo) en  $[a, a + \varepsilon]$ . Ponemos:

$$c = \sup\{t \in [a, b] : h \text{ creciente en } [a, t]\}.$$

Ha de ser  $c = b$  pues si  $c < b$  entonces  $h$  es estrictamente monótona en  $[c - \delta, c + \delta]$  para cierto  $\delta > 0$  y por tanto creciente en dicho intervalo. Esto contradice la definición de  $c$ . □

**Lema 1.49.** *Sea  $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización de Jordan con  $C = \zeta(I)$  y  $z : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización  $C^1$  (Observación 1.7) con  $z(J) \subset C$ . Entonces existe una única función continua y estrictamente monótona  $h : J \rightarrow I$  tal que:*

$$z(t) = \zeta(h(t))$$

para cada  $t \in J$ .

*Demostración.* Como  $\zeta$  es inyectiva  $h = \zeta^{-1} \circ z$ .

Por otro lado  $z(t)$  es localmente inyectiva porque  $z'(t) \neq 0$  en  $J$ . En efecto, ello implica que cada  $t_0 \in J$  admite un entorno  $U$  donde alguna de las componentes  $z_i(t)$  de  $z(t)$  es inyectiva, luego la propia  $z(t)$  es inyectiva en  $U$ . En consecuencia,  $h$  también es localmente inyectiva.

Ahora  $\zeta : J \rightarrow C$ ,  $C = \zeta(I)$  es un homeomorfismo porque es continua, biyectiva y  $C$  es compacto (esta observación es válida para todas las parametrizaciones de Jordan). Así  $h$  también es continua y en virtud del lema precedente hemos terminado. □

En el siguiente resultado consideramos  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G$  un abierto,  $f$  de clase  $C^1$  y la ecuación diferencial autónoma (1.1):

$$x' = f(x).$$

**Teorema 1.50.** *Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  una curva de Jordan que no contiene puntos críticos de la ecuación (1.1). Sea  $x(t)$ ,  $t \in (\alpha_1, \omega_1)$ , una solución maximal de dicha ecuación cuya órbita  $\gamma \subset C$ . Entonces  $x(t)$  es una solución periódica y  $\gamma = C$ .*

*Demostración.* Como  $C$  es un compacto de los resultados de prolongación se sigue que  $(\alpha_1, \omega_1) = \mathbb{R}$  y  $x(t)$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ .

Suponemos que  $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I = [\alpha, \beta]$  es una parametrización de Jordan cerrada que parametriza  $C$ , por tanto  $\zeta$  es inyectiva en  $[\alpha, \beta]$  y  $\zeta(\alpha) = \zeta(\beta)$ . Ahora observamos que la extensión  $T$ -periódica  $\bar{\zeta}$  de  $\zeta$  a  $\mathbb{R}$ ,  $T = \beta - \alpha$ , es tal que la restricción  $\bar{\zeta}|_{I_0}$  de  $\bar{\zeta}$  a cualquier intervalo de la forma  $I_0 = [t_0, t_0 + T]$  es también una parametrización de Jordan de  $C$ . Esto nos permite suponer que el valor inicial  $x(0)$  de la solución coincide con el punto inicial-final de la parametrización:

$$x(0) = \zeta(\alpha) = \zeta(\beta).$$

Ahora definimos:

$$c = \sup\{t > 0 : x[0, t] \neq C\}.$$

Primero observamos que  $c > 0$  porque  $x[0, \varepsilon] \rightarrow x(0) = \zeta(\alpha)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0+$  y  $C$  no es un punto.

Por otro lado, para  $0 < c' < c$ ,  $x[0, c'] \subset C' \subset C$  donde  $C'$  es un arco de Jordan. En efecto, observamos que  $C' \setminus \{x(0)\} \approx (\alpha, \beta)$  (“ $\approx$ ” = “homeomorfo”). Por otro lado,  $x(0, c')$  es conexo en  $C' \setminus \{x(0)\}$  luego  $\zeta^{-1}(x(0, c'))$  es un subintervalo estrictamente contenido en  $(\alpha, \beta)$  lo que significa que  $\zeta^{-1}(x(0, c')) \subset (\alpha, \beta - \varepsilon)$  o que  $\zeta^{-1}(x(0, c')) \subset (\alpha + \varepsilon, \beta)$  para algún  $\varepsilon$ . Suponiendo por ejemplo el primer caso,  $x(0, c') \subset \zeta[\alpha, \beta - \varepsilon]$ . Por continuidad  $x[0, c'] \subset \zeta[\alpha, \beta - \varepsilon]$  que prueba la afirmación formulada si se toma  $C' = \zeta[\alpha, \beta - \varepsilon]$ .

Por el lema precedente existe  $h : [0, c'] \rightarrow [\alpha, \beta - \varepsilon]$  continua, creciente y única tal que:

$$x(t) = \zeta(h(t)) \quad t \in [0, c'].$$

Como  $c' < c$  es arbitrario la aplicación  $h$  se puede extender por unicidad a una aplicación continua y creciente  $h : [0, c) \rightarrow [\alpha, \beta]$  tal que

$$x(t) = \zeta(h(t))$$

para todo  $t \in [0, c)$ . Vamos a llamar  $\gamma = \lim_{t \rightarrow c} h(t)$  que existe y cumple  $\alpha < \gamma \leq \beta$ . En primer lugar podemos concluir que  $c < \infty$  pues en caso contrario existiría:

$$x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow \gamma} \zeta(s).$$

Entonces  $x^*$  sería un punto crítico de la ecuación en  $\gamma$  lo cual no es posible.

Como  $c < \infty$  extendemos  $h$  a  $[0, c]$  definiendo  $h(c) = \gamma$ . Tenemos entonces que  $x(c) = \zeta(\gamma)$  y afirmamos que  $\gamma = \beta$ . Caso contrario  $\gamma < \beta$  y

$$x[0, c] = \zeta[\alpha, \gamma] \neq C = \zeta[\alpha, \beta].$$

Como  $\zeta[\beta - 2\varepsilon_1, \beta - \varepsilon_1] \cap x[0, c] = \emptyset$  ( $\varepsilon_1$  pequeño) resulta  $x[0, c + \varepsilon] \neq C$  que contradice la definición de  $c$ . Por tanto ha de ser  $\gamma = \beta$  y

$$x[0, c] = C$$

con  $x(c) = h(\beta) = x(0)$ . □



Se demuestra a continuación el Teorema 1.21

**Teorema 1.51.** *Si  $\gamma$  es una órbita compacta de (1.1) y no es un punto crítico, entonces es la órbita de una solución periódica.*

*Demostración.* Demostramos que  $\gamma$  no puede ser abierta. Si  $\gamma$  es compacta, la solución  $x(t)$  que la parametriza está definida en todo  $\mathbb{R}$  y  $x : \mathbb{R} \rightarrow \gamma$  es una biyección continua en caso de ser  $\gamma$  abierta. Por otro lado la condición  $x'(t) \neq 0$  implica que  $x(\cdot)$  define un homeomorfismo local sobre su imagen  $\gamma$ . En efecto cada punto  $t_0$  es centro de un intervalo compacto  $I$  sobre el que  $x$  es inyectiva. Como  $x(I)$  es compacto,  $x : I \rightarrow x(I)$  es un homeomorfismo (de hecho este argumento prueba que todas las soluciones no constantes definen una aplicación recubridora sobre su órbita). Si  $\gamma$  es abierta (de acuerdo al teorema de clasificación) resulta que  $\mathbb{R}$  es homeomorfo a  $\gamma$  y  $\gamma$  no puede ser compacta.  $\square$



## Capítulo 2

# Problemas de contorno. Teoría de Sturm–Liouville

### 2.1. Ecuaciones lineales. Solución fundamental

Sean  $p_0(t), \dots, p_n(t)$  funciones continuas en  $[a, b]$  en donde  $p_0(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . Dada  $f \in C[a, b]$ , el problema de valor inicial para la ecuación diferencial lineal de orden  $n$ :

$$p_0(t)x^{(n)}(t) + \dots + p_n(t)x(t) = f(t) \quad t \in [a, b]$$

consiste en resolver:

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f \\ x^{(k)}(a) = \eta_k, \quad k = 0, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2.1)$$

en donde la expresión

$$\mathcal{L}x = p_0(t)x^{(n)}(t) + \dots + p_n(t)x(t),$$

es lo que se denomina un operador diferencial lineal de orden  $n$ .

El operador  $\mathcal{L}$  define una aplicación lineal:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} : & C^n[a, b] & \longrightarrow & C[a, b] \\ & x(t) & \longmapsto & \mathcal{L}x(t). \end{array}$$

El núcleo de  $\mathcal{L}$ :

$$\text{Ker}(\mathcal{L}) = \{x(t) \in C^n[a, b] : \mathcal{L}x = 0\}$$

es el espacio de soluciones de la ecuación homogénea

$$\mathcal{L}x = 0.$$

La solución del problema (2.1) se calcula como la suma:

$$x(t) = y(t) + z(t)$$

donde  $y$  resuelve:

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = 0 \\ y^{(k)}(a) = \eta_k, \quad k = 0, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2.2)$$

mientras  $z$  es solución de:

$$\begin{cases} \mathcal{L}z = f \\ z^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2.3)$$

### 2.1.1. Solución de (2.2)

Para hallar la solución de (2.2) se sabe que el espacio de soluciones de la ecuación homogénea es un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Una base  $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$  del mismo es lo que se conoce como un sistema fundamental de soluciones de la ecuación. Las soluciones de:

$$\mathcal{L}y = 0,$$

tienen la forma:

$$y(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Para el cumplimiento de las condiciones iniciales las constantes deben ser solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \Big|_{t=a} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

El determinante de la matriz de coeficientes

$$W(t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

se denomina el determinante Wronskiano de las funciones  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ .

Se sabe que  $n$  soluciones  $\{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$  de la ecuación

$$\mathcal{L}y = 0,$$

conforman un sistema fundamental en  $[a, b]$  si y sólo si su Wronskiano

$$W(t) = W(\psi_1, \dots, \psi_n)(t) = \begin{vmatrix} \psi_1(t) & \dots & \psi_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Por lo tanto el sistema (2.4) es resoluble. Más aún, las condiciones iniciales pueden fijarse en un tiempo inicial  $t_0 \in [a, b]$  cualquiera porque la matriz de coeficientes es en ese caso

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \Big|_{t=t_0}$$

cuyo determinante  $W(t_0)$ , sabemos ahora, es no nulo.

Por otro lado, si  $\{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$  son  $n$  soluciones de la ecuación

$$\mathcal{L}y = 0,$$

se sabe que su Wronskiano  $W(t) = W(\psi_1, \dots, \psi_n)$  cumple la ecuación diferencial:

$$W' = -\frac{p_1(t)}{p_0(t)}W \quad t \in [a, b].$$

Este es el contenido del teorema de Liouville. Si  $t_0 \in [a, b]$  es cualquier valor fijado se tiene

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds}.$$

Por tanto la condición necesaria y suficiente para que  $W(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$  es que  $\exists t_0 \in [a, b]$  tal que  $W(t_0) \neq 0$ . Esto simplifica las comprobaciones de cuándo es sistema fundamental una familia dada  $\{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$  de soluciones de  $\mathcal{L}y = 0$ .

### 2.1.2. Solución de (2.3)

Usando un sistema fundamental de soluciones de la ecuación,  $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ , buscamos la solución de (2.3) en la forma:

$$z(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \cdots + c_n(t)\varphi_n(t) \quad (2.5)$$

donde, como se ve, las constantes  $c_i$  que se empleaban para resolver (2.2) se han reemplazado ahora por funciones  $c_i(t)$  (por eso el resultado final del cálculo se llama la “fórmula de variación de las constantes”). A las  $c_i(t)$  se les pide que satisfagan el sistema:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{f(t)}{p_0(t)} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Con esto se logra que para  $0 \leq k \leq n-1$ :

$$z^{(k)}(t) = c_1(t)\varphi_1^{(k)}(t) + \cdots + c_n(t)\varphi_n^{(k)}(t) \quad t \in [a, b], \quad (2.7)$$

mientras:

$$z^{(n)}(t) = \frac{f(t)}{p_0(t)} + c_1(t)\varphi_1^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)\varphi_n^{(n)}(t) \quad t \in [a, b].$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}z = f.$$

La solución de (2.6) es:

$$c'_i(t) = \frac{1}{p_0(t)W(t)}W_{ni}(t)f(t) \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde  $W_{ni}(t)$  es el adjunto del elemento  $ni$  en la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Integrando:

$$c_i(t) = \int_a^t \frac{1}{p_0(s)W(s)}W_{ni}(s)f(s) ds.$$

Como  $c_i(a) = 0$ , yendo a (2.7) se consigue que:

$$z^{(k)}(a) = 0 \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Substituyendo en (2.8) resulta que:

$$z(t) = \int_a^t \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_0(s)W(s)}W_{ni}(s)f(s)\varphi_i(t) ds,$$

expresión que, bajo el nombre de fórmula de variación de las constantes, suministra la solución de (2.3).

La expresión bajo el signo integral se puede representar como:

$$R(t, s) = \frac{1}{p_0(s)W(s)} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_n(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \\ \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{vmatrix},$$

que se conoce como la “función de influencia” del operador  $\mathcal{L}$ .

**Proposición 2.1.** Para  $f \in C[a, b]$  la solución del problema (2.3) tiene la forma:

$$z(t) = \int_a^t R(t, s)f(s) ds.$$

En el cuadrado  $Q = [a, b] \times [a, b]$  definimos la función:

$$K(t, s) = \begin{cases} R(t, s) & a \leq s \leq t \\ 0 & t < s \leq b, \end{cases}$$

que se denomina la solución fundamental del operador  $\mathcal{L}$ .

**Proposición 2.2.** *La solución fundamental  $K(t, s)$  del operador  $\mathcal{L}$  tiene las siguientes propiedades:*

- i) Las funciones  $K, \frac{\partial K}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-2} K}{\partial t^{n-2}}$  son continuas en  $Q$ .
- ii) La función  $\frac{\partial^{n-1} K}{\partial t^{n-1}}$  es continua en cada uno de los triángulos  $Q^- = \{a \leq s \leq t\}$  y  $Q^+ = \{t \leq s \leq b\}$ . Sin embargo, para  $a < s < b$  se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow s^+} \frac{\partial^{n-1} K}{\partial t^{n-1}}(t, s) - \lim_{t \rightarrow s^-} \frac{\partial^{n-1} K}{\partial t^{n-1}}(t, s) = \frac{1}{p_0(s)}.$$

- iii) Como función de la variable  $t$ ,  $K(t, s)$  resuelve la ecuación  $\mathcal{L}x = 0$  en cada uno de los intervalos  $a \leq t \leq s$  y  $s \leq t \leq b$  por separado.

- iv) La solución del problema (2.3) se representa en la forma:

$$z(t) = \int_a^b K(t, s) f(s) ds.$$

*Observación 2.1.* Es usual definir solución fundamental  $\Gamma(t, s)$  del operador  $\mathcal{L}$  como toda función que cumple las propiedades i), ii), iii) de la proposición. Debe notarse que hay una infinidad de tales funciones  $\Gamma$ . La condición iv) determina  $\Gamma$  con unicidad y es lo que aquí denominamos solución fundamental.

*Ejemplo 2.2.* Para el operador  $\mathcal{L}x = x'' - x$  en el intervalo  $[0, 1]$ ,  $\varphi_1 = \cosh t$ ,  $\varphi_2 = \sinh t$  y se tiene que  $p_0 W = 1$ .

$$R(t, s) = \sinh(t - s).$$

La solución de

$$x'' - x = f(t) \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

es

$$z(t) = \int_0^t \sinh(t - s) f(s) ds = \int_0^1 K(t, s) f(s) ds,$$

$$K(t, s) = \begin{cases} \sinh(t - s) & a \leq s \leq t \\ 0 & t < s \leq b \end{cases}.$$

Para los cálculos de la solución fundamental y más tarde la función de Green, la expresión del término  $p_0W$  tiene gran importancia. Trataremos especialmente con operadores de segundo orden:

$$\mathcal{L}(x) = p_0(t)x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x.$$

De estos casi siempre trabajaremos con operadores de la forma:

$$\mathcal{L}(x) = (p(t)x')' + q(t)x, \quad (2.8)$$

que diremos adoptan la “forma autoadjunta”.

**Proposición 2.3.** *Sea  $\mathcal{L}$  un operador lineal de segundo orden de la forma (2.8). Entonces, cualesquiera que sean las soluciones  $\psi_1, \psi_2$  de  $\mathcal{L}x = 0$  se tiene que su Wronskiano  $W(t)$  cumple:*

$$p(t)W(t) = c,$$

donde  $c$  es una constante.

### 2.1.3. Ejercicios

1. Bajo qué condiciones sobre los números  $a_{ij}$  es  $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$  un sistema fundamental de soluciones de

$$x'' - x = 0,$$

donde

$$\varphi_1 = a_{11}e^t + a_{21}e^{-t}, \quad \varphi_2(t) = a_{12}e^t + a_{22}e^{-t}.$$

2. Hallar la solución fundamental de los siguientes operadores diferenciales lineales:

a)  $\mathcal{L}x = x'' + x$

b)  $\mathcal{L}x = x'' - x$

c)  $\mathcal{L}x = x'' - 3x' + 2x$

d)  $\mathcal{L}x = x'' - 2x' + 5x$

e)  $\mathcal{L}x = t^2x'' - 2tx' + 2x$

f)  $\mathcal{L}x = (t-1)^2x'' + (t-1)x' - x.$

3. Hállese la solución de los siguientes problemas de valor inicial:

a)

$$\begin{cases} x'' + x = t \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \end{cases}$$



b)

$$\begin{cases} x'' - x = -1 \\ x(0) = 1, x'(0) = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = \frac{1}{2} \\ x(0) = \frac{1}{2}, x'(0) = 0 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x'' - 2x' + 5x = 5t \\ x(0) = 0, x'(0) = 1 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} t^2 x'' - 2tx' + 2x = 2 \\ x(1) = 1, x'(1) = 0 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} (t-1)^2 x'' + (t-1)x' - x = 1 \\ x(2) = -1, x'(2) = 0. \end{cases}$$

4. ♣ Sea  $\Gamma(t, s)$  una solución fundamental del operador

$$\mathcal{L}x = \sum_{i=0}^n p_i(t)x^{(n-i)},$$

de acuerdo con la definición dada en la Observación 2.1. Pruébese que la función

$$z(t) = \int_a^t \Gamma(t, s)f(s) ds$$

define una solución de:

$$\mathcal{L}x = f.$$

## 2.2. Problemas de contorno

Nos centramos en lo que sigue en operadores diferenciales lineales de segundo orden

$$\mathcal{L}x = p_0(t)x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x,$$

donde  $t \in [a, b]$  y  $p_i(t) \in C[a, b]$ ,  $0 \leq i \leq 2$ , siendo  $p_0(t) \neq 0$  en  $[a, b]$ .

Un problema de contorno para el operador  $\mathcal{L}$  consiste en resolver:

$$\begin{cases} p_0(t)x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x = f(t) & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}_1(x) = \eta_1 \\ \mathcal{B}_2(x) = \eta_2, \end{cases} \quad (2.9)$$

en donde  $f(t) \in C[a, b]$ ,  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$  y donde las expresiones  $\mathcal{B}_i$  son:

$$\mathcal{B}_1(x) = m_{11}x(a) + m_{12}x'(a) + n_{11}x(b) + n_{12}x'(b),$$

y

$$\mathcal{B}_2(x) = m_{21}x(a) + m_{22}x'(a) + n_{21}x(b) + n_{22}x'(b).$$

En (2.9), las relaciones

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1(x) = \eta_1 \\ \mathcal{B}_2(x) = \eta_2, \end{cases} \quad (2.10)$$

se denominan las “condiciones de contorno”<sup>1</sup>. Nótese que se imponen a la solución en los extremos (la frontera) del intervalo de definición  $[a, b]$  de la ecuación. Las condiciones de contorno se abrevian en formato vectorial en la forma unificada:

$$\mathcal{B}(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1(x) \\ \mathcal{B}_2(x) \end{pmatrix}$$

de suerte que:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x) &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(a) \\ x'(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(b) \\ x'(b) \end{pmatrix} \\ &= M \begin{pmatrix} x(a) \\ x'(a) \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} x(b) \\ x'(b) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el problema de contorno se escribe en forma abreviada como:

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f \\ \mathcal{B}(x) = \eta \end{cases}$$

donde

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}.$$

---

<sup>1</sup>También condiciones de frontera o condiciones en el borde, “boundary conditions” en inglés.

### 2.2.1. Algunas condiciones de contorno distinguidas

En este curso nos ocuparemos de manera exclusiva de las condiciones de contorno “separadas” o de Sturm:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1(x) = \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) \\ \mathcal{B}_2(x) = \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b), \end{cases} \quad (2.11)$$

donde los vectores  $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)$  son ambos no nulos. Se llaman separadas porque los valores de  $x, x'$  en  $x = a, b$  aparecen separados en las condiciones de contorno.

Casos particulares de éstas son las condiciones de *Dirichlet*:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1(x) = x(a) \\ \mathcal{B}_2(x) = x(b), \end{cases}$$

las condiciones de *Neumann*:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1(x) = x'(a) \\ \mathcal{B}_2(x) = x'(b), \end{cases}$$

y las condiciones de *Robin*:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1(x) = -x'(a) + \alpha x(a) \\ \mathcal{B}_2(x) = x'(b) + \beta x(b), \end{cases} \quad \alpha, \beta \geq 0.$$

Así, los siguientes son ejemplos de problemas de Dirichlet, Neumann y Robin, respectivamente:

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f(t) & t \in [a, b] \\ x(a) = \eta_1, \quad x(b) = \eta_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f(t) & t \in [a, b] \\ x'(a) = \eta_1, \quad x'(b) = \eta_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f(t) & t \in [a, b] \\ -x'(a) + \alpha x(a) = \eta_1, \quad x'(b) + \beta x(b) = \eta_2. \end{cases}$$

Un ejemplo de condiciones “no separadas” son las condiciones *periódicas*:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1(x) = x(b) - x(a) \\ \mathcal{B}_2(x) = x'(b) - x'(a). \end{cases}$$

Trataremos de ellas en algunos ejercicios. Un problema de contorno bajo condiciones periódicas tiene el aspecto siguiente:

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f(t) & t \in [a, b] \\ x(b) - x(a) = \eta_1, \quad x'(b) - x'(a) = \eta_2. \end{cases}$$

### 2.2.2. Teorema de la alternativa

En la presente sección continuamos bajo las hipótesis con las que venimos trabajando, tratamos con el operador:

$$\mathcal{L}x = p_0(t)x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x,$$

donde las funciones  $p_i(t)$  son continuas en  $[a, b]$  y  $p_0(t)$  no se anula en dicho intervalo.

Supongamos que  $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una aplicación lineal. Resulta conocido que el que  $L$  sea sobreyectiva equivale a que sea inyectiva. Otra manera de decir lo mismo es que la existencia de una solución de la ecuación en  $x$ :

$$Lx = y,$$

$\forall y \in \mathbb{R}^N$ , equivale a que la ecuación

$$Lx = 0,$$

sólo admite la solución  $x = 0$ . Esto no es cierto en dimensión infinita. Sin embargo, los problemas de contorno que nos traemos entre manos “retienen” la propiedad que acabamos de repasar para aplicaciones lineales en  $\mathbb{R}^N$ .

En el siguiente resultado el operador  $\mathcal{B}$  representa el juego general (2.10) de condiciones de contorno en  $x = a, b$ .

**Teorema 2.4** (Teorema de la Alternativa). *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

a) *El problema de contorno:*

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = \eta \end{cases} \quad (2.12)$$

*admite una solución  $\forall f \in C[a, b]$  y  $\forall \eta \in \mathbb{R}^2$ .*

b) *El problema de contorno:*

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = 0 & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

*sólo admite la solución trivial  $x = 0$ .*

*Demostración.* Las soluciones de

$$\mathcal{L}x = f$$

son

$$x = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + z(t)$$

donde

$$z(t) = \int_a^b K(t, s)f(s) ds,$$

con  $K$  la solución fundamental.

Las soluciones de (2.12) se calculan resolviendo:

$$\Lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \eta - \mathcal{B}(z), \quad (2.14)$$

donde:

$$\Lambda = \text{col}(\mathcal{B}(\varphi_1), \mathcal{B}(\varphi_2)) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1(\varphi_1) & \mathcal{B}_1(\varphi_2) \\ \mathcal{B}_2(\varphi_1) & \mathcal{B}_2(\varphi_2) \end{pmatrix},$$

mientras las del problema homogéneo ( $z(t) = 0$ ) son

$$\Lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.15)$$

La validez tanto de a) como b) equivale a que

$$\det \Lambda \neq 0.$$

□

**Definición 2.5.** Se dice que el problema de contorno

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = 0 & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0 \end{cases}$$

es no crítico, también que las condiciones de contorno  $\mathcal{B}$  son no críticas para el operador  $\mathcal{L}$ , cuando el problema homogéneo (2.13) sólo admite la solución trivial  $x = 0$ . En caso contrario se dirá que el problema (o las condiciones) son críticas.

**Corolario 2.6.** Si el problema de contorno (2.13) es no crítico entonces el problema (2.12) admite, para cada  $f \in C[a, b]$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^2$ , una única solución.

*Demostración.* La diferencia  $x_1(t) - x_2(t)$  de dos posibles soluciones del problema (2.12) es una solución  $y(t)$  del problema homogéneo (2.13). Si b) se cumple la diferencia  $y(t)$  es cero y ello quiere decir que (2.12) sólo admite una solución. Esto por otra parte ya se observaba directamente en la demostración del teorema porque el sistema para  $c_1, c_2$  es resoluble con unicidad si se cumple b). □

*Observación 2.3.* Como se ha visto, la matriz  $\Lambda$  juega un papel importante a la hora de resolver un problema de contorno. Si  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  es un sistema fundamental de soluciones del operador  $\mathcal{L}$  y trabajamos en el intervalo  $[a, b]$ , listamos las matrices  $\Lambda$  correspondientes a las diversas condiciones de contorno:

1. Condiciones de Dirichlet:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_2(a) \\ \varphi_1(b) & \varphi_2(b) \end{pmatrix},$$

2. Condiciones de Neumann:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \varphi_1'(a) & \varphi_2'(a) \\ \varphi_1'(b) & \varphi_2'(b) \end{pmatrix},$$

3. Condiciones de Robin:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\varphi_1'(a) + \alpha\varphi_1(a) & -\varphi_2'(a) + \alpha\varphi_2(a) \\ \varphi_1'(b) + \beta\varphi_1(b) & \varphi_1'(b) + \beta\varphi_1(b) \end{pmatrix},$$

4. Condiciones de Periódicas:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \varphi_1(b) - \varphi_1(a) & \varphi_2(b) - \varphi_2(a) \\ \varphi_1'(b) - \varphi_1'(a) & \varphi_2'(b) - \varphi_2'(a) \end{pmatrix}.$$

*Ejemplo 2.4.* Estúdiense la resolubilidad del problema de contorno:

$$\begin{cases} x'' + x = g(t) & t \in [0, \pi] \\ x(0) + x'(0) = \eta_1 \\ x(\pi) = \eta_2, \end{cases}$$

donde  $g \in C[0, \pi]$ .

*Solución.* Un sistema fundamental es  $\varphi_1 = \cos t, \varphi_2 = \sin t$ . Al aplicar las condiciones de contorno:

$$\mathcal{B}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

como  $\det \Lambda = 1$  el problema admite una única solución para  $g$  y  $\eta$  arbitrarios.

La solución general de la ecuación es

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + z(t),$$

donde

$$z(t) = \int_0^t \sin(t-s)g(s) ds.$$

Nótese que

$$\mathcal{B}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ z(\pi) \end{pmatrix}.$$

Para hallar la solución del problema resolvemos el sistema:

$$\lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 - z(\pi) \end{pmatrix},$$

que da:

$$c_1 = \eta_2 - z(\pi) \quad c_2 = \eta_1 + \eta_2 - z(\pi).$$

La solución es:

$$x(t) = \{-\eta_2 \cos t + (\eta_1 + \eta_2) \sin t\} + \{z(\pi)(\cos t - \sin t) + z(t)\}.$$

En esta expresión hemos separado la parte que depende de  $\eta$  de la que depende de  $g$  (que es donde interviene  $z$ ).

*Observaciones 2.5.* Los problemas de contorno (2.9) poseen propiedades características de los problemas lineales. Si el problema homogéneo tiene soluciones no nulas (no se cumple b)) éstas forman un espacio vectorial. Si  $y(t)$  es una de éstas y sucede que el problema completo (2.12) admite una solución  $x_0(t)$  entonces,  $z(t) = x_0(t) + y(t)$  también es solución de (2.12). Es decir, si b) no se cumple y (2.12) posee una solución, entonces también posee infinitas soluciones.

Cuando el problema (2.13) es no crítico, para  $f \in C[a, b]$  y  $\eta \in \mathbb{R}^2$ , cada uno de los problemas:

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = 0 & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(y) = \eta \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}z = f(t) & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(z) = 0 \end{cases}$$

admite una única solución que denotamos:

$$y(t) = \mathcal{H}(\eta)(y), \quad z(t) = \mathcal{G}(f)(t),$$

respectivamente.

Los operadores:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow C^2[a, b] \\ \eta &\longmapsto y = \mathcal{H}(\eta) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \quad C[a, b] &\longrightarrow C_{\mathcal{B}}^2[a, b] \\ f &\longmapsto z = \mathcal{G}(f) \end{aligned}$$

se denominan los “operadores solución” de los correspondientes problemas de contorno. En el caso de  $\mathcal{G}$ , se denota:

$$C_{\mathcal{B}}^2[a, b] = \{x(t) \in C^2[a, b] : \mathcal{B}(x) = 0\}.$$

En este espacio se encuentran las soluciones del problema (2.12) cuando las condiciones de contorno son nulas. Los operadores  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{G}$  son lineales.

Obérvese que la solución  $x(t)$  del problema completo (2.12) se escribe

$$x(t) = y(t) + z(t) = \mathcal{H}(\eta) + \mathcal{G}(f).$$

El operador:

$$\begin{aligned} S : \quad \mathbb{R}^2 \times C[a, b] &\longrightarrow C^2[a, b] \\ (\eta, f) &\longmapsto x = \mathcal{H}(\eta) + \mathcal{G}(f) \end{aligned}$$

se denomina el operador solución del problema (2.12).

*Ejemplo 2.6.* En el ejemplo precedente (Ejemplo 2.4)

$$y = \mathcal{H}(\eta) = -\eta_2 \cos t + (\eta_1 + \eta_2) \sin t,$$

$$z = \mathcal{G}(g) = z(\pi)(\cos t - \sin t) + z(t).$$

**Proposición 2.7.** *El conjunto de soluciones del problema de contorno homogéneo (2.13) bajo condiciones separadas (2.11) constituye un espacio vectorial de dimensión uno, cuando las condiciones son críticas.*

## 2.2.3. Ejercicios

△ Condiciones de contorno y problemas de contorno.

1. Discutir en términos del parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}$  la existencia de soluciones de los problemas:

$$a) \begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, 1] \\ x(0) = \eta_1 \\ x(1) = \eta_2, \end{cases} \quad b) \begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, 1] \\ x'(0) = \eta_1 \\ x'(1) = \eta_2, \end{cases}$$

Para ello se aconseja empezar el estudio por el caso homogéneo  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ .

2. Hállese la solución de los problemas de contorno siguientes:

$$a) \begin{cases} x'' + x = 0 & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x(0) = \eta_1 \\ x(\frac{\pi}{2}) + x'(\frac{\pi}{2}) = \eta_2, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x'' - x = 0 & t \in [0, \log 2] \\ x'(0) = \eta_1 \\ x(\log 2) - x'(\log 2) = \eta_2, \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x'' - 3x' + 2x = 0 & t \in [0, \log 2] \\ x'(0) = \eta_1 \\ x'(\log 2) = \eta_2, \end{cases} \quad d) \begin{cases} x'' - 2x' + 5x = 0 & t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ x(0) = \eta_1 \\ x(\frac{\pi}{4}) = \eta_2, \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0 & t \in [1, 2] \\ x'(1) = \eta_1 \\ x(2) = \eta_2, \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} (t-1)^2 x'' + (t-1)x' - x = 0 & t \in [2, 3] \\ x(2) = \eta_1 \\ x'(3) = \eta_2. \end{cases}$$



### 2.2.4. La función de Green

En esta sección trabajamos con un operador

$$\mathcal{L}x = p_0(t)x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x,$$

de coeficientes continuos en  $[a, b]$  donde  $p_0$  no se anula nunca, junto con unas condiciones de contorno  $\mathcal{B}$  no críticas, es decir, el problema (2.13)

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = 0 & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0, \end{cases}$$

sólo admite la solución trivial  $x(t) = 0$ . Bajo estas hipótesis, para cada  $f(t) \in C[a, b]$ , el problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f(t) & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

admite una única solución:

$$x(t) = \mathcal{G}(f)(t)$$

donde  $\mathcal{G} : C[a, b] \rightarrow C_{\mathcal{B}}^2[a, b]$  representa el operador solución de (2.16).

**Definición 2.8.** *Bajo las condiciones precedentes sobre  $\mathcal{L}$  y las condiciones no críticas  $\mathcal{B}$ , el operador solución  $\mathcal{G}$  se denomina el “operador de Green” del problema de contorno.*

El objetivo de la sección es probar que  $\mathcal{G}$  se representa en la forma:

$$\mathcal{G}(f)(t) = \int_a^b G(t, s)f(s) ds.$$

Se recuerdan las notaciones:

$$Q = [a, b] \times [a, b], \quad Q^+ = \{(t, s) \in Q : s \geq t\}, \quad Q^- = \{(t, s) \in Q : s \leq t\},$$

mientras que la diagonal de  $Q$  se representa por  $\Delta = \{(t, s) \in Q : s = t\}$ .

Se trabajará con funciones  $H \in C(Q^\pm \setminus \Delta)$  que admiten extensiones continuas a  $Q^\pm$ . Esto significa por ejemplo que los límites:

$$\lim_{(t,s) \rightarrow (t_0, t_0), (t,s) \in Q^-} H(t, s), \quad \lim_{(t,s) \rightarrow (t_0, t_0), (t,s) \in Q^+} H(t, s),$$

existen aunque posiblemente son distintos. Obsérvese que en el primero los  $(t, s) \in Q^-$  mientras que en el segundo  $(t, s) \in Q^+$ .

Nótese también que por ejemplo, en el caso del primer límite, hay muchas maneras en que  $(t, s)$  se puede aproximar a  $(t_0, t_0)$ . En particular:

$$\lim_{(t,s) \rightarrow (t_0, t_0), (t,s) \in Q^-} H(t, s) = \lim_{s \rightarrow t_0^-} H(t_0, s) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} H(t, t_0).$$

Recordamos ahora un resultado que se conoce como la regla de Leibnitz para derivar integrales que dependen de parámetros.

Suponemos que  $H(t, s), \frac{\partial H}{\partial t}(t, s) \in C(Q^- \setminus \Delta)$  admiten extensiones continuas a  $Q^-$  y definimos:

$$h(t) = \int_a^t H(t, s) ds.$$

Entonces, para cada  $t_0 \in [a, b]$ :

$$h'(t_0) = \lim_{s \rightarrow t_0^-} H(t_0, s) + \int_a^{t_0} \frac{\partial H}{\partial t}(t_0, s) ds = \lim_{t \rightarrow t_0^+} H(t, t_0) + \int_a^{t_0} \frac{\partial H}{\partial t}(t_0, s) ds.$$

Análogamente, si  $H(t, s), \frac{\partial H}{\partial t}(t, s) \in C(Q^+ \setminus \Delta)$  admiten extensiones continuas a  $Q^+$ ,

$$h(t) = \int_t^b H(t, s) ds.$$

entonces, para cada  $t_0 \in [a, b]$ :

$$\begin{aligned} h'(t_0) &= - \lim_{s \rightarrow t_0^+} H(t_0, s) + \int_{t_0}^b \frac{\partial H}{\partial t}(t_0, s) ds = \\ &= - \lim_{t \rightarrow t_0^-} H(t, t_0) + \int_{t_0}^b \frac{\partial H}{\partial t}(t_0, s) ds. \end{aligned}$$

Obsérvese el cambio de signo en el primer término de ambas expresiones.

**Proposición 2.9.** Sea  $\Gamma(t, s) \in C(Q)$  una función que cumple las siguientes propiedades:

- i)  $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \in C(Q^\pm \setminus \Delta)$  de forma que cada una de tales funciones admite una extensión continua a  $Q^+$  y  $Q^-$ .
- ii) Para cada  $t_0 \in [a, b]$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, t_0) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, t_0) = \frac{1}{p_0(t_0)}.$$

Equivalentemente:

$$\lim_{s \rightarrow t_0^-} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t_0, s) - \lim_{s \rightarrow t_0^+} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t_0, s) = \frac{1}{p_0(t_0)}.$$

- iii) Para cada  $s \in [a, b]$  la función de  $t$ ,  $y(t) = \Gamma(t, s)$  cumple la ecuación:

$$\mathcal{L}y = 0$$

en cada uno de los intervalos  $[a, s]$  y  $[s, b]$  por separado.

Entonces, para cada  $f(t) \in C[a, b]$  la función:

$$x(t) = \int_a^b \Gamma(t, s) f(s) ds$$

satisface la ecuación:

$$\mathcal{L}x = f(t) \quad t \in [a, b].$$

*Observación 2.7.* La solución fundamental  $K(t, s)$  es un ejemplo de función  $\Gamma(t, s)$  con el comportamiento de la propiedad.

*Demostración.* Escribimos:

$$x(t) = \int_a^b \Gamma(t, s)f(s) ds = \int_a^t \Gamma(t, s)f(s) ds + \int_t^b \Gamma(t, s)f(s) ds.$$

Aplicando la fórmula de Leibnitz, la primera derivada es:

$$x'(t) = \int_a^t \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s)f(s) ds + \int_t^b \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s)f(s) ds = \int_a^b \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s)f(s) ds.$$

La segunda:

$$\begin{aligned} x''(t) &= \lim_{s \rightarrow t^-} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(t, s)f(s) + \int_a^t \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(t, s)f(s) ds \\ &\quad - \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(t, s)f(s) + \int_t^b \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(t, s)f(s) ds = \\ &= \frac{1}{p_0(t)}f(t) + \int_a^t \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(t, s)f(s) ds + \int_t^b \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(t, s)f(s) ds \\ &= \frac{1}{p_0(t)}f(t) + \int_a^b \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}(t, s)f(s) ds. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}x = f(t) + \int_a^b \mathcal{L}\Gamma(t, s)f(s) ds = f(t).$$

□

**Teorema 2.10.** Sean  $\mathcal{L}$  un operador diferencial en  $[a, b]$  y  $\mathcal{B}$  unas condiciones de contorno no críticas para  $\mathcal{L}$ . Entonces existe una función  $G(t, s) \in C(Q)$  cumpliendo las propiedades siguientes:

- i)  $\frac{\partial G}{\partial t}, \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \in C(Q^\pm \setminus \Delta)$  de forma que cada una de tales funciones admite una extensión continua a  $Q^+$  y  $Q^-$ . Además, para cada  $t_0 \in [a, b]$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\partial G}{\partial t}(t, t_0) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{\partial G}{\partial t}(t, t_0) = \frac{1}{p_0(t_0)}.$$

Equivalentemente:

$$\lim_{s \rightarrow t_0^-} \frac{\partial G}{\partial t}(t_0, s) - \lim_{s \rightarrow t_0^+} \frac{\partial G}{\partial t}(t_0, s) = \frac{1}{p_0(t_0)}.$$

- ii) Para cada  $s \in [a, b]$  la función de  $t$ ,  $y(t) = \Gamma(t, s)$  cumple la ecuación:

$$\mathcal{L}y = 0$$

en cada uno de los intervalos  $[a, s]$  y  $[s, b]$  por separado.

iii) Para cada  $s \in [a, b]$  la función de  $t$ ,  $y(t) = \Gamma(t, s)$  satisface las condiciones de contorno

$$\mathcal{B}(y) = 0.$$

iv) Para toda función  $f(t) \in C[a, b]$  la solución del problema (2.16):

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f(t) & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0, \end{cases}$$

se escribe en la forma:

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds.$$

Más aún, la función  $G(t, s)$  queda unívocamente determinada por las propiedades i), ii) y iii).

**Definición 2.11.** La función  $G(t, s)$  se denomina la función de Green del operador  $\mathcal{L}$  bajo las condiciones de contorno  $\mathcal{B}$  en el intervalo  $[a, b]$ .

*Demostración del Teorema 2.10.* Las propiedades i), ii) y iii) caracterizan  $G$  porque si dos funciones  $G_1$  y  $G_2$  las cumplen, para cada  $s \in [a, b]$  la función de  $t$ :

$$y(t) = G_1(t, s) - G_2(t, s),$$

es de clase  $C^2$  en  $[a, b]$ , cumple  $\mathcal{L}y = 0$  y  $\mathcal{B}(y) = 0$ . Por tanto  $y(t) = 0$  para todo  $t$ .

Para probar la existencia de  $G(t, s)$  se la busca en la forma:

$$G(t, s) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + K(t, s),$$

donde  $K$  es la solución fundamental de  $\mathcal{L}$ . Elegimos  $c_1, c_2$  (a la postre funciones de  $s$ ) de forma que  $y(t) = G(t, s)$  cumpla como función de  $t$  y para cada  $s$  fijo, las condiciones  $\mathcal{B}(y) = 0$ . Esto lleva a:

$$\Lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\mathcal{B}(K \cdot, s),$$

donde  $\Lambda = \text{col}(\mathcal{B}(\varphi_1), \mathcal{B}(\varphi_2))$  y  $\mathcal{B}(K \cdot, s)$  significa que se aplican las condiciones de contorno a  $K(t, s)$  observada como función de la variable  $t$ .

Como resultado obtenemos:

$$G(t, s) = K(t, s) - (\varphi_1(t) \varphi_2(t)) \Lambda^{-1} \mathcal{B}(K \cdot, s).$$

La función  $G$  cumple las propiedades buscadas. □

**Corolario 2.12.** Bajo las condiciones del Teorema 2.10 sea  $\mathcal{G} : C[a, b] \rightarrow C^2[a, b]$  el operador de Green asociado al problema (2.16):

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f(t) & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0, \end{cases}$$

es decir, la solución del problema es:

$$x(t) = \mathcal{G}(f)(t) = \int_a^b G(t, s)f(s) ds.$$

Entonces:

a)  $\forall f \in C[a, b]$ :

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}(f))(t) = f(t) \quad \forall t \in [a, b],$$

b)  $\forall x \in C^2[a, b]$  tal que  $\mathcal{B}(x) = 0$  se cumple:

$$\mathcal{G}(\mathcal{L}x)(t) = x(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

En particular  $\mathcal{G}$  es el inverso del operador  $\mathcal{L} : C_{\mathcal{B}}^2[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , donde

$$C_{\mathcal{B}}^2[a, b] = \{x \in C^2[a, b] : \mathcal{B}(x) = 0\}.$$

*Observación 2.8.* Una forma práctica de calcular la función de Green, que se inspira en la prueba del teorema consiste en poner:

$$G(t, s) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + K(t, s),$$

donde, fijando  $s \in [a, b]$  se observa al segundo miembro como función de  $t$  y se le fuerza al cumplir las condiciones de contorno  $\mathcal{B}$ :

$$c_1\mathcal{B}(\varphi_1) + c_2\mathcal{B}(\varphi_2) + \mathcal{B}(K(\cdot, s)) = 0.$$

Se calculan así  $c_1, c_2$  que resultan ser funciones de  $s$ .

### 2.2.5. Ejercicios

■ Función de Green.

1. Calcular la función de Green para el operador  $\mathcal{L}x = -x''(t)$  definido en el intervalo  $[0, 1]$  bajo:

a) Condiciones de Dirichlet.

b) Condiciones de Robin tomando  $\alpha = \beta = 1$ .

¿Es posible calcular la función de Green bajo condiciones de Neumann?

**Solución.** En el caso a)  $G(t, s) = \frac{2-s}{3}(t+1)$  para  $t \leq s \leq 1$ ,  $G(t, s) = \frac{2-t}{3}(s+1)$  para  $0 \leq s \leq t$ .

2. Resolver los problemas de contorno:

$$a) \begin{cases} x'' + x = g(t) & t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x'' + x = g(t) & t \in [0, \pi] \\ x'(0) = 0 \\ x'(\pi) = 0, \end{cases}$$

en donde  $g \in C[0, \pi]$ .

3. Calcular la función de Green del problema:

$$\begin{cases} x'' + x = f(t) & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x(0) = 0 \\ x(\frac{\pi}{2}) + x'(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$$

Resolver el problema para  $f(t) = \text{sen } t$ .

**Solución.**  $G(t, s) = -\text{sen } t(\text{sen } s + \cos s)$ .

4. Calcular la función de Green del problema:

$$\begin{cases} x'' - x = f(t) & t \in [0, \log 2] \\ x'(0) = 0 \\ x(\log 2) - x'(\log 2) = 0 \end{cases}$$

Resolver el problema para  $f(t) = \text{senh } t$ .

**Solución.**  $G(t, s) = (\cosh s - \text{senh } s) \cosh t$  para  $s \geq t$ .

5. Calcular la función de Green del problema:

$$\begin{cases} x'' - 2x' + 5x = f(t) & t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ x(0) = x(\frac{\pi}{4}) = 0. \end{cases}$$

Resolver el problema para  $f(t) = 1$ .

**Solución.**

$$G(t, s) = \begin{cases} -\frac{e^{t-s}}{2} \cos 2t \text{sen } 2s & s \leq t \\ -\frac{e^{t-s}}{2} \text{sen } 2t \cos 2s & s > t. \end{cases}$$

6. Calcular la función de Green del problema:

$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x = f(t) & t \in [0, \log 2] \\ x'(0) = x'(\log 2) = 0. \end{cases}$$

Resolver el problema para  $f(t) =$ .

**Solución.**

$$G(t, s) = \begin{cases} e^{(t-s)}(4e^{-s} + \frac{1}{2}e^t) - 2e^{t-s} - e^{2(t-s)} & s \leq t \\ e^{(t-s)}(4e^{-s} + \frac{1}{2}e^t) - e^{t-s} - 2e^{2(t-s)} & s > t. \end{cases}$$

### 2.2.6. Problemas de contorno autoadjuntos

**Definición 2.13.** Un operador diferencial  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}x = p_0(t)x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x$$

de coeficientes continuos en  $[a, b]$  se dice autoadjunto si  $p_0 \in C^1[a, b]$  y  $p_1(t) = p_0'(t)$  para todo  $t \in [a, b]$ ; es decir:

$$\mathcal{L}x = p_0(t)x'' + p_0'(t)x' + p_2(t)x = (p_0(t)x')' + p_2(t)x.$$

Se observará de aquí en adelante la siguiente notación. Todo operador autoadjunto  $\mathcal{L}$  se escribirá en la forma:

$$\mathcal{L}(x) = (px')' + qx,$$

donde  $p \in C^1[a, b]$ ,  $q \in C[a, b]$ ,  $p(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ .

**Proposición 2.14.** Toda ecuación:

$$p_0(t)x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x = g(t),$$

se puede escribir en forma equivalente como:

$$\mathcal{L}(x) = f(t)$$

donde el operador  $\mathcal{L}$  es autoadjunto. Es decir, en la forma:

$$(px')' + qx = f(t).$$

*Demostración.* Tras escribir la ecuación en la forma:

$$x'' + \frac{p_1(t)}{p_0(t)}x' + \frac{p_2(t)}{p_0(t)}x = \frac{1}{p_0(t)}g(t),$$

se multiplican ambos miembros por:

$$p(t) = \exp \left\{ \int_a^t \frac{p_1(s)}{p_0(s)} ds \right\},$$

para obtener:

$$(px')' + qx = f(t),$$

donde:

$$q = \frac{p(t)p_2(t)}{p_0(t)} \quad f(t) = \frac{p(t)}{p_0(t)}g(t).$$

□

**Proposición 2.15.** Toda ecuación en forma autoadjunta:

$$(px')' + qx = f(t),$$

se puede escribir en forma equivalente como:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + Q(\tau)y = h(\tau),$$

en donde  $\tau$  es la nueva variable independiente.

*Demostración.* Se escribe la ecuación como:

$$p(px')' + pqx = p(t)f(t),$$

se introduce la nueva variable:

$$\tau = \varphi(t) = \int_a^t \frac{1}{p(s)} ds,$$

y resulta la ecuación buscada en donde:

$$y(\tau) = x(\varphi^{-1}(\tau)), \quad Q(\tau) = p(\varphi^{-1}(\tau))q(\varphi^{-1}(\tau)), \quad h(\tau) = p(\varphi^{-1}(\tau))f(\varphi^{-1}(\tau)).$$

□

**Proposición 2.16.** Sea  $\mathcal{L}x = (px')' + qx$  un operador autoadjunto y  $\varphi_1, \varphi_2$  un sistema fundamental de soluciones de la ecuación

$$\mathcal{L}x = 0.$$

Entonces:

$$p(t)W(t) = p(t)W(\varphi_1, \varphi_2)$$

es constante en el intervalo  $[a, b]$ .

Para establecer algunas propiedades relevantes de los operadores autoadjuntos necesitamos algunos hechos elementales.

**Proposición 2.17** (Identidad de Green). Sean  $\mathcal{L}x = (px')' + qx$  un operador autoadjunto en el intervalo  $[a, b]$ ,  $y(t), z(t)$  funciones de clase  $C^2$  en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces:

$$(\mathcal{L}y)z - y(\mathcal{L}z) = -[pW(y, z)]' = [p(y'z - yz')] \quad \forall t \in [a, b].$$

**Definición 2.18.** En el espacio  $R_{\mathbb{C}}[a, b]$  de las funciones  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  acotadas y Riemann integrables se define el producto escalar “de  $L^2$ ” entre dos funciones  $f(t), g(t)$  como:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t)\bar{g}(t) dt.$$

*Observación 2.9.* Una función  $f \in R_{\mathbb{C}}[a, b]$  tiene la forma  $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$  y su integral de Riemann es:

$$\int_a^b f = \int_a^b f_1 + i \int_a^b f_2.$$

Cuando las funciones  $f, g$  son reales su producto escalar  $\langle f, g \rangle_{L^2}$  es simplemente la integral del producto. Siempre que escribamos  $\langle f, g \rangle_{L^2}$  supondremos que  $f, g$  son reales, salvo que se advierta lo contrario.



**Proposición 2.19** (Identidad de Lagrange). *En las condiciones de la Proposición 2.17 y para funciones  $y(t), z(t)$  de clase  $C^2$  en  $[a, b]$  y con valores complejos se tiene que:*

$$\langle \mathcal{L}y, z \rangle_{L^2} = \langle y, \mathcal{L}z \rangle_{L^2} - [p(t)W(y(t), \bar{z}(t))] \Big|_{t=a}^{t=b}.$$

*Observación 2.10.* En caso de ser reales  $y(t), z(t)$  no es necesario poner  $\bar{z}(t)$ .

**Definición 2.20.** Sean  $\mathcal{L}x = (px')' + qx$  un operador autoadjunto en el intervalo  $[a, b]$  y  $\mathcal{B}$  unas condiciones de contorno en  $x = a, b$ . Se dice que las condiciones  $\mathcal{B}$  son autoadjuntas para el operador  $\mathcal{L}$ , o que el operador  $\mathcal{L}$  es autoadjunto bajo las condiciones  $\mathcal{B}$ , o también, que el problema de contorno (2.16):

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f(t) & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0, \end{cases}$$

es autoadjunto si:

$$[pW(y, z)] \Big|_{t=a}^{t=b} = 0, \quad (2.17)$$

para todo par de funciones reales  $y(t), z(t)$  de clase  $C^2$  en  $[a, b]$  que cumplan  $\mathcal{B}(y) = \mathcal{B}(z) = 0$ .

*Observación 2.11.* Si la condición (2.17) se da para funciones reales, también es cierta para funciones complejas porque el Wronskiano  $W(y, z)$  es bilineal en las variables  $y, z$ , es decir:

$$W(y, z) = W(y_1 + iy_2, z_1 + iz_2) = W(y_1, z_1) + iW(y_1, z_2) + iW(y_2, z_1) - W(y_2, z_2).$$

Un par de funciones complejas  $y = y_1 + iy_2, z = z_1 + iz_2$  cumplen  $\mathcal{B}(x) = 0$  si y sólo si sus componentes  $y_j, z_j$  las cumplen. De la relación precedente resulta:

$$\begin{aligned} pW(y, \bar{z}) \Big|_{t=a}^{t=b} &= W(y_1 + iy_2, z_1 - iz_2) \Big|_{t=a}^{t=b} \\ &= pW(y_1, z_1) \Big|_{t=a}^{t=b} - ipW(y_1, z_2) \Big|_{t=a}^{t=b} + ipW(y_2, z_1) \Big|_{t=a}^{t=b} + pW(y_2, z_2) \Big|_{t=a}^{t=b}. \end{aligned}$$

Luego:

$$[p(t)W(y(t), \bar{z}(t))] \Big|_{t=a}^{t=b} = 0,$$

se cumple si (2.17) es cierta para funciones reales que cumplen las condiciones de contorno.

**Proposición 2.21.** Sea  $\mathcal{L}x = (px')' + qx$  un operador autoadjunto en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces, las condiciones de contorno  $\mathcal{B}$  de la forma:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1(x) = \alpha_1 x(a) + \beta_1 x'(a) \\ \mathcal{B}_2(x) = \alpha_2 x(b) + \beta_2 x'(b), \end{cases} \quad (2.18)$$

$\alpha_i, \beta_i$  constantes, son siempre condiciones autoadjuntas para el operador  $\mathcal{L}$ .

**Definición 2.22.** *Unas condiciones de contorno del tipo (2.18) se llaman condiciones “separadas” o de Sturm.*

**Teorema 2.23.** *La función de Green de un problema de contorno autoadjunto es siempre simétrica, es decir:*

$$G(t, s) = G(s, t) \quad \forall t, s \in [a, b].$$

*En particular, las funciones de Green asociadas a condiciones de Sturm son simétricas.*

*Demostración.* Sean  $f, g \in C[a, b]$  arbitrarias. Ponemos  $x = \mathcal{G}(f)$ ,  $y = \mathcal{G}(g)$ . De la identidad de Lagrange se sabe que:

$$\langle \mathcal{L}x, y \rangle_{L^2} = \langle x, \mathcal{L}y \rangle_{L^2} \quad \Rightarrow \quad \langle f, \mathcal{G}(g) \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{G}(f), g \rangle_{L^2}.$$

Se tiene entonces que:

$$\int_a^b \int_a^b (G(t, s) - G(s, t))f(t)g(s) dsdt = 0 \quad \forall f, g \in C[a, b]$$

$$\Rightarrow G(t, s) = G(s, t).$$

□

Como se verá pronto, los operadores bajo condiciones de contorno autoadjuntas comparten muchas propiedades con las matrices simétricas.

### 2.2.7. Ejercicios

▲ Ecuaciones en forma autoadjunta.

1. Reducir a forma autoadjunta las siguientes ecuaciones:

$$a) \quad t^2 y'' + ty' + y = 0, \quad b) \quad (t^4 + t^2)y'' + 2t^3 y' + 3y = 0,$$

$$c) \quad y'' - \operatorname{tag} ty' + y = 0, \quad d) \quad f(t)y'' + g(t)y = 0.$$

2. Calcúlese un sistema fundamental de soluciones de la ecuación:

$$(t^2 + 1)x'' + 2tx' = 0.$$

Para ello, redúzcase primero la ecuación a la forma autoadjunta.

3. Redúzcase a la forma autoadjunta la ecuación:

$$tx'' - x' + t^3 x = 0.$$

Transfórmese después la ecuación en otra de la forma:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + q(\tau)y = 0.$$

4. Para  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - \alpha^2)x = 0$$

se denomina la ecuación de *Bessel*. Tranfórmese en una de la forma:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + q(\tau)y = 0.$$

5. En el intervalo  $[a, b]$  se considera la siguiente ecuación de coeficientes continuos:

$$x'' + p_1(t)x' + p_2(t)x = 0.$$

Usar la transformación:

$$x(t) = y(t)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^t p_1\right)$$

para reducir la ecuación a:

$$y'' + (p_2 - \frac{1}{2}p_1' - \frac{1}{4}p_1^2)y = 0.$$

Como aplicación, hállese las soluciones de la ecuación:

$$x'' + (2t + 1)x' + (t^2 + t + \frac{1}{4})x = 0.$$

### 2.2.8. Problemas de autovalores autoadjuntos

En la presente sección consideraremos siempre un operador autoadjunto:

$$\mathcal{L}x = -(p(t)x')' + q(t)x \quad t \in [a, b],$$

donde  $p \in C^1[a, b]$ ,  $p(t) > 0$  en  $[a, b]$ ,  $q \in C[a, b]$ . Usaremos condiciones de contorno de tipo Sturm:

$$\mathcal{B}(x) = 0 \quad \begin{cases} \mathcal{B}_1(x) = \alpha_1 x(a) + \beta_1 x'(a) \\ \mathcal{B}_2(x) = \alpha_2 x(b) + \beta_2 x'(b), \end{cases}$$

donde los vectores  $(\alpha_1, \beta_1)$  y  $(\alpha_2, \beta_2)$  son ambos no nulos. Se resalta la presencia del signo menos en la ecuación.

**Definición 2.24.** Dada  $r(t) \in C[a, b]$  positiva en  $[a, b]$  el problema de autovalores asociado al operador  $\mathcal{L}$  y las condiciones de contorno  $\mathcal{B}$  consiste en hallar valores de  $\lambda \in \mathbb{R}$  y correspondientes funciones no nulas  $x(t)$  que resuelvan:

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = \lambda r(t)x & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  cumpliendo esa condición se denomina un autovalor de (2.19) y la correspondiente solución no nula  $x = \varphi(t)$  se denomina una autofunción asociada a  $\lambda$ .

*Observaciones 2.12.*

- a) El problema (2.19) se suele denominar problema de autovalores de Sturm-Liouville.
- b) En muchos casos  $r(t) = 1$  para todo  $t \in [a, b]$ .
- c) Pudiera haber valores complejos  $\lambda$  y correspondientes autofunciones complejas  $x(t)$  cumpliendo (2.19), exactamente igual a lo que ocurre con las matrices. Veremos que en el caso de (2.19) esto no es posible.
- d) Si  $x(t)$  es una autofunción asociada a  $\lambda$  todos sus múltiplos escalares  $cx(t)$  también son autofunciones asociadas a  $\lambda$ . Análogamente, el conjunto de autofunciones asociadas a  $\lambda$  conforman un subespacio vectorial que es el autoespacio asociado a  $\lambda$ .

Desde el punto de vista práctico, para hallar los autovalores de (2.19), se construye, con  $\lambda \in \mathbb{R}$  fijo, un sistema fundamental de soluciones  $\{\varphi_1(t, \lambda), \varphi_2(t, \lambda)\}$  introduciendo la matriz

$$\Lambda(\lambda) = \text{col}(\mathcal{B}(\varphi_1(\cdot, \lambda)), \varphi_2(\cdot, \lambda)).$$

Entonces  $\lambda$  es un autovalor si y sólo si:

$$\det \Lambda(\lambda) = 0.$$

Así pues las raíces de la ecuación proporcionan los autovalores del problema. El estudio general de esta clase de ecuaciones cuando el problema no es autoadjunto o las condiciones no son de tipo Sturm, corresponde a la teoría de funciones complejas de variable compleja. En la práctica, se puede proceder por cálculo directo en las situaciones sencillas.

*Ejemplo 2.13.* En el problema de autovalores

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

el sistema fundamental de soluciones depende de  $\lambda$  y  $\det\Lambda(\lambda) \neq 0$  para  $\lambda \leq 0$ . Sólo puede haber autovalores para  $\lambda > 0$ . En ese caso  $\varphi_1 = \cos\sqrt{\lambda}t$ ,  $\varphi_2 = \sin\sqrt{\lambda}t$ ,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda} & \sin\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \det\Lambda = \sin\sqrt{\lambda} \Rightarrow \det\Lambda = 0,$$

sólo si  $\sqrt{\lambda} = n\pi$ . Los autovalores y correspondientes autofunciones son:

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \quad \varphi_n(t) = \sin n\pi t \quad n = 1, 2, \dots$$

*Ejemplo 2.14.* En el problema de autovalores

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, 1] \\ x'(0) = x'(1) = 0, \end{cases}$$

el sistema fundamental de soluciones también depende de  $\lambda$  mientras que ahora  $\det\Lambda(\lambda) \neq 0$  para  $\lambda < 0$ . Sólo puede haber autovalores para  $\lambda \geq 0$ . De hecho  $\lambda_1 = 0$  es autovalor con autofunción  $\varphi_1 = 1$ . Además,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \det\Lambda = \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \Rightarrow \det\Lambda = 0,$$

sólo si  $\sqrt{\lambda} = n\pi$ . Los autovalores y correspondientes autofunciones son:

$$\lambda_n = (n-1)^2\pi^2 \quad \varphi_n(t) = \cos(n-1)\pi t \quad n = 1, 2, \dots$$

Las cosas no son en general tan sencillas como en los ejemplos previos.

*Ejemplo 2.15.* Consideramos el problema de autovalores

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, 1] \\ x'(0) - x(0) = 0 \\ x'(1) + x(1) = 0, \end{cases}$$

El sistema fundamental de soluciones es:

$$\lambda = -\zeta^2 < 0 \quad \Rightarrow \{\cosh \zeta t, \sinh \zeta t\},$$

$$\lambda = \zeta^2 > 0 \Rightarrow \{\cos \zeta t, \operatorname{sen} \zeta t\},$$

y

$$\lambda = 0 \Rightarrow \{1, t\}.$$

En el último caso,  $\det \Lambda \neq 0$  y  $\lambda = 0$  no es autovalor. En el primero,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & \zeta \\ \zeta \operatorname{senh} \zeta + \cosh \zeta & \zeta \cosh \zeta + \operatorname{senh} \zeta \end{pmatrix} \Rightarrow,$$

$$\det \Lambda = 2\zeta \cosh \zeta + (\zeta^2 + 1) \operatorname{senh} \zeta,$$

y la ecuación

$$\det \Lambda = 0,$$

carece de soluciones  $\zeta \neq 0$ . Ello significa que tampoco hay autovalores  $\lambda < 0$ .

En el segundo caso,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & \zeta \\ -\zeta \operatorname{sen} \zeta + \cos \zeta & \zeta \cos \zeta + \operatorname{sen} \zeta \end{pmatrix} \Rightarrow,$$

$$\det \Lambda = 2\zeta \cos \zeta + (1 - \zeta^2) \operatorname{sen} \zeta.$$

Es fácil ver que las raíces  $\zeta_k$  de la ecuación  $\det \Lambda = 0$  cumplen:

$$(k-1)\pi < \zeta_k < (k-1)\pi + \frac{\pi}{2} \quad k = 2, 3, \dots,$$

mientras existe una primera raíz  $\zeta_1$  en el intervalo  $(1, \frac{\pi}{2})$ . Los autovalores del problema son:

$$\lambda_n = \zeta_n^2 \quad n = 1, 2, \dots,$$

las autofunciones:

$$\varphi_n = \zeta_n \cos \zeta_n t + \operatorname{sen} \zeta_n t \quad n = 1, 2, \dots$$

En el siguiente ejemplo, que recoge una variante de las condiciones de Robin, la determinación de los autovalores es todavía más complicada, especialmente en lo tocante a localizar los dos primeros autovalores. El primero es, de hecho, negativo.

*Ejemplo 2.16* (♣). Consideramos el problema de autovalores

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, 1] \\ x'(0) + x(0) = 0 \\ x'(1) - x(1) = 0, \end{cases}$$

El sistema fundamental de soluciones es:

$$\lambda = -\zeta^2 < 0 \Rightarrow \{\cosh \zeta t, \operatorname{senh} \zeta t\},$$

$$\lambda = \zeta^2 > 0 \Rightarrow \{\cos \zeta t, \operatorname{sen} \zeta t\},$$

y

$$\lambda = 0 \Rightarrow \{1, t\}.$$

En el último caso,  $\det \Lambda \neq 0$  y  $\lambda = 0$  no es autovalor. En el primero,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ \zeta \sinh \zeta - \cosh \zeta & \zeta \cosh \zeta - \sinh \zeta \end{pmatrix} \Rightarrow,$$

$$\det \Lambda = 2\zeta \cosh \zeta - (\zeta^2 + 1) \sinh \zeta.$$

Un cuidadoso análisis, que omitimos, muestra que la ecuación

$$\det \Lambda = 0,$$

admite una única raíz  $\lambda = -\zeta_0^2$ . Ello significa que  $\lambda_0 = -\zeta_0^2$  es autovalor con autofunción asociada:

$$\varphi_0(t) = -\zeta_0 \cosh \zeta_0 t + \sinh \zeta_0 t.$$

En el segundo caso,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ -\zeta \sin \zeta - \cos \zeta & \zeta \cos \zeta - \sin \zeta \end{pmatrix} \Rightarrow,$$

$$\det \Lambda = 2\zeta \cos \zeta + (\zeta^2 - 1) \sin \zeta.$$

Es fácil ver que la ecuación  $\det \Lambda = 0$  posee una única raíz  $\zeta_k$ :

$$\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi < \zeta_k < k\pi \quad k = 1, 2, \dots$$

Sin embargo, es más delicado comprobar que dicha ecuación carece de raíces en el intervalo inicial  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Se omiten los detalles. Los autovalores son por tanto:

$$\lambda_n = \zeta_n^2 \quad n = 1, 2, \dots,$$

las autofunciones:

$$\varphi_n = -\zeta_n \cos \zeta_n t + \sin \zeta_n t \quad n = 1, 2, \dots$$

En la sección de ejercicios se proporcionan los detalles omitidos en el cálculo.

### 2.2.9. Existencia de autovalores

En la presente sección trabajaremos bajo las hipótesis de la anterior que recordamos. Consideraremos siempre un operador autoadjunto:

$$\mathcal{L}x = -(p(t)x')' + q(t)x \quad t \in [a, b],$$

$p \in C^1[a, b]$ ,  $p(t) > 0$  en  $[a, b]$ ,  $q \in C[a, b]$ . Las condiciones de contorno  $\mathcal{B}$  se toman de tipo Sturm:

$$\mathcal{B}(x) = 0 \quad \begin{cases} \mathcal{B}_1(x) = \alpha_1 x(a) + \beta_1 p(a) x'(a) \\ \mathcal{B}_2(x) = \alpha_2 x(b) + \beta_2 p(b) x'(b), \end{cases}$$

$(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2)$  vectores no nulos. Nótese que en las condiciones de contorno se han cambiado  $x'(a)$ ,  $x'(b)$  por  $p(a)x'(a)$ ,  $p(b)x'(b)$ . La variación, que se introduce por razones técnicas, es inofensiva y equivale a multiplicar y dividir por  $p(b)$ . Esto supone un mínimo cambio en los coeficientes (los de antes divididos por  $p(b)$ ).

En el siguiente resultado se establecen las propiedades principales que distinguen a los problemas de autovalores de tipo Sturm–Liouville. Dejaremos para más adelante otra de las propiedades fundamentales.

**Teorema 2.25.** *Sea  $r(t) \in C[a, b]$  una función positiva en  $[a, b]$ . El problema de autovalores (2.19)*

$$\begin{cases} -(p(t)x')x' + q(t)x = \lambda r(t)x & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

posee las siguientes propiedades.

i) [Infinitud de los autovalores]. *Los autovalores de (2.19) son necesariamente reales. El conjunto de los autovalores constituye una sucesión creciente:*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

tal que  $\lambda_n \rightarrow \infty$ .

ii) [Simplicidad]. *Cada autovalor  $\lambda_n$  es simple, es decir, todas las autofunciones asociadas a  $\lambda_n$  son múltiplo escalar de una autofunción  $\varphi_n(t)$ .*

iii) [Nodalidad]. *Si  $\psi_n(t)$  es una autofunción asociada a  $\lambda_n$  entonces  $\psi_n$  se anula exactamente en  $n - 1$  puntos del intervalo abierto  $(a, b)$ . En particular, las autofunciones  $\psi_1$  asociadas a  $\lambda_1$  tienen signo constante en  $(a, b)$ .*

iv) [Separación de los ceros]. *Si  $\psi_n(t)$ ,  $\psi_{n+1}(t)$  son autofunciones asociadas a  $\lambda_n < \lambda_{n+1}$  entonces entre dos ceros consecutivos de  $\psi_n(t)$  así como entre  $a$  y el primer cero de  $\psi_n(t)$ , y entre el último cero de  $\psi_n(t)$  y  $b$ , existe un único cero de  $\psi_{n+1}(t)$ .*

*Observación 2.17.* Una consecuencia del signo menos delante del operador es que las sucesión  $\lambda_n \uparrow \infty$ . Si el signo menos no aparece ( $p(t) > 0$ , claro está) entonces  $\lambda_n \downarrow -\infty$ .

La demostración del Teorema 2.25 se desglosaremos en etapas (y algunos detalles serán omitidos).

*Teorema 2.25. Carácter real de los autovalores.* Supongamos  $\lambda$  es un autovalor complejo con posible autofunción compleja  $\varphi$  entonces:

$$\mathcal{L}\varphi = \lambda r(t)\varphi.$$

Por otro lado:

$$\langle \mathcal{L}\varphi, \varphi \rangle_{L^2} = \langle \varphi, \mathcal{L}\varphi \rangle_{L^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda \langle r\varphi, \varphi \rangle_{L^2} = \bar{\lambda} \langle \varphi, r\varphi \rangle_{L^2}.$$

Esto implica que  $\lambda = \bar{\lambda}$ , luego  $\lambda$  ha de ser necesariamente real.  $\square$



*Teorema 2.25. Simplicidad de los autovalores ii).* Supongamos que  $\varphi, \psi$  son dos autofunciones asociadas a  $\lambda$ . Entonces cumplen la ecuación:

$$\mathcal{L}x - \lambda x = 0.$$

Como se cumplen las condiciones de contorno, es inmediato ver que  $W(\varphi, \psi) = 0$  lo que dice que  $\psi$  es un múltiplo de  $\varphi$ .  $\square$

Las propiedades de nodalidad de las autofunciones requieren un estudio especializado sobre los ceros de las ecuaciones de 2º orden que dejamos para la sección siguiente.

### 2.2.10. Ejercicios

◊ Problemas de autovalores.

1. Estudiar los problemas de autovalores:

a)

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0 & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x(0) = 0 \\ x(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0 & t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 \\ x'(\pi) = 0. \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0 & t \in [0, L] \\ x(0) = 0 \\ x(L) = 0, \end{cases}$$

donde  $L > 0$ .

d)

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0 & t \in [0, L] \\ x'(0) = 0 \\ x'(L) = 0, \end{cases}$$

donde  $L > 0$ .

2. Estudiar el problema de autovalores:

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, 1] \\ x(0) = x'(0) \\ x(1) = 0, \end{cases}$$

determinando los autovalores  $\lambda_n$  y autofunciones asociadas  $\varphi_n$ .

Demuéstrese que:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{2} + n\pi + \beta_n \quad n = 0, 1, \dots,$$

donde  $\beta_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Trazar un boceto de las dos primeras autofunciones  $\varphi_0, \varphi_1$ .

3. Estudiar el problema de autovalores:

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, 1] \\ x(0) = x'(0) \\ x(1) = x'(1). \end{cases}$$

*Nota.* Este es un ejemplo de condiciones de contorno periódicas.

4. Estudiar los problemas de autovalores:

a)

$$\begin{cases} (tx')' + \frac{\lambda}{t}x = 0 & t \in [1, e^\pi] \\ x'(1) = 0 \\ x'(e^\pi) = 0. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} (tx')' + \frac{\lambda}{t}x = 0 & t \in [1, e^\pi] \\ x(1) = 0 \\ x(e^\pi) = 0. \end{cases}$$

5. Estudiar el problema de autovalores:

$$\begin{cases} ((t^2 + 1)x')' + \frac{\lambda}{t^2 + 1}x = 0 & t \in [0, 1] \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

*Indicación.* Hacer el cambio  $t = \tan s$ .

6. Estudiar el problema de autovalores:

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{3t^2 + 1} x' \right)' + \lambda(3t^2 + 1)x = 0 & t \in [0, 1] \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

*Indicación.* Hacer el cambio  $s = t^3 + t$ .

7. ♣ La ecuación:

$$2\zeta \cosh \zeta - (\zeta^2 + 1) \sinh \zeta = 0$$

carece de raíces  $\zeta \neq 0$  en el intervalo  $(0, 1]$ . Para ello:

- a) Hállese el desarrollo de  $\theta \frac{\sinh \zeta}{\zeta}$ , donde  $\theta \in (0, 1)$ .
- b) Compárense los desarrollos de  $\cosh \zeta$  y  $\theta \frac{\sinh \zeta}{\zeta}$ . Conclúyase la demostración.

8. ♣ Pruébese que la ecuación:

$$2\zeta \cosh \zeta - (\zeta^2 + 1) \sinh \zeta = 0$$

posee una única raíz positiva  $\zeta_0 > 1$ .

9. ♣ La ecuación:

$$2\zeta \cos \zeta + (\zeta^2 - 1) \sin \zeta = 0,$$

carece de soluciones en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Para ello:

- a) Probar que  $\frac{\text{tag } \zeta}{\zeta}$  es creciente en el intervalo.
- b) Probar que  $(1 - \zeta^2) \frac{\text{tag } \zeta}{\zeta} < \text{tag } 1$ .
- c) Concluir la prueba de la afirmación.

### 2.2.11. Ceros de las soluciones de ecuaciones de segundo orden. Propiedades nodales de las autofunciones

Esta sección tiene interés general porque permite probar el carácter oscilatorio de buena parte de las funciones especiales de la física matemática. Su valor se realza si se tiene en cuenta la dificultad de probar que funciones expresadas en la forma:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

admiten un número infinito de ceros.

Trabajaremos con el operador autoadjunto:

$$\mathcal{L}x = (px)'+qx,$$

donde los coeficientes  $p \in C^1(a, b)$ ,  $p(t) > 0$  para todo  $t$ ,  $q \in C(a, b)$ , se observan, por conveniencia, definidos en un intervalo abierto  $(a, b)$  que bien pudiera ser  $(a, \infty)$  o todo  $\mathbb{R}$ .

**Proposición 2.26.** *Sea  $x(t)$  una solución no trivial de la ecuación:*

$$\mathcal{L}x = 0 \quad t \in (a, b).$$

*Entonces si  $t = t_0$  es un cero de  $x(t)$  dicho cero es simple, es decir,  $x'(t_0) \neq 0$ . En particular, los ceros de  $x(t)$  en  $(a, b)$  son aislados y  $t_0$  no puede ser límite de una sucesión de ceros  $t_n \neq t_0$ .*

**Proposición 2.27.** *Sean  $y(t), z(t)$  soluciones no triviales de*

$$\mathcal{L}x = 0 \quad t \in (a, b)$$

*que comparten un cero  $t = t_0 \in (a, b)$ . Entonces  $y(t)$  y  $z(t)$  son proporcionales, es decir,  $z(t) = cy(t)$  para cierta constante  $c$ . En particular, comparten todos los ceros en  $(a, b)$ .*

**Corolario 2.28.** *Una solución no trivial  $x(t)$  de la ecuación  $\mathcal{L}x = 0$  posee a lo sumo un número finito de ceros en cada intervalo compacto  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ .*

*Observación 2.18.* Si  $t_0$  es cero de una solución  $y(t)$  y ésta admite algún cero  $t > t_0$  entonces existe un “primer” cero  $t_1$  mayor que  $t_0$ . Además este cero es compartido por todas las otras soluciones  $z(t)$  que se anulen en  $t_0$ .

Ello quiere decir que  $t_1$ , el cero siguiente a  $t_0$ , sólo depende de la ecuación y no de la solución particular que se anule en  $t_0$ .

Estas propiedades merecen una definición.

**Definición 2.29.** *Dado un cero  $t_0$  de alguna solución  $x(t)$ , se llama su cero conjugado (si existe) al primer cero  $t_1$  mayor que  $t_0$ .*

*Ejemplo 2.19.* La función  $x(t) = \sinh t$  resuelve  $x'' - x = 0$  en  $\mathbb{R}$ , se anula en  $t_0 = 0$  y carece de ceros conjugados. En el caso de  $x(t) = \sin t$ , ésta resuelve  $x'' + x = 0$ , se anula en  $t = 0$  y su cero conjugado es  $t_1 = \pi$ .

El siguiente resultado compara los ceros de ecuaciones distintas cuando una mayor a la otra.

**Teorema 2.30** (Teorema de comparación de Sturm). *Bajo las condiciones de la sección sean  $\mathcal{L}_i x = (px')' + q_i x$ ,  $i = 1, 2$ , operadores de autoadjuntos definidos en el intervalo  $(a, b)$  tales que*

$$q_1(t) < q_2(t) \quad \forall t \in (a, b). \quad (2.21)$$

Sea  $x = \varphi(t)$  una solución de

$$\mathcal{L}_1 x = 0,$$

con dos ceros consecutivos  $t_1 < t_2$ . Entonces toda solución  $y = \psi(t)$  de

$$\mathcal{L}_2 y = 0$$

posee un cero en el intervalo  $(t_1, t_2)$ .

*Demostración.* Podemos suponer que  $\varphi > 0$  en  $(t_1, t_2)$ . La función  $\psi$  ha de anularse en  $(t_1, t_2)$  si no, podemos suponer que  $\psi > 0$  en  $(t_1, t_2)$ . Ahora resulta que:

$$0 < \int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\varphi\psi = - \int_{t_1}^{t_2} \{(p\psi')'\varphi - (p\varphi')'\psi\} = p\varphi'\psi|_{t_1}^{t_2}. \quad (2.22)$$

Por tanto:

$$0 < p(t_2)\varphi'(t_2)\psi(t_2) - p(t_1)\varphi'(t_1)\psi(t_1). \quad (2.23)$$

Esta relación es imposible porque el segundo miembro es menor o igual que cero.  $\square$

**Corolario 2.31.** *Se obtiene la misma conclusión si la condición de comparación fuerte (2.21) se reemplaza por la condición más débil:*

$$q_1(t) \leq q_2(t) \ \& \ q_1 \neq q_2 \quad \text{en } [t_1, t_2]. \quad (2.24)$$

Otra consecuencia más.

**Corolario 2.32** (Teorema de separación de Sturm). *Sean  $\varphi, \psi$  soluciones linealmente independientes de la ecuación*

$$(px')' + qx = 0 \quad t \in (a, b).$$

*Entonces, entre dos ceros consecutivos  $t_1 < t_2$  de  $\varphi$  existe un único cero de  $\psi$  y recíprocamente, entre dos ceros consecutivos  $t'_1 < t'_2$  de  $\psi$ , existe un único cero de  $\varphi$ .*

*Demostración.* Razonamos como antes pero ahora observamos que si  $\psi$  no se anula en  $(t_1, t_2)$  se puede tomar positiva en ese intervalo e incluso tiene que ser positiva en  $t = t_1, t_2$ . Ahora:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\varphi\psi = p(t_2)\varphi'(t_2)\psi(t_2) - p(t_1)\varphi'(t_1)\psi(t_1).$$

Esta identidad no es posible porque el segundo miembro es negativo.  $\square$

*Demostración de iv), Teorema 2.25.* Sabemos por iii) que si  $\psi_n$  es una autofunción asociada a  $\lambda_n$  entonces presenta exactamente  $n - 1$  ceros en  $(a, b)$ :

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < b.$$

Por otro lado, del teorema de comparación de Sturm,  $\psi_{n+1}$  posee al menos un cero  $t'_k \in (t_{k-1}, t_k)$ . Asimismo, se prueba que ha de haber ceros de  $\psi_{n+1}$  en  $(a, t_1)$  y en  $(t_{n-1}, b)$ . Como en total suman  $n$  resulta que hay exactamente un cero  $t'_k$  en  $(t_{k-1}, t_k)$  para  $k = 2, \dots, n - 1$ .

Probamos la afirmación. Si  $\psi_{n+1}$  no se anula en  $(t_{n-1}, b)$  podemos suponer que  $\psi_n$  y  $\psi_{n+1}$  son positivas en dicho intervalo con  $\psi_{n+1}(t_{n-1}) \geq 0$  y  $\psi'_n(t_{n-1}) > 0$ . Usamos la desigualdad (2.22) para concluir:

$$0 < p\psi'_n\psi_{n+1}\Big|_{t_{n-1}}^b - p\psi'_{n+1}\psi_n\Big|_{t_{n-1}}^b = -p\psi'_n\psi_{n+1}\Big|_{t=t_{n-1}}.$$

Esto no es posible, lo que prueba la afirmación.  $\square$

**Definición 2.33.** Se dice que una solución  $x(t)$  de la ecuación  $\mathcal{L}x = 0$ ,  $\mathcal{L}x = (px')' + q$ , es oscilatoria en  $(a, b)$  si posee infinitos ceros en  $(a, b)$ .

*Observación 2.20.* Una solución no puede ser oscilatoria en un intervalo compacto  $[a, b]$  salvo que sea idénticamente nula.

*Observación 2.21.* Si una ecuación posee una solución oscilatoria en  $(a, b)$  entonces todas las demás soluciones no triviales de la ecuación son oscilatorias en  $(a, b)$ .

*Ejemplo 2.22.*

$x'' + mx = 0$  es oscilatoria en  $\mathbb{R}$  si  $m > 0$  y no oscilatoria en  $\mathbb{R}$  si  $m \leq 0$ .

En los ejercicios se muestra la siguiente propiedad.

**Proposición 2.34.** Sea  $q \in C(a, b)$ . Si  $q(t) \leq 0$  en  $(a, b)$  ninguna solución de

$$x'' + q(t)x = 0$$

puede anularse más de una vez salvo que sea idénticamente nula.

Por otro lado, del teorema de comparación de Sturm se deduce lo siguiente.

**Proposición 2.35.** Sea  $q \in C(a, \infty)$  tal que:

$$q(t) \geq m > 0.$$

Entonces la ecuación  $x'' + q(t)x = 0$  es oscilatoria en  $(a, +\infty)$ .

Un corolario de todo lo dicho es el siguiente.

**Corolario 2.36.** Sea  $q \in C(a, \infty)$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = m.$$

Entonces.

- i)  $m > 0 \Rightarrow$  la ecuación  $x'' + qx = 0$  es oscilatoria en  $(a, \infty)$ .  
 ii)  $m \leq 0 \Rightarrow$  la ecuación  $x'' + qx = 0$  es no oscilatoria en  $(a, \infty)$ .

Algunos resultados para el caso  $m = 0$  se tratan en los ejercicios y muestran que esta situación es dudosa.

### 2.2.12. Ejercicios

▼ Ceros de las soluciones. Oscilaciones.

1. Hállense todas las soluciones de la ecuación:

$$x'' + x = 0$$

que se anulan en el punto  $t = t_0$ . Misma cuestión para la ecuación:

$$x'' - x = 0.$$

**Solución.** En el primer caso las soluciones tienen la forma  $x(t) = c \operatorname{sen}(t - t_0)$ ,  $c$  constante.

2. Usar el teorema de separación de Sturm para demostrar que entre dos ceros consecutivos de  $\operatorname{sen} 2t + \cos 2t$  existe exactamente un cero de  $\operatorname{sen} 2t + \cos 2t$ .  
 3. Demostrar que toda solución de la ecuación:

$$x'' + (t + 1)x = 0$$

posee un número infinito de ceros positivos. Más generalmente, probar que si  $q(t)$  es continua y positiva en  $t > 0$  y  $k$  es una constante positiva entonces toda solución de

$$x'' + (q(t) + k)x = 0$$

posee una infinidad de ceros positivos.

4. Sea  $q(t)$  continua y no positiva en  $(a, b)$ , es decir,  $q(t) \leq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . Pruébese que toda solución no trivial de la ecuación

$$x'' + q(t)x = 0$$

se anula como mucho una vez en el intervalo  $(a, b)$ . A tal efecto, compruébese primero que si  $x(t)$  es no trivial entonces  $xx'$  es una función creciente en  $(a, b)$ .

5. Sea  $q(t)$  una función continua en  $(a, b)$  tal que

$$0 < m < q(t) < M,$$

para ciertas constantes  $m, M$  y considérese la ecuación

$$x'' + q(t)x = 0.$$

Si  $x(t)$  es una solución con dos ceros consecutivos  $t_1 < t_2$ , pruébese que

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} < t_2 - t_1 < \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

6. Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  es una constante, determínense todas las soluciones de la ecuación:

$$x'' + \frac{\alpha}{t^2}x = 0.$$

Concluir que es oscilatoria en  $\mathbb{R}$  si  $\alpha > \frac{1}{4}$ , no oscilatoria en caso contrario.

7. Sea  $q(t)$  continua en  $(a, \infty)$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 q(t) = \gamma.$$

Pruébese que:

- i) La ecuación  $x'' + qx = 0$  es oscilatoria en  $(a, \infty)$  si  $\alpha > \frac{1}{4}$ .
  - ii) La ecuación  $x'' + qx = 0$  es no oscilatoria en  $(a, \infty)$  si  $\alpha < \frac{1}{4}$ .
8. Decídase si es oscilatoria en  $[0, \infty)$  la ecuación diferencial:

$$(e^{\alpha t} x')' + e^{\beta t} x = 0,$$

donde  $\alpha, \beta$  son números reales arbitrarios. A tal efecto, hágase primero el cambio de función incógnita:

$$x(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t} y(t),$$

lo cual reduce la forma de la ecuación.

9. Decídase en cuál de los dos intervalos  $(-\infty, 0]$  ó  $[0, \infty)$  es oscilatoria la ecuación de Airy:

$$x'' - tx = 0.$$

10. Demuéstrase que toda solución de la ecuación de Bessel:

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - \alpha^2)x = 0,$$

posee infinitos ceros en  $(0, \infty)$ .

- ♠ En los ejercicios que siguen  $q(t)$  es una función continua en  $[0, \infty)$  que cumple  $q(t) > 0$ .



a) Pruébese que toda solución de la ecuación

$$x'' + qx = 0 \quad t \in [0, \infty)$$

admite al menos un cero  $t_0$ .

Indicación. Razonar por convexidad.

b) Pruébese que si  $x(t)$  es una solución positiva para  $t \geq c$  entonces se cumple la identidad:

$$-\int_c^t q(s) ds = \frac{x'(t)}{x(t)} + \int_c^t \frac{x'(s)^2}{x(s)^2} ds,$$

$t \geq c$ . Para ello se sugiere integrar por partes la expresión:

$$\int_c^t \frac{x''(s)}{x(s)} ds.$$

c) Se supone ahora que:

$$\int_0^\infty q(s) ds = \infty.$$

Pruébese que toda solución en las condiciones de b) admite un punto  $t_1 > c$  donde  $x'(t_1) < 0$ . Razonando como en a) demuéstrese entonces que  $x(t)$  admite un cero  $t_2 > t_1$ .

d) Admitiendo que:

$$\int_0^\infty q(s) ds = \infty,$$

pruébese que la ecuación es oscilatoria en  $[0, \infty)$ .

11. ♣ Supóngase que  $q(t)$  tiene signo constante en  $(a, b)$  y que  $t_1 < t_2$  son ceros consecutivos de una solución  $x(t)$  de la ecuación:

$$(px')' + qx = 0.$$

Pruébese que  $x(t)$  tiene exactamente un extremo local en  $(t_1, t_2)$ .

### 2.2.13. El problema de autovalores en coordenadas polares

*Ecuaciones en coordenadas polares.* Para probar la parte i) del Teorema (2.25) escribiremos en polares las soluciones de una ecuación de la forma:

$$(px')' + qx = 0 \quad t \in [a, b],$$

donde  $p \in C^1[a, b]$ ,  $p(t) \neq 0$ ,  $q \in C[a, b]$ . Llamamos  $x_2(t) = x(t)$ ,  $x_1(t) = p(t)x'(t)$  y la ecuación equivale al sistema:

$$\begin{cases} x_1' = -qx_2 \\ x_2' = \frac{1}{p}x_1. \end{cases}$$

Como los ceros de las soluciones  $x(t)$  son simples, la curva  $(x_1(t), x_2(t))$  no pasa por  $(0, 0)$  y existen funciones  $\rho(t) > 0$ ,  $\theta(t)$  de clase  $C^1$  tales que:

$$z(t) = x_1(t) + ix_2(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)},$$

donde

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \text{tag } \theta = \frac{x_2}{x_1}.$$

Dadas condiciones iniciales  $x(a), x'(a)$ ,  $\rho(a)$  y  $\theta(a)$  están unívocamente determinados, módulo  $2k\pi$  con respecto a  $\theta(a)$ .

Como aprendimos, el sistema precedente en coordenadas polares se escribe en la forma:

$$\begin{cases} \rho' = \rho \left( \frac{1}{p} - q \right) \cos \theta \sin \theta \\ \theta' = \frac{1}{p} \cos^2 \theta + q \sin^2 \theta. \end{cases}$$

Sobre los ceros de las soluciones  $x(t)$  de la ecuación notamos que:

$$x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta(t) \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Lo último significa que  $\theta(t) = k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

Resulta útil el siguiente teorema.

**Teorema 2.37** (Teorema de comparación). *Sean  $\mathcal{L}_i y = (p_i y')' + q_i y$  operadores en las condiciones de la sección cuyos coeficientes cumplen:*

$$0 < p_2(t) \leq p_1(t) \quad q_1(t) \leq q_2(t) \quad t \in [a, b],$$

*y sean  $y_1(t), y_2(t)$  soluciones de las ecuaciones  $\mathcal{L}_i y = 0$ ,  $i = 1, 2$  respectivamente, tales que:*

$$\theta_1(a) \leq \theta_2(a).$$

*Entonces:*

$$\theta_1(t) \leq \theta_2(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

Más aún, si

$$q_1(t) < q_2(t) \quad a < t \leq b,$$

entonces

$$\theta_1(t) < \theta_2(t) \quad a < t \leq b.$$

*Condiciones de contorno en coordenadas polares.* La primera observación es que las condiciones de contorno Sturm:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1(x) = \alpha_1 x(a) + \beta_1 p(a) x'(a) = 0 \\ \mathcal{B}_2(x) = \alpha_2 x(b) + \beta_2 p(b) x'(b) = 0, \end{cases}$$

se pueden escribir en la forma:

$$x(a) \cos \alpha - p(a) x'(a) \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad 0 \leq \alpha < \pi,$$

$$x(b) \cos \beta - p(b) x'(b) \operatorname{sen} \beta = 0 \quad 0 < \beta \leq \pi,$$

porque los vectores  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2)$  son siempre proporcionales a vectores de la forma:

$$(\cos \alpha_0, \operatorname{sen} \alpha_0) \quad (\cos \beta_0, \operatorname{sen} \beta_0),$$

con  $-\pi \leq \alpha_0 < 0$ ,  $-\pi < \beta_0 \leq 0$  y basta tomar  $\alpha = -\alpha_0$ ,  $\beta = -\beta_0$ .

Las condiciones de contorno se traducen en:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\theta(a) - \alpha) = 0 & \Leftrightarrow \theta(a) = \alpha \operatorname{mod} \pi \\ \operatorname{sen}(\theta(b) - \beta) = 0 & \Leftrightarrow \theta(b) = \beta \operatorname{mod} \pi. \end{cases}$$

Por tanto, una solución no trivial  $x(t)$  cumple  $\mathcal{B}_1(x) = 0$  si y sólo si, escrita en polares cumple  $\theta(a) = \alpha + k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . La misma observación se aplica a  $\mathcal{B}_2(x) = 0$ .

*El problema de autovalores.* Escrito en coordenadas polares toma la forma:

$$\begin{cases} \rho' = \rho \left( \frac{1}{p} - (\lambda r - q) \right) \cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ \theta' = \frac{1}{p} \cos^2 \theta + (\lambda r - q) \operatorname{sen}^2 \theta, \end{cases}$$

junto con las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \theta(a) = \alpha \operatorname{mod} \pi \\ \theta(b) = \beta \operatorname{mod} \pi. \end{cases}$$

Como se ve, resolver completamente el problema es equivalente a resolver la “parte angular” del mismo:

$$\begin{cases} \theta' = \frac{1}{p} \cos^2 \theta + (\lambda r - q) \operatorname{sen}^2 \theta \\ \theta(a) = \alpha \operatorname{mod} \pi, \quad \theta(b) = \beta \operatorname{mod} \pi. \end{cases} \quad (2.25)$$

En efecto, una solución de éste permite calcular  $\rho(t)$  y la solución se obtiene haciendo:

$$x(t) = \rho(t) \operatorname{sen} \theta(t).$$

Por otro lado se observa que  $\theta(t)$  resuelve (2.25) si y sólo si  $\theta(t) + k\pi$  resuelve el mismo problema. Eso al final se traduce en que  $x(t)$  resuelve el problema de autovalores si y sólo si lo resuelve  $-x(t)$ . Asimismo, si  $c$  es cualquier constante las condiciones iniciales de  $cx(t)$  en términos de las de  $x(t)$ , a saber  $(\rho(a), \theta(a))$ , son  $(|c|\rho(a), \theta(a) + k\pi)$ . Luego la representación polar de  $cx(t)$  es  $(|c|\rho(t), \theta(t) + k\pi)$ . Queda claro de nuevo que  $cx(t)$  resuelve el problema (2.19) si  $x(t)$  lo resuelve, cosa finalmente equivalente a que  $\theta(t)$  sea solución de (2.25).

*Demostración del Teorema 2.25, i) & ii).* Vamos primero a establecer la existencia de autovalores. Sobre la marcha probaremos que los autovalores obtenidos constituyen realmente la *totalidad* de los autovalores del problema.

Primero que nada resolvemos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \theta' = \frac{1}{p} \cos^2 \theta + (\lambda r - q) \operatorname{sen}^2 \theta \\ \theta(a) = \alpha, \end{cases} \quad (2.26)$$

en la que  $\lambda$  es un parámetro real (pues sabemos “a priori” que los autovalores son reales). La solución la denotaremos como:

$$\theta(t) = \theta(t, \lambda).$$

Sabemos de la teoría de prolongabilidad que  $\theta(t, \lambda)$  está definida en todo el intervalo  $[a, b]$ .

Es importante destacar que las líneas  $\theta = k\pi$  hacen positivo el segundo miembro de la ecuación. Por tanto una tal línea sólo se cruza una vez y en sentido creciente. Asimismo si  $\theta(t)$  cruza  $\theta = k\pi$  en el instante  $t = t_k$  entonces  $x(t)$  tiene un cero en  $t_k$ :

$$x(t_k) = \rho(t_k) \operatorname{sen} k\pi = 0.$$

En particular,  $\theta(t, \lambda) > 0$  para todo  $t \in (a, b]$  y todo  $\lambda \in \mathbb{R}$

Otra observación importante se sigue del Teorema de Comparación: si  $\lambda_1 < \lambda_2$  entonces:

$$\theta(t, \lambda_1) < \theta(t, \lambda_2) \quad \forall t \in (a, b].$$

Es decir, la solución  $\theta(t, \lambda)$  es estrictamente creciente con respecto a  $\lambda$  en cada punto del intervalo  $(a, b]^2$ .

El punto clave de la demostración es el siguiente lema (cuya prueba se omite).

---

<sup>2</sup>Puede darse una prueba directa de esta afirmación sin más que derivar  $\theta(t, \lambda)$  con respecto a  $\lambda$ . Hacen falta sin embargo los resultados de diferenciabilidad con respecto a datos iniciales y parámetros

**Lema 2.38.** *Sea  $\theta(t, \lambda)$  la solución del problema (2.26). Entonces, para cada  $t \in (a, b]$  se tiene que:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \theta(t, \lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \theta(t, \lambda) = \infty.$$

Por consiguiente, para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe un único valor  $\lambda = \lambda_k$  tal que:

$$\theta(b, \lambda) = \pi + (k - 1)\pi.$$

Está claro que cada  $\lambda_k$  define un autovalor de (2.19), y que tal sucesión de autovalores es estrictamente creciente y cumple:

$$\lim \lambda_k = \infty.$$

Por otra parte, para llegar al valor  $\beta + (k - 1)\pi$  en  $t = b$ ,  $\theta(t, \lambda_k)$  debe cruzar exactamente una vez las líneas  $\theta = \pi, \dots, \theta = (k - 1)\pi$  en una sucesión creciente de valores:

$$a < t_1 < \dots < t_{k-1} < b,$$

que son por tanto ceros de la autofunción  $x(t)$ . Como todas las otras autofunciones asociadas a  $\lambda_k$  son proporcionales a  $x(t)$ , hemos probado que todas las tales autofunciones poseen exactamente  $k - 1$  ceros en  $(a, b)$ .

Demostramos finalmente que si  $\lambda^*$  es un autovalor entonces coincide con alguno de los  $\lambda_k$ . En efecto la parte angular  $\theta(t)$  de la autofunción correspondiente ha de cumplir:

$$\theta(a) = \alpha + k_1\pi \quad \theta(b) = \beta + k_2\pi \quad (k_2 \geq k_1).$$

Por tanto  $\theta_1(t) = \theta(t) - k_1\pi$  resuelve (2.26) para el valor  $\lambda = \lambda^*$  con  $\theta_1(b) = \beta + k_2 - k_1$ . Esto implica que necesariamente  $\lambda^* = \lambda_{k_2 - k_1}$  y hemos concluido la demostración del Teorema 2.25.  $\square$

### 2.2.14. Autovalores y funciones de Green: teoría de operadores

Desde el punto de vista de los autovalores, es evidente que el problema de contorno:

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = 0 & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0 \end{cases}$$

es *no crítico* si y sólo si  $\lambda = 0$  no es autovalor del problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = \lambda rx & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0. \end{cases}$$

Por otro lado, cuando el problema de contorno es no crítico éste admite una única función de Green  $G(t, s)$ , de suerte que, para toda  $f \in C[a, b]$ , la solución del problema no homogéneo:

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = f(t) & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0, \end{cases}$$

se expresa en la forma:

$$x(t) = \mathcal{G}(f)(t) = \int_a^b G(t, s)f(s) ds.$$

La aplicación:

$$\mathcal{G} : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

es el operador de Green del problema. Así,  $x(t)$  es autofunción del problema asociada a  $\lambda$  si y sólo si:

$$\mathcal{G}_r(x)(t) = \frac{1}{\lambda}x(t) \quad \mathcal{G}_r(f) = \mathcal{G}(rx).$$

Esto significa que los autovalores del problema de contorno son los inversos de los autovalores del operador:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_r : & C[a, b] & \longrightarrow & C[a, b] \\ & x(t) & \longmapsto & \mathcal{G}_r(x)(t) = \mathcal{G}(rx). \end{array}$$

La teoría de operadores estudia entre otros temas existencia y distribución de los autovalores de aplicaciones lineales (operadores lineales)  $T : X \rightarrow X$  entre espacios de Banach o de Hilbert. La clase mejor estudiada es la de los operadores compactos que es a la que pertenece el operador  $\mathcal{G}_r$ . Un teorema general – el “teorema espectral” (cf. [12])– se aplica directamente a  $\mathcal{G}_r$  para asegurar la existencia de la infinitud de autovalores.

Sin embargo, la conclusión más importante con mucha diferencia que se extrae del teorema espectral es el carácter de sistema completo de la familia de autofunciones (Teorema 2.40). Este aspecto del problema de autovalores lo estudiamos con detalle en una sección separada.

Enunciamos a continuación una observación que describe una familia de problemas no críticos

**Proposición 2.39.** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.25, condiciones de contorno  $\mathcal{B}$  de tipo Dirichlet, Neumann o Robin (Sección 2.2.1) el problema de contorno:*

$$\begin{cases} -(p(t)x')' + q(t)x = 0 & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0 \end{cases}$$

*es no crítico si  $q(t) \geq 0$  y  $q(t) \not\equiv 0$ .*

### 2.2.15. Completitud del sistema de autofunciones: series de Fourier.

Consideramos  $\mathbb{R}^n$  con el producto escalar estándar:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Sea  $V$  un subespacio  $m$ -dimensional generado por un sistema ortonormal

$$\{v_1, \dots, v_m\},$$

de suerte que:

$$V = \left\{ y = \sum_{i=1}^m y_i v_i : y_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es bien conocido que para todo  $x$  existe un único vector  $x_V \in V$  que es la mejor aproximación de  $x$  por elementos de  $V$ . En otras palabras, la función:

$$\varphi(y) = |y - x|^2 \quad y \in V$$

alcanza un mínimo en  $y = x_V = \sum_{i=1}^m x_i v_i$  y además:

$$\varphi(y) = |x - x_V|^2 + \sum_{i=1}^m (y_i - x_i)^2 \quad x_i = \langle x, v_i \rangle.$$

El vector  $x_V$  se denomina la mejor aproximación de  $x$  en  $V$ . El método de minimizar  $\varphi$  para obtener  $x_V$  se denomina “de los mínimos cuadrados”. Se sabe además que  $x - x_V$  es ortogonal a  $V$  y por ello se dice que  $x_V$  es la proyección ortogonal de  $x$  sobre  $V$ .

Los coeficientes  $x_i$  de  $x$  en el sistema  $\{v_1, \dots, v_m\}$  se llaman “coeficientes de Fourier” de  $x$  con respecto a dicho sistema. Cuando  $V = \mathbb{R}^n$  y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base ortonormal entonces todos los vectores se representan en la forma:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad x_i = \langle x, v_i \rangle.$$

La norma de  $x$  cumple:

$$|x|^2 = \sum x_i^2.$$

Si  $\{w_1, \dots, w_n\}$  es un sistema *ortogonal* (en vez de “ortonormal”) en  $\mathbb{R}^n$  entonces:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i w_i \quad x_i = \frac{\langle x, w_i \rangle}{|w_i|^2},$$

y la norma de  $x$  cumple:

$$|x|^2 = \sum x_i^2 |w_i|^2.$$



El siguiente teorema recoge el segundo gran resultado de la teoría de problemas de Sturm–Liouville. Se usará la siguiente expresión para un nuevo producto escalar en  $R[a, b]$ :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(dr)} = \int_a^b f(t)g(t)r(t) dt,$$

en donde  $f, g \in R[a, b]$  y  $r(t)$  satisface las condiciones del Teorema 2.25.

**Teorema 2.40.** *Bajo las condiciones del Teorema 2.25 sea*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

la sucesión de autovalores del problema (2.19):

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = \lambda r(t)x & t \in [a, b] \\ \mathcal{B}(x) = 0, \end{cases}$$

y sea  $\psi_n(t)$  una sucesión formada por autofunciones asociadas a dichos autovalores.

Entonces:

i) [Ortogonalidad]. Para  $\lambda_n \neq \lambda_m$  las correspondientes autofunciones  $\psi_n, \psi_m$  son ortogonales con respecto al producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(dr)}$ , es decir:

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle_{L^2(dr)} = 0.$$

ii) [Completitud]. Toda función  $f(t) \in C_B^2[a, b]$  se puede representar en la forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n(t), \quad (2.27)$$

donde

$$f_n = \frac{\langle f, \psi_n \rangle_{L^2(dr)}}{\langle \psi_n, \psi_n \rangle_{L^2(dr)}} = \frac{\int_a^b f(t)\psi_n(t)r(t) dt}{\int_a^b \psi_n^2(t)r(t) dt},$$

y donde la serie funcional en (2.27) converge uniformemente en  $[a, b]$ .

Si  $\varphi_n$  denota una sucesión ortonormal de autofunciones correspondientes a  $\lambda_n$ :

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{L^2(dr)} = \delta_{nm} \quad \delta_{nm} \text{ la "delta" de Kronecker}$$

entonces (2.27) se representa en la forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(t), \quad (2.28)$$

donde los coeficientes son:

$$f_n = \langle f, \varphi_n \rangle_{L^2(dr)}.$$

*Observación 2.23.* Una sucesión ortonormal puede construirse inmediatamente a partir de una familia ortogonal  $\{\psi_n\}$ . Basta dividir cada  $\psi_n$  por su norma  $L^2(dr)$ :

$$\varphi_n(t) = \frac{\psi_n(t)}{|\psi_n|_{L^2(dr)}}, \quad |\psi_n|_{L^2(dr)}^2 = \int_a^b \psi(t)^2 r(t) dt.$$

**Definición 2.41.** *Las expresiones (2.27) o (2.28) se denominan indistintamente el desarrollo de Fourier de  $f(t)$  en serie de autofunciones del problema (2.19). En ambos casos  $f_n$  se denomina el coeficiente de Fourier  $n$ -ésimo de  $f$ .*

*Demostración de i).* Para  $\lambda_n \neq \lambda_m$ :

$$\langle \mathcal{L}\psi_n, \psi_m \rangle_{L^2} = \langle \psi_n, \mathcal{L}\psi_m \rangle_{L^2} \Rightarrow \langle \lambda_n r \psi_n, \psi_m \rangle_{L^2} = \langle \psi_n, \lambda_m r \psi_m \rangle_{L^2},$$

$$\lambda_n \langle \psi_n, \psi_m \rangle_{L^2(dr)} = \lambda_m \langle \psi_n, \psi_m \rangle_{L^2(dr)} \Rightarrow \langle \psi_n, \lambda_m \psi_m \rangle_{L^2(dr)} = 0,$$

pues  $\lambda_n \neq \lambda_m$ .

La demostración de ii) hace uso de la teoría de operadores compactos. Al estar más allá de los objetivos del curso, se omite.  $\square$

El teorema de completitud admite una extensión en la que se amplía la clase de funciones  $f(t)$  que se puede representar mediante los desarrollos (2.27) o (2.28). A tal efecto se introduce en  $R[a, b]$ , el espacio de las funciones acotadas e integrable Riemann sobre  $[a, b]$ , la distancia asociada al producto  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(dr)}$ , a saber:

$$d(f, g) = |f - g|_{L^2(dr)} = \sqrt{\langle f - g, f - g \rangle_{L^2(dr)}} = \left\{ \int_a^b (f - g)^2 r dt \right\}^{1/2}.$$

Esta es la distancia en “media cuadrática” (y peso  $r(t)$ ) de  $f$  y  $g$ .

Se dice una serie de funciones  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$  converge en media cuadrática a  $g$ ,  $g_n, g \in R[a, b]$  si la sucesión de sumas parciales:

$$G_n(t) = g_1(t) + \cdots + g_n(t),$$

cumple:

$$|G_n - g|_{L^2(dr)} \rightarrow 0.$$

**Teorema 2.42.** *Sea  $f \in R[a, b]$  y  $\{\varphi_n\}$  una sucesión ortonormal de autofunciones asociada a los autovalores del problema (2.19). Entonces:*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n(t), \quad (2.29)$$

donde

$$f_n = \frac{\langle f, \psi_n \rangle_{L^2(dr)}}{\langle \psi_n, \psi_n \rangle_{L^2(dr)}} = \frac{\int_a^b f(t) \psi_n(t) r(t) dt}{\int_a^b \psi_n^2(t) r(t) dt},$$

y donde la serie funcional en (2.29) converge en media cuadrática.

El teorema precedente, conocido como teorema de completitud, se prueba sin dificultad una vez que se sabe que las funciones de  $R[a, b]$  se aproximan en media cuadrática por funciones del espacio  $C_{\mathcal{B}}^2[a, b]$ .

**Definición 2.43.** *Toda familia ortogonal de autofunciones  $\{\psi_n\}$  asociada a los autovalores del problema (2.19) se denomina un sistema completo de autofunciones.*

Nos ocupamos ahora de los ejemplos más importantes de la teoría: las series trigonométricas.

### Series de Fourier. Series en senos y series en cosenos

El problema:

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

tiene autovalores  $\lambda_n = n^2\pi^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  y autofunciones  $\psi_n = \text{sen } n\pi t$ . El sistema  $\psi_n$  y el sistema ortonormal asociado  $\varphi_n = \sqrt{2} \text{sen } n\pi t$  son completos (Teorema 2.40).

**Proposición 2.44.** *Toda  $f \in C^2[0, 1]$  tal que  $f(0) = f(1) = 0$  se representa en la forma:*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } n\pi t, \quad (2.30)$$

$$b_n = 2 \int_0^1 f(t) \text{sen } n\pi t \, dt,$$

siendo la serie uniformemente convergente en  $[0, 1]$ .

El desarrollo converge en media cuadrática si  $f(t) \in R[0, 1]$ , sin más restricciones sobre  $f$ .

*Demostración.* Un sistema ortonormal de autofunciones es:

$$\varphi_n = \sqrt{2} \text{sen } n\pi t \Rightarrow f = \sum f_n \varphi_n, \quad f_n = \langle f, \varphi_n \rangle_{L^2}.$$

Ahora:

$$f_n = \langle f, \varphi_n \rangle_{L^2} = \sqrt{2} \langle f, \text{sen } n\pi s \rangle_{L^2},$$

luego:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \langle f, \text{sen } n\pi s \rangle_{L^2} \text{sen } n\pi t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } n\pi t,$$

donde:

$$\langle f, \text{sen } n\pi s \rangle_{L^2} = \int_0^1 f(s) \text{sen } n\pi s \, ds.$$

□

Análogamente,

$$\begin{cases} -x'' = \lambda x & t \in [0, 1] \\ x'(0) = x'(1) = 0, \end{cases}$$

tiene autovalores  $\lambda_n = n^2\pi^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  y autofunciones  $\psi_n = \cos n\pi t$ . El sistema  $\varphi_n = \sqrt{2} \cos n\pi t$  es completo. Por tanto se cumple la siguiente propiedad.

**Proposición 2.45.** *Toda  $f \in C^2[0, 1]$  tal que  $f'(0) = f'(1) = 0$  se representa en la forma:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t, \quad (2.31)$$

$$a_n = 2 \int_0^1 f(t) \cos n\pi t \, dt \quad a_0 = 2 \int_0^1 f(t) \, dt,$$

siendo la serie uniformemente convergente en  $[0, 1]$ .

El desarrollo converge en media cuadrática si  $f(t) \in R[0, 1]$ , sin más restricciones sobre  $f$ .

**Definición 2.46.** *Para  $f \in R[a, b]$ , (2.30) se denomina el desarrollo de Fourier de  $f$  en senos, (2.31) es el correspondiente desarrollo en cosenos.*

Utilizando las dos propiedades se demuestra el siguiente resultado.

**Proposición 2.47.** *Sea  $f \in C^2[-1, 1]$  tal que  $f(-1) = f(1)$ ,  $f'(-1) = f'(1)$ . Entonces:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t, \quad (2.32)$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t \, dt,$$

$$a_n = \int_{-1}^1 f(t) \cos n\pi t \, dt \quad a_0 = \int_{-1}^1 f(t) \, dt,$$

siendo la serie uniformemente convergente en  $[-1, 1]$ .

El desarrollo converge en media cuadrática si  $f(t) \in R[-1, 1]$ , sin más restricciones sobre  $f$ .

*Demostración.* Para reducir el caso periódico a los anteriores escribimos:

$$f(t) = g(t) + h(t)$$

donde  $g(t)$  es par,  $h(t)$  es impar y están bajo las condiciones de las proposiciones anteriores en el intervalo  $[0, 1]$ . Basta tomar:

$$g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad h(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}.$$

Al desarrollarlas en el intervalo  $[0, 1]$  uno encuentra que:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t, \quad (2.33)$$

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi t, \quad (2.34)$$

donde, al converger uniformemente en  $[0, 1]$  también lo hacen en  $[-1, 1]$ . De ahí sale la convergencia a  $f$  del desarrollo (2.32) en  $[-1, 1]$ . El caso Riemann-integrable es igual.  $\square$

*Observación 2.24.* Las series de la forma (2.32)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t + b_n \operatorname{sen} n\pi t,$$

de la que las series en senos o cosenos son casos particulares, también se llaman series trigonométricas. Es también costumbre referirse al desarrollo en cosenos y senos simultáneamente como el desarrollo en serie de Fourier.

### Series de Fourier en otros intervalos

Si  $f(t)$  es una función acotada y Riemann-integrable en el intervalo  $[0, L]$  en lugar de  $[0, 1]$ , también se puede desarrollar en serie de Fourier de senos o de cosenos en dicho intervalo. Basta con efectuar un cambio de escala.

Obtenemos así:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} t \quad t \in [0, L], \quad (2.35)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} t dt,$$

o alternativamente:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} t \quad t \in [0, L], \quad (2.36)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt \quad a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) dt.$$

Análogamente, si  $f(t) \in R[-L, L]$  se la puede desarrollar en serie de Fourier de senos y de cosenos en la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} t \quad t \in [-L, L], \quad (2.37)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} t \, dt,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{cos} \frac{n\pi}{L} t \, dt \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \, dt.$$

Especialmente simples son las expresiones de estos desarrollos cuando  $L = \pi$ . Por ejemplo, en el último caso una función  $f(t)$  integrable Riemann se representa en la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{cos} nt + b_n \operatorname{sen} nt \quad t \in [-\pi, \pi],$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{cos} nt \, dt, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt.$$

Todos los desarrollos son convergentes en media cuadrática. La convergencia es uniforme si las funciones son de clase  $C^2$  y cumplen  $f = 0$  en  $t = 0, L$  en el caso de senos,  $f' = 0$  en  $t = 0, L$  en el caso de cosenos y  $f(-L) = f(L)$ ,  $f'(-L) = f'(L)$  en el caso de desarrollos en senos y cosenos en el intervalo  $[-L, L]$ .

#### En el intervalo $[-\pi, \pi]$

Como se ha visto, es en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  donde más sencillamente se escriben los desarrollos en serie de Fourier. Merece la pena que resaltemos algunos hechos básicos.

Si  $f \in R[-\pi, \pi]$  es par entonces los términos  $b_n = 0$ , es decir su desarrollo de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{cos} nt + b_n \operatorname{sen} nt = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{cos} nt.$$

Además:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{cos} nt \, dt.$$

Por tanto, cuando una función es par en  $[-\pi, \pi]$  su desarrollo de Fourier en  $[-\pi, \pi]$  coincide con el desarrollo de Fourier en cosenos de su restricción al intervalo  $[0, \pi]$ .

Se puede enunciar un resultado recíproco. Dada una función arbitraria  $f \in R[0, \pi]$ , podemos construir su *extensión par*  $\bar{f}$  al intervalo  $[-\pi, \pi]$  y hallar su desarrollo en serie en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ :

$$\bar{f}(t) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \operatorname{cos} nt + \bar{b}_n \operatorname{sen} nt.$$

Uno encuentra inmediatamente que  $\bar{b}_n = 0$ ,  $\bar{a}_n = a_n$  donde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos nt \, dt.$$

Resumiendo, el desarrollo en serie de cosenos en  $[0, \pi]$  de  $f$  se reduce al desarrollo en senos y cosenos de su extensión par  $\bar{f}$  al intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Análogamente, si  $f$  es impar los coeficientes  $a_n$  de su desarrollo en  $[-\pi, \pi]$  son cero y coincide con el desarrollo en senos de la función restringida al intervalo  $[0, \pi]$ . Recíprocamente, si  $f$  está definida en  $[0, \pi]$  su desarrollo en serie de senos coincide con el desarrollo en serie, en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , de su extensión impar  $\hat{f}$  a ese intervalo.

### Identidad de Parseval

En la presente sección suponemos que las funciones  $f, g \in R[-\pi, \pi]$ , es decir son funciones acotadas y Riemann-integrables. Por normalizar suponemos que los intervalos de definición son  $[-\pi, \pi]$  o  $[0, \pi]$  según trabajemos con un tipo u otro de desarrollo. El primer resultado, consecuencia de la convergencia en media cuadrática de la serie de Fourier viene a decir que los coeficientes de Fourier juegan el papel de las coordenadas en una referencia ortonormal en un espacio euclídeo de dimensión finita.

**Teorema 2.48** (Identidades de Parseval). *Para  $f, g \in R[-\pi, \pi]$  se tiene que:*

$$a) \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) \, dt = \pi \left\{ \frac{a_0 \hat{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{a}_n + b_n \hat{b}_n \right\},$$

$$b) \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, dt = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right\}.$$

Análogamente y para  $f, g \in R[0, \pi]$  se tiene que:

$$c) \int_0^\pi f(t)g(t) \, dt = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{a_0 \hat{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{a}_n \right\},$$

$$d) \int_0^\pi f(t)^2 \, dt = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right\},$$

mientras:

$$e) \int_0^\pi f(t)g(t) \, dt = \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \hat{b}_n \right\},$$

$$f) \int_0^\pi f(t)^2 \, dt = \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right\}.$$

**Teorema 2.49** (Principio de identidad). *Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas en  $[-\pi, \pi]$  con desarrollos en serie de Fourier :*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt, \quad g(t) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \cos nt + \bar{b}_n \operatorname{sen} nt.$$

Entonces  $f(t) = g(t)$  si y sólo si  $a_n = \bar{a}_n$ ,  $b_n = \bar{b}_n$  para todo  $n$ .

*Demostración.* Los coeficientes de la función diferencia  $g - f$  son  $\bar{a}_n - a_n$ ,  $\bar{b}_n - b_n$  mientras la identidad de Parseval implica que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (g - f)^2 = \pi \left\{ \frac{(\bar{a}_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n - a_n)^2 + (\bar{b}_n - b_n)^2 \right\}.$$

Si los coeficientes son iguales la diferencia ha de ser cero.  $\square$

Otro resultado que es consecuencia directa de la convergencia en media cuadrática es la integrabilidad término a término de la serie de Fourier de una función integrable Riemann  $f$ .

**Teorema 2.50.** Sea  $f \in R[-\pi, \pi]$  entonces para  $t_0$  fijo y cada  $t \in [-\pi, \pi]$  se tiene que:

$$\int_{t_0}^t f(s) ds = \frac{a_0}{2}(t - t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{t_0}^t \cos ns ds + b_n \int_{t_0}^t \operatorname{sen} ns ds,$$

siendo la convergencia uniforme en  $[-\pi, \pi]$ . Análogamente, para  $f \in R[0, \pi]$ :

$$\int_{t_0}^t f(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{t_0}^t \operatorname{sen} ns ds,$$

$$\int_{t_0}^t f(s) ds = \frac{a_0}{2}(t - t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{t_0}^t \cos ns ds,$$

en donde  $t_0, t \in [0, \pi]$  y la convergencia es uniforme en  $[0, \pi]$ .

*Ejemplo 2.25.* La función  $f(t) = 1$  se representa en serie de senos en el intervalo  $[0, \pi]$ :

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)t.$$

Al integrar la serie término a término obtenemos:

$$t = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t,$$

es decir:

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left\{ \cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \dots \right\}.$$

Por el momento sólo sabemos que la primera serie converge en media cuadrática, mientras la segunda converge uniformemente de  $[0, \pi]$  según se desprende de la propiedad anterior. Las Figuras 2.1 y 2.2 ofrecen las gráficas de las sumas parciales de la serie (que es una serie funcional).



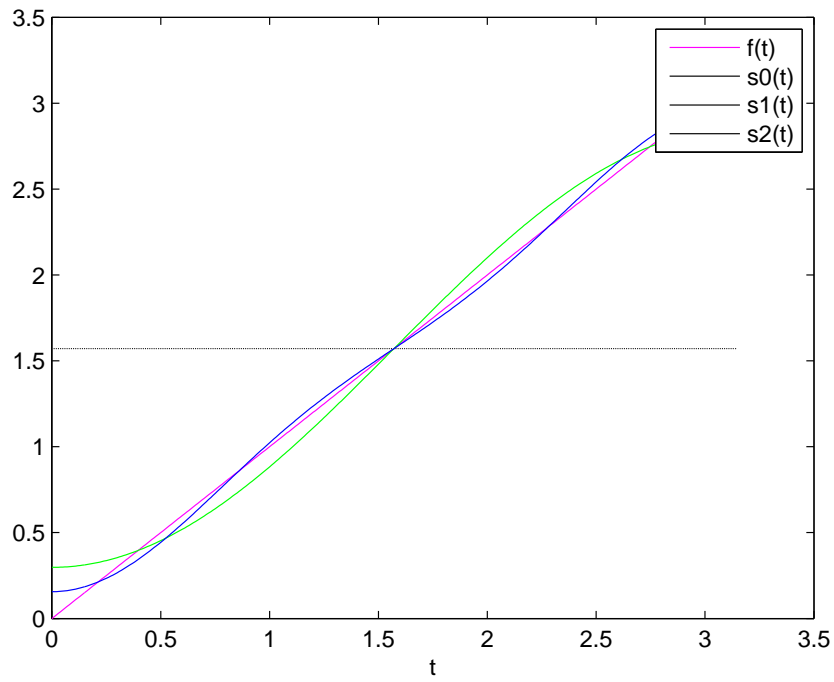


Figura 2.1: Las tres primeras sumas parciales de la serie de Fourier en cosenos de  $f(t) = t$  y en el intervalo  $[0, \pi]$ . La primera es  $s_0(t) = \pi/2$ , luego vienen  $s_1(t)$  y  $s_2(t) = t$ .

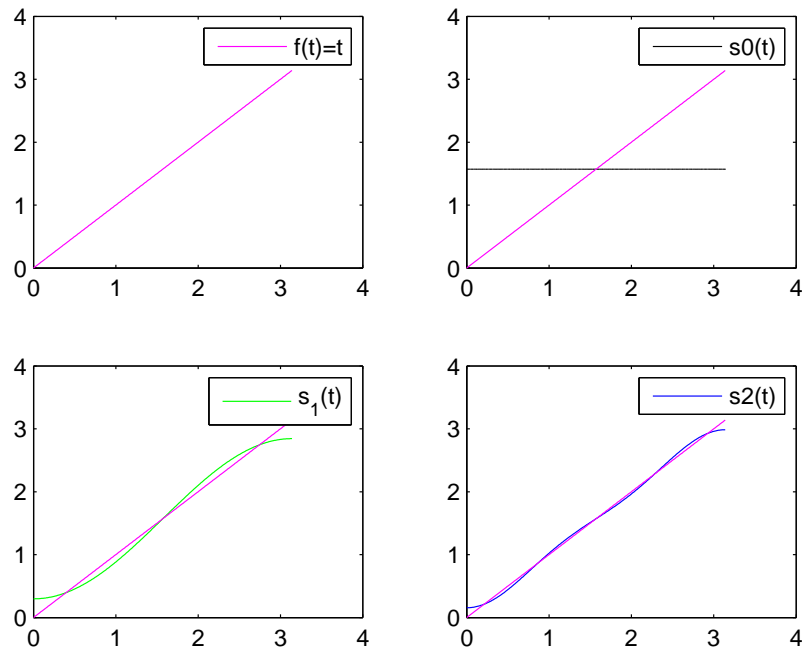


Figura 2.2: Las tres primeras sumas parciales de la serie de Fourier en cosenos de  $f(t) = t$  y en el intervalo  $[0, \pi]$ , en este caso trazadas por separado y comparadas con  $f(t)$ . La primera es  $s_0(t) = \pi/2$ , luego vienen  $s_1(t)$  y  $s_2(t) = t$ .

### El problema de la convergencia en las series de Fourier

Decidir qué condiciones debe reunir la función  $f$  para que su serie de Fourier converja en un punto  $t$  y que además la suma coincida con el valor  $f(t)$  es una de las cuestiones más delicadas del Análisis Matemático y se remonta al siglo XVIII.

Matemáticos como Euler, los Bernouilli, Lagrange, Fourier, Dirichlet, Riemann, Kolmogoroff, etc, se ocuparon de esta cuestión.

El Teorema 2.40, debido esencialmente a D. Hilbert es de principios del siglo XX y es un producto muy avanzado de la teoría para su tiempo. Nótese que no trata meramente de series trigonométricas sino que abarca los desarrollos en autofunciones de problemas generales de Sturm–Liouville.

Las series trigonométricas se estudiaron con anterioridad y e independientemente de los problemas de Sturm–Liouville. Una serie de resultados de convergencia puntual se fueron elaborando para esta clase importante de series a lo largo del siglo XIX. Las condiciones de convergencia puntual que se encontraron son bastante menos restrictivas que las del Teorema 2.40. De eso tratamos en esta sección. Debe no obstante subrayarse que la importancia del Teorema 2.40 estriba en su validez para la clase más amplia de desarrollos que provienen de problemas de Sturm–Liouville. Más aún, los resultados de Hilbert se aplican a ecuaciones integrales y a clases importantes de ecuaciones en derivadas parciales.

Como referencia trabajamos con series en  $[-\pi, \pi]$  y sabemos que si  $f \in R[-\pi, \pi]$  la serie:

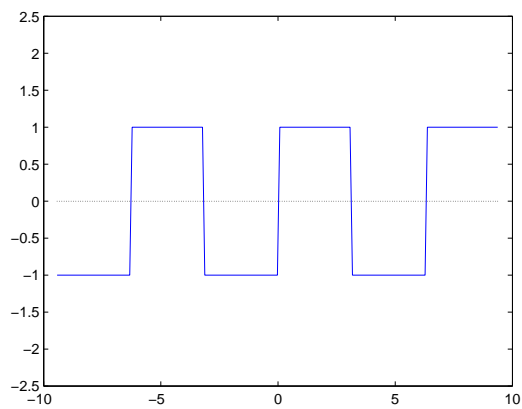
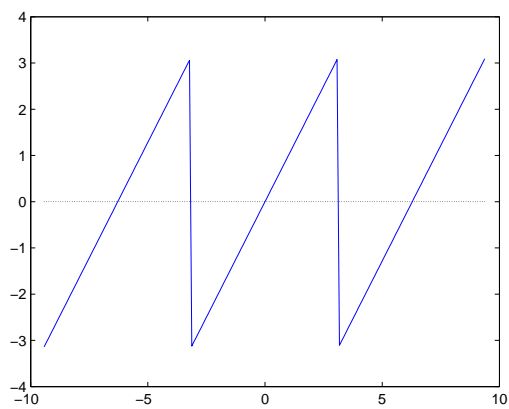
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt,$$

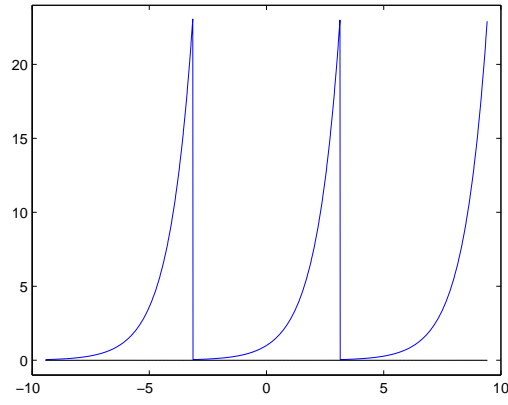
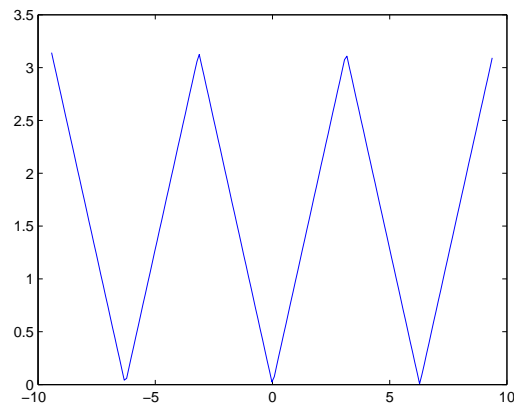
converge en media cuadrática. Sin embargo, esta información es un tanto difusa. Por eso nos ocupamos ahora de estudiar qué condiciones debe reunir  $f$  para que, digamos en  $t = t_0$ :

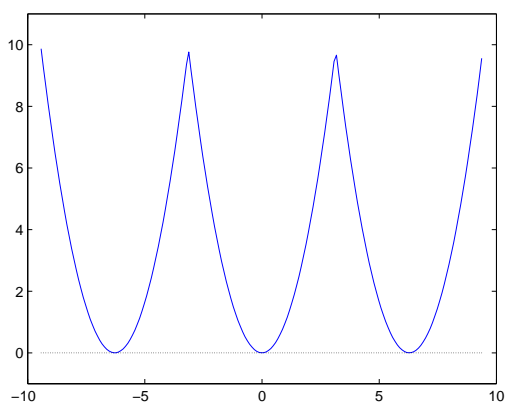
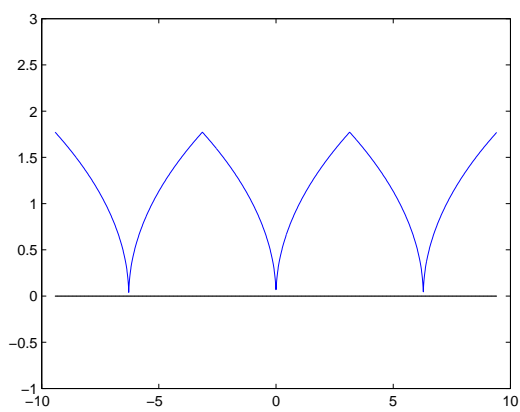
$$f(t_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt_0 + b_n \operatorname{sen} nt_0.$$

Para interpretar los resultados la teoría requiere que las funciones  $f(t)$  a considerar sean  $2\pi$ –periódicas. Por tanto, las funciones a estudiar, inicialmente definidas en  $[-\pi, \pi]$ , han de extenderse de manera  $2\pi$  periódica a todo  $\mathbb{R}$ . Esto es inmediato en los puntos  $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ . En los puntos  $t_k = \pi + 2k\pi$  se puede asignar a  $f$  el valor  $f(\pi)$  u otro cualquiera, ello no tiene consecuencias sobre la convergencia de la serie. Lo que sí se observa es que la extensión será en general una función continua a trozos en  $\mathbb{R}$ . Tómense como ejemplos las funciones  $f(t) = \operatorname{signo}(t)$ ,  $f(t) = t$ ,  $f(t) = t^2$ ,  $f(t) = |t|$  o  $f(t) = e^t$ , observadas en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Análogamente, los resultados que se enunciarán se aplican a los desarrollos en senos o en cosenos de funciones  $f$  que sólo están definidas en el intervalo

Figura 2.3: Extensión  $2\pi$  periódica de  $f(t) = \text{signo}(t)$ Figura 2.4: Extensión  $2\pi$  periódica de  $f(t) = t$

Figura 2.5: Extensión  $2\pi$  periódica de  $f(t) = e^t$ Figura 2.6: Extensión  $2\pi$  periódica de  $f(t) = |t|$

Figura 2.7: Extensión  $2\pi$  periódica de  $f(t) = t^2$ Figura 2.8: Extensión  $2\pi$  periódica de  $f(t) = \sqrt{|t|}$

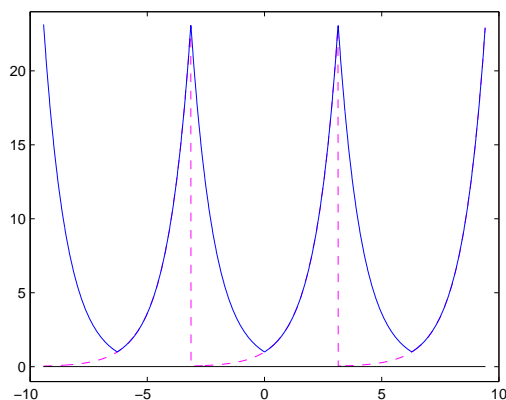


Figura 2.9: Extensión por  $2\pi$  periódica de  $f(t) = e^t$

$[0, \pi]$ . Para situarlos en las condiciones de los teoremas que vamos a establecer, primero se las extiende en forma impar (serie de senos) o en forma par (serie de cosenos) al intervalo  $[-\pi, \pi]$ . La función resultante se extiende de forma  $2\pi$  periódica a  $\mathbb{R}$  y estamos en condiciones de estudiar la convergencia puntual de tales series.

Se recuerda que una función  $f$  es continua a trozos en el intervalo  $[a, b]$  si existen puntos  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  tales que  $f$  es continua en cada intervalo  $(t_{k-1}, t_k)$  existiendo los límites laterales  $f(t_k \pm)$  en cada uno de los puntos  $t_k$ . Esto significa que aunque la función  $f$  no esté siquiera definida en los puntos  $t_k$  la función  $f$  puede extenderse a una función continua en cada intervalo  $[t_{k-1}, t_k]$ . Una función  $f$  es  $C^1$  a trozos en  $[a, b]$  si la derivada  $f'(t)$  es continua a trozos en  $[a, b]$ . Las extensiones  $2\pi$ -periódicas de  $f(t) = t$ ,  $f(t) = t^2$ ,  $f(t) = |t|$  o  $f(t) = e^t$  son  $C^1$  a trozos en cualquier intervalo finito  $[a, b]$ .

**Teorema 2.51.** *Sea  $f(t)$  una función  $2\pi$ -periódica que es  $C^1$  a trozos en  $[-\pi, \pi]$ . Entonces:*

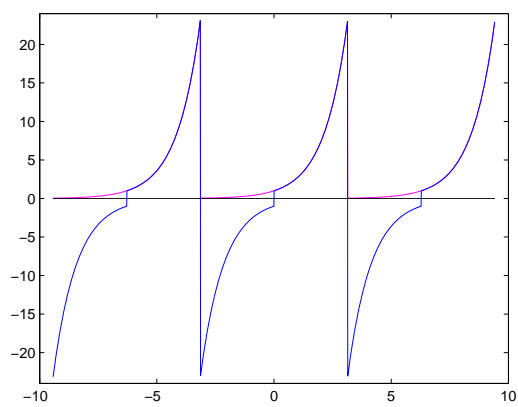
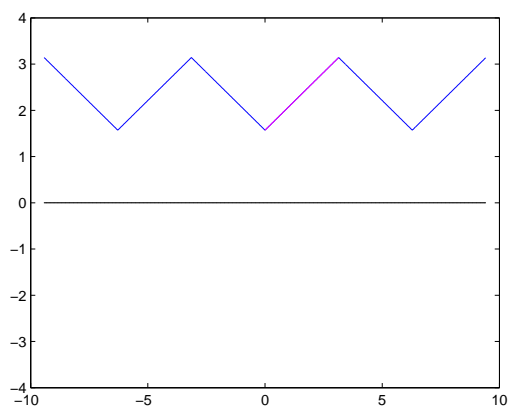
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt,$$

en cada punto  $t \in \mathbb{R}$  donde  $f$  sea continua. En particular, la identidad es cierta  $\forall t \in [-\pi, \pi]$  si  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

*Observación 2.26.* Se sabe que no basta la mera continuidad de  $f$  en  $t = t_0$  para que:

$$f(t_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt_0 + b_n \operatorname{sen} nt_0.$$

El éxito del Teorema 2.51 estriba en que además de continuidad se pide a la

Figura 2.10: Extensión impar  $2\pi$  periódica de  $f(t) = e^t$ Figura 2.11: Extensión par  $2\pi$  periódica de  $f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}$



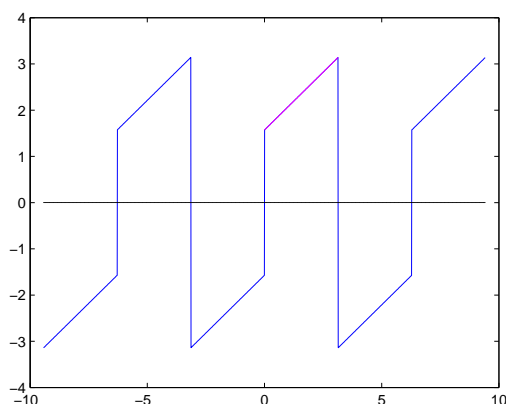


Figura 2.12: Extensión impar  $2\pi$  periódica de  $f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}$

función derivabilidad en un entorno reducido de  $t_0$  donde las derivadas admiten límites laterales en  $t_0$ .

*Ejemplo 2.27.* La serie de Fourier de las funciones  $f(t) = t$ ,  $f(t) = t^2$ ,  $f(t) = |t|$  o  $f(t) = e^t$  converge puntualmente en  $(-\pi, \pi)$ . Como las extensiones  $2\pi$ -periódicas de  $f(t) = t^2$  y  $f(t) = |t|$  son continuas, sus series convergen puntualmente en  $[-\pi, \pi]$ . Para  $f(t) = t$  y  $f(t) = e^t$ , las series de Fourier también convergen en  $t = \pm\pi$  pero no lo hacen a los valores  $f(\pm\pi)$ . A continuación se da una explicación a las últimas afirmaciones.

**Teorema 2.52.** *En las condiciones del teorema anterior:*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde  $f(t+)$ ,  $f(t-)$  son los límites laterales de  $f$  en  $t$  por la derecha y por la izquierda, respectivamente.

*Observación 2.28.* Sólo por resaltar el resultado, se dice en el Teorema 2.52 que si  $f$  es  $C^1$  a trozos, la serie de Fourier converge al “valor medio” de la discontinuidad en los posibles puntos donde  $f$  sea discontinua.

*Ejemplo 2.29.* La serie de Fourier de  $f(t) = t$  suma cero en  $t = \pi$ , valor obviamente distinto de  $f(\pi)$  (Figura 2.17). La de  $f(t) = e^t$  suma  $\cosh \pi$ , valor que tampoco coincide con  $f(\pm\pi)$ .

En la Figura 2.13 hemos trazado (vía MATLAB) las cinco primeras sumas parciales de la serie de Fourier de la función  $\operatorname{signo}(t)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Obsérvese que el comportamiento de la serie en  $t = k\pi$  (Figuras 2.14, 2.15) es el predicho por el Teorema 2.52. En la Figura 2.14 representamos la suma parcial  $s_{17}(t)$ . Tanto aquí como en la Figura 2.17 se observa el llamado “fenómeno de Gibb”, que explicaremos con detalle en las lecciones.

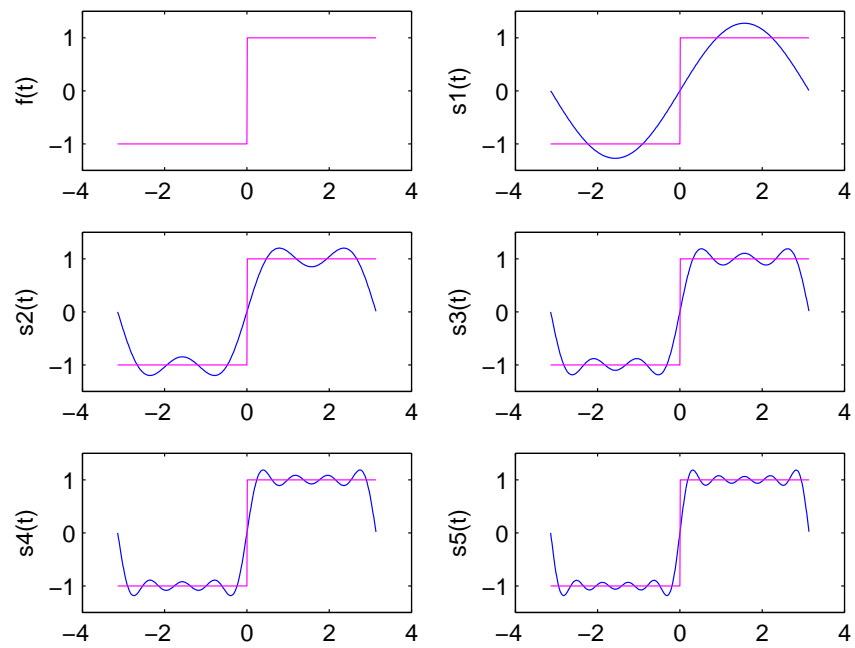


Figura 2.13: La figura muestra las cinco primeras sumas parciales de la serie de Fourier de la función  $\text{signo}(t)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

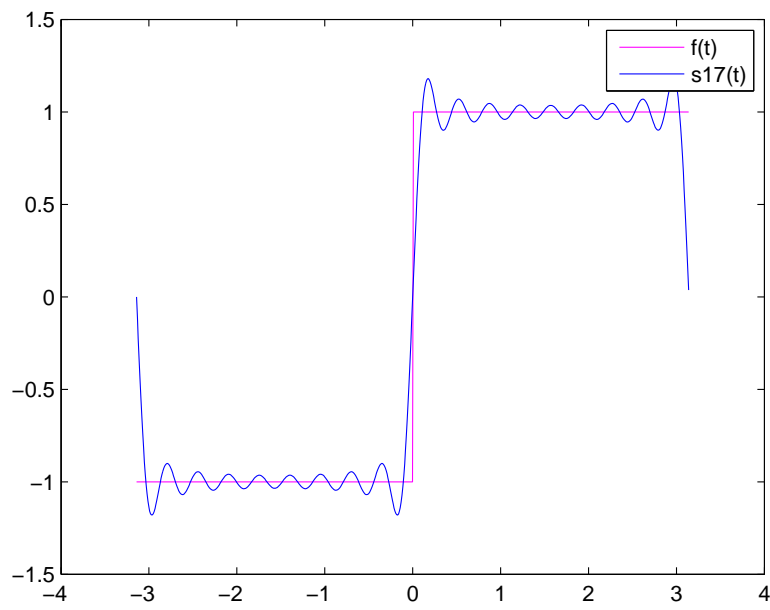


Figura 2.14: Suma parcial  $s_{17}(t)$  de la serie de Fourier de la función  $\text{signo}(t)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

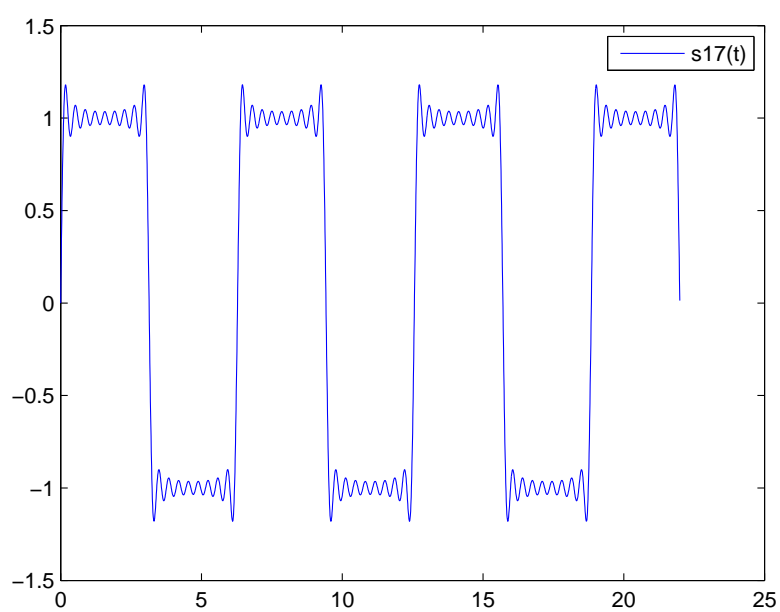


Figura 2.15: Suma parcial  $s_{17}(t)$  de la serie de Fourier de la función  $\text{sign}(t)$  en el intervalo  $[0, 7\pi]$ .

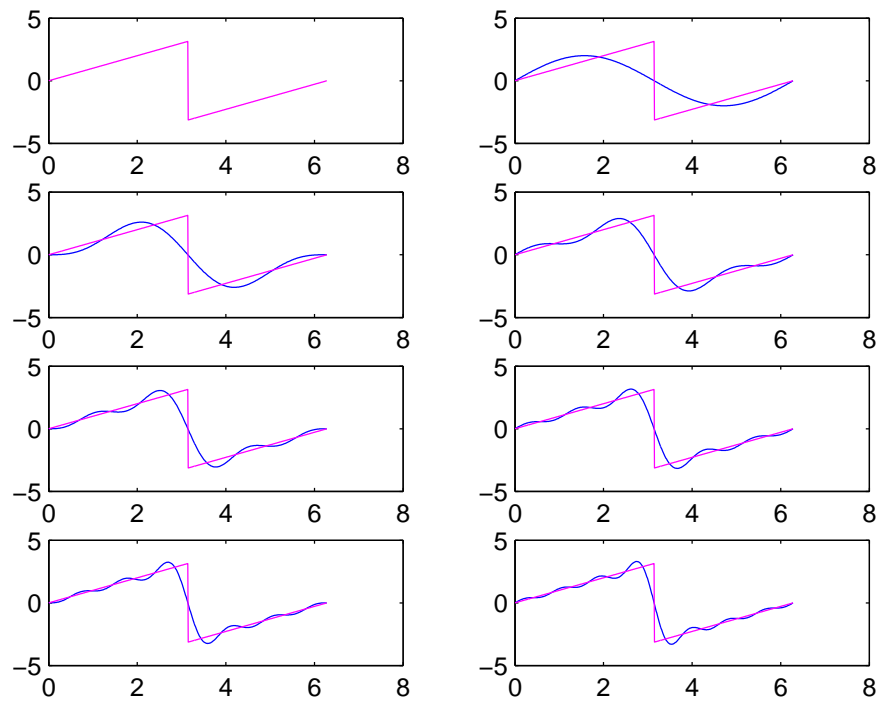


Figura 2.16: Las siete primeras sumas parciales de la serie de Fourier de la función  $f(t) = t$ . Se han dibujado en el intervalo  $[0, 2\pi]$

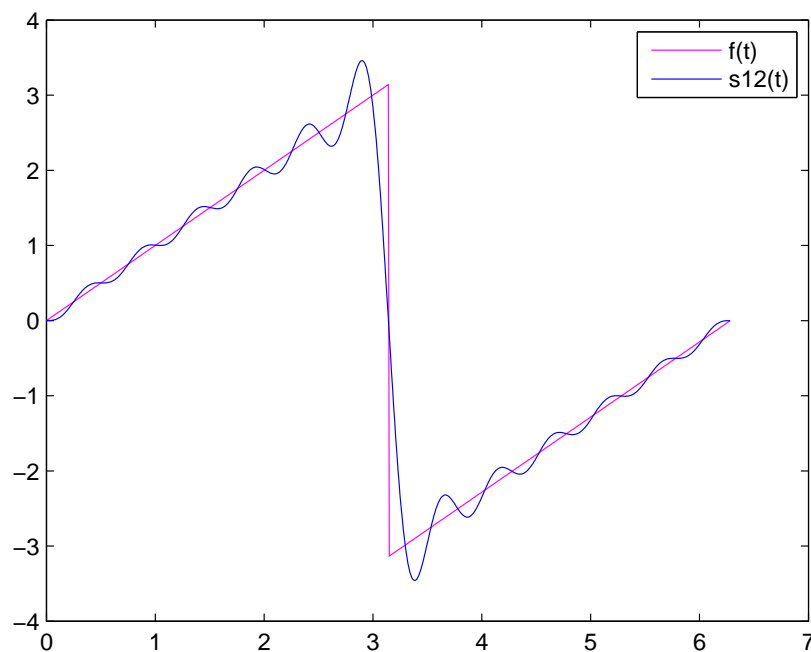


Figura 2.17: La suma parcial  $s_{12}(t)$  de la serie de Fourier de la función  $f(t) = t$ . Se ha dibujado en el intervalo  $[0, 2\pi]$  para resaltar el “salto” en el punto  $t = \pi$ . Se observa la formación incipiente del “fenómeno de Gibb”.

**Convergencia uniforme**

El Teorema 2.40 establece la convergencia uniforme de series de autofunciones en problemas generales. El que sigue es propio de las series trigonométricas.

**Teorema 2.53.** *Sea  $f(t)$  una función continua y  $C^1$  a trozos en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  que cumple:*

$$f(-\pi) = f(\pi).$$

*Entonces la serie de Fourier de  $f$  converge uniformemente a  $f$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ :*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt.$$

*Demostración.* La base de la demostración es que:

$$f(t) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^t f'(s) ds,$$

donde la fórmula es coherente porque  $f'$  sólo deja de estar definida en un número finito de puntos.

Si la serie de Fourier de  $f$  es:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt,$$

la de  $f'$  es:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nt + (-n)a_n \operatorname{sen} nt.$$

Asimismo:

$$\begin{aligned} |S_M(t) - S_N(t)| &\leq \sum_{N+1}^M \frac{|\cos nt|}{n} (na_n) + \frac{|\operatorname{sen} nt|}{n} (nb_n) \\ &\leq \left\{ \sum_{N+1}^M \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{N+1}^M n^2 (a_n^2 + b_n^2) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

La convergencia uniforme sale del hecho de que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)^2 dt = \pi \sum_1^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2).$$

□

Se puede incluso dar una estimación del error cometido cuando la suma parcial  $S_N(t)$  sustituye a la función  $f(t)$ .

**Teorema 2.54.** *En las condiciones del Teorema 2.53 se tiene que:*

$$|f(t) - S_N(t)| \leq \left\{ \frac{\pi^2}{6} - \sum_1^N \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)^2 dt - \sum_1^N n^2 (a_n^2 + b_n^2) \right\}^{1/2}.$$

**2.2.16. Ejercicios**

1. Calcular la serie de Fourier en senos de la función  $f(t) = 1$  en el intervalo  $[0, \pi]$ .

Solución.

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)t.$$

2. Sumar la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Solución.  $\frac{\pi^2}{8}$ .

3. Sumar la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Solución.  $\frac{\pi^2}{6}$ .

4. Calcular:

- a) La serie de Fourier en senos de  $f(t) = t$  en  $[0, \pi]$ .  
 b) La serie de Fourier en cosenos de  $f(t) = t$  en  $[0, \pi]$ .  
 c) La serie de Fourier en senos y cosenos de  $f(t) = t$  en  $[-\pi, \pi]$ .  
 d) Las mismas tres cuestiones para la función  $f(t) = t^2$ .

Solución.

a)  $-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} nt.$

b)  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t.$

- c) La misma que a).

- d) En el mismo orden que en el caso anterior. Desarrollo en senos:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} (-1)^n \right) \operatorname{sen} nt.$$

El desarrollo en cosenos coincide con el desarrollo en senos y cosenos en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ :

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nt.$$



5. Hállese el desarrollo de Fourier en senos de  $f(t) = t(\pi - t)$  en el intervalo  $[0, \pi]$ . ¿Qué se puede decir de la convergencia del desarrollo?

Solución.

$$f(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen}(2n-1)t.$$

En virtud del Teorema 2.40, la convergencia de la serie es uniforme.

6. Hallar la serie de Fourier de  $f(t) = e^t$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . ¿Cuánto vale la suma de la serie de Fourier en  $t = \pi$ ?

Solución.

$$e^t = 2 \frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos nt - n \operatorname{sen} nt) \right\}.$$

La suma de la serie en  $t = \pi$  es  $\cosh \pi$ .

7. Calcular los desarrollos de Fourier en cosenos, y en senos, de  $f(t) = e^t$  en el intervalo  $[0, \pi]$ .

Solución. En senos:

$$e^t = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - (-1)^n e^\pi) \operatorname{sen} nt,$$

en cosenos:

$$e^t = \frac{2}{\pi} \left\{ e^\pi - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} ((-1)^n e^\pi - 1) \cos nt \right\}.$$

8. Hallar la serie de Fourier de  $f(t) = \pi - |t|$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  estudiando sus propiedades de convergencia.

Solución.

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t.$$

La convergencia es uniforme en  $[-\pi, \pi]$ .

9. Hallar la serie de Fourier de  $f(t) = |t|$ .

a) Estimar el error cometido al substituir  $f$  por  $s_3$ .

b) Hallar  $N$  para que el error se menor que 0,1

Solución. La serie de Fourier es:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t.$$

Llamamos  $E_N$  al error asociado a  $S_N(t)$ . Entonces  $E_2, \dots, E_5$ :

$$0,3868 \quad 0,2375 \quad 0,2097 \quad 0,1558$$

mientras  $E_6, \dots, E_{10}$ :

$$0,1434 \quad 0,1158 \quad 0,1088 \quad 0,0922 \quad 0,0877.$$

Vemos pues que con nueve términos  $N = 9$  bajamos de 0,1.

10. Hallar la serie de Fourier de  $f(t) = t^4$ . Determinar el error cometido al substituir  $f$  por  $s_3$ .

**Solución.** La serie de Fourier es:

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} \cos nt.$$

El grupo:

$$s_3(t) = \frac{\pi^4}{5} - 8(\pi^2 - 6) \cos t + \frac{8(\pi^2 2^2 - 6)}{2^4} \cos 2t - \frac{8(\pi^2 3^2 - 6)}{3^4} \cos 3t.$$

El factor:

$$a := \left\{ \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right\}_{|N=3}^{1/2} = 0,5328.$$

El grupo:

$$b := \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)^2 dt - \sum_{n=1}^N n^2 (a_n^2 + b_n^2) \right\}_{|N=3}^{1/2} =$$

$$\left\{ \frac{32\pi^6}{7} - 8^2 \left( (\pi^2 - 6)^2 + \frac{(4\pi^2 - 6)^2}{2^6} + \frac{(9\pi^2 - 6)^2}{3^6} \right) \right\}^{1/2} = 41,3947,$$

el error es:

$$E_3 = ab = 22,0531.$$

## Capítulo 3

# Ecuaciones en Derivadas Parciales

### 3.1. Ecuación de las ondas

Las siguientes materias se impartieron en formato virtual: problema de valor inicial para la ecuación de ondas homogénea y no homogénea; fórmula de D'Alembert; ondas viajeras; método de separación de variables.

#### 3.1.1. Unicidad

La siguiente cuestión quedó pendiente.

**Proposición 3.1.** (*Unicidad de soluciones*) Sea  $u(x, t) \in C^2$  una solución de

$$\begin{cases} \square_c u = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Entonces:

$$u(x, t) = 0.$$

*Demostración.* Fijamos  $P_0 = (x_0, t_0)$  con  $t_0 > 0$ . Por  $P_0$  pasan las rectas:

$$x - x_0 = \pm c(t - t_0)$$

que cortan al eje  $Ox$  en

$$A = (x_0 - ct_0, 0) \quad B = (x_0 + ct_0, 0).$$

Formamos el triángulo  $T = P_0AB$  donde aplicaremos el teorema de la divergencia (o la fórmula de Green).

Partiendo de:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

multiplicamos por  $u_t$ :

$$u_t u_{tt} - c^2 u_t u_{xx} = 0,$$

añadimos  $\pm c^2 u_x u_{xt}$ :

$$u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt} - c^2 (u_t u_{xx} + u_x u_{xt}) = 0,$$

y obtenemos:

$$F_x + G_t = 0,$$

donde

$$F = c^2 u_x u_t, \quad G = - \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{c^2}{2} u_x^2 \right).$$

El campo  $(F, G)$  se anula en el lado  $AB$  de  $T$ . Al aplicar a  $(F, G)$  el teorema de la divergencia (o la fórmula de Green) en  $T$ :

$$\int_{AP_0} (-F + cG) ds + \int_{P_0B} (F + cG) ds = 0,$$

donde las integraciones se efectúan con la orientación señalada en los lados de  $T$ . Este fue el ejercicio que muy amablemente propuso y resolvió el Prof. Antonio Bonilla.

Efectuando las integrales en ese orden y multiplicando por  $2/c$ :

$$\int_{x_0-ct_0}^{x_0} (-2cu_x u_t - u_t^2 - c^2 u_x^2)_{|t=t_0+c^{-1}(x-x_0)} dx +$$

$$\int_{x_0}^{x_0+ct_0} (2cu_x u_t - u_t^2 - c^2 u_x^2)_{|t=t_0-c^{-1}(x-x_0)} dx = 0.$$

Es decir:

$$\int_{x_0-ct_0}^{x_0} (u_t + cu_x)_{|t=t_0+c^{-1}(x-x_0)}^2 dx +$$

$$\int_{x_0}^{x_0+ct_0} (u_t + cu_x)_{|t=t_0-c^{-1}(x-x_0)}^2 dx = 0.$$

De la primera integral sale que:

$$\frac{d}{dt}(u(x_0 + c(t - t_0), t)) = u_t + cu_x = 0 \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Así  $u(x_0 + c(t - t_0), t)$  es constante y:

$$0 = u(x_0 - ct_0, 0) = u(x_0, t_0).$$

Luego  $u$  se anula en  $P_0$  y como  $P_0$  es arbitrario entonces  $u(x, t) = 0$  para todo  $(x, t)$ . Eso es lo que se quería demostrar.  $\square$

### 3.1.2. Problemas de valor inicial y de contorno

El problema de Dirichlet para la ecuación de ondas,

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

puede tratarse con el método de separación de variables.

Como se vio en la clase virtual, consiste en buscar soluciones de la forma:

$$u = X(x)T(t),$$

lo que nos lleva a la ecuación:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T}.$$

Ésta a su vez al problema de contorno,

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases}$$

que proporciona los valores  $\lambda_n = n^2$  a los que corresponden soluciones  $X_n(x) = \alpha_n \operatorname{sen} nx$ . Los mismos valores de  $\lambda = n^2$  permiten determinar las funciones de  $t$ ,  $T_n(t) = \beta_n \cos nct + \gamma_n \operatorname{sen} nct$ . Alternativamente,

$$X_n T_n = (a_n \cos nct + b_n \operatorname{sen} nct) \operatorname{sen} nx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Por este simple procedimiento podemos determinar la solución de la familia finito dimensional de datos iniciales,

$$f = \sum_{n=1}^N \alpha_n \operatorname{sen} nx,$$

$$g = \sum_{n=1}^N \beta_n \operatorname{sen} nx.$$

Tal solución es,

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N \left( \alpha_n \cos nct + \frac{\beta_n}{nc} \operatorname{sen} nct \right) \operatorname{sen} nx.$$

De los resultados del Cap. II sabemos que si  $f \in C^2[0, \pi]$ ,  $g \in C^1[0, \pi]$  cumplen las condiciones de compatibilidad  $f(0) = f''(0) = f(\pi) = f''(\pi) = 0$ ,  $g(0) =$

$g(\pi) = 0$  entonces podemos representarlas,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen} nx \\ g &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen} nx \\ G &= \int_0^x g(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n} \cos nx. \end{aligned}$$

siendo en todos los casos uniforme la convergencia. La serie:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nct + \frac{\beta_n}{nc} \operatorname{sen} nct) \operatorname{sen} nx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nct \operatorname{sen} nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{nc} \operatorname{sen} nct \operatorname{sen} nx := u_1 + u_2 \quad (3.2) \end{aligned}$$

proporciona una expresión para la solución de problema (3.1).

Esto se justifica como sigue:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nct \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen} n(x+ct) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen} n(x-ct) \\ &= \frac{1}{2} \{f(x+ct) - f(x-ct)\}, \end{aligned}$$

luego  $u_1$  es  $C^2$  –aunque no sea posible derivar dos veces la serie término a término– y es la solución de (3.1) correspondiente a  $g = 0$ . Análogamente,

$$\begin{aligned} u_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{nc} \operatorname{sen} nct \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2c} \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{nc} \cos n(x+ct) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{nc} \cos n(x-ct) \right\} \\ &= \frac{1}{2c} \{G(x+ct) - G(x-ct)\}. \end{aligned}$$

De nuevo,  $u_2$  es  $C^2$  y define la solución de (3.1) con  $f = 0$ , aunque –como antes– no estemos autorizados a derivar dos veces la serie. Por tanto, (3.2) representa la solución a pesar de que las manipulaciones de diferenciabilidad término a término de la serie no sean posibles.

En caso del problema de Neumann,

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < \pi \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & t > 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

con datos  $f \in C^2[0, \pi]$ ,  $g \in C^1[0, \pi]$  cumpliendo las correspondientes condiciones de compatibilidad:

$$f' = g' = 0 \quad x = 0, \pi,$$

se tienen las representaciones (uniformemente convergentes):

$$\begin{aligned} f &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx \\ g &= \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos nx \\ G &= \int_0^x g(s) ds = \beta_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n} \operatorname{sen} nx. \end{aligned}$$

Aplicando el método de separación de variables como en la primera parte, llegamos a la siguiente expresión formal de la solución,

$$u = a_0 + b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nct + b_n \operatorname{sen} nct) \cos nx.$$

A la vista de los datos los coeficientes son:

$$u = \alpha_0 + \beta_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n \cos nct + \frac{\beta_n}{nc} \operatorname{sen} nct \right) \cos nx.$$

En efecto, es otra vez fácil probar que:

$$u = \frac{1}{2} \{f(x+ct) + f(x-ct)\} + \frac{1}{2c} \{G(x+ct) + G(x-ct)\},$$

que es la fórmula de D'Alembert.

## 3.2. Ecuación del calor unidimensional

La temperatura  $u(x, t)$  de un medio unidimensional en el punto  $x$  e instante  $t$  puede describirse en condiciones adecuadas mediante (ecuación del calor o de la difusión):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde  $D > 0$  es el coeficiente de difusividad térmica. Mediante cambio de escala se puede suponer que  $D = 1$ . Escribimos la ecuación en forma abreviada:

$$u_t = u_{xx}. \quad (3.4)$$

**Definición 3.2.** *El problema de valor inicial o de Cauchy para la ecuación del calor consiste en hallar  $u(x, t) \in C^2[\mathbb{R} \times (0, \infty)]$  tal que:*

$$\lim_{(y,t) \rightarrow (x,0)} u(y, t) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde  $f$ , el dato inicial, es una función dada de antemano. Abreviadamente:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (3.5)$$

Una solución de (3.5) cumpliendo  $u(x, t) \in C^2[\mathbb{R} \times (0, \infty)] \cap C[\mathbb{R} \times [0, \infty)]$  se dice que es una solución clásica. En ese caso,  $f$  tiene que ser continua en  $\mathbb{R}$ .

*Observación 3.1.* Nótese que no se pide –ni es conveniente– que la ecuación se cumpla en  $t = 0$ .

### 3.2.1. Problema de valor inicial

Se trata de proporcionar una solución al problema (3.5). Antes unas observaciones elementales.

**Proposición 3.3.** *Supóngase que  $u(x, t)$  resuelve:*

$$u_t = u_{xx},$$

en  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ . Entonces,  $\forall y \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}$

$$v(x, t) = u(\pm x - y, t - \tau),$$

resuelve la ecuación en  $x \in \mathbb{R}, t > \tau$ .

Análogamente,  $\forall \lambda > 0$

$$u_\lambda(x, t) = u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)$$

también es solución de la ecuación del calor para todo  $\lambda > 0$ .



*Ejemplo 3.2.* La función:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

es solución de la ecuación del calor en  $t > 0$ . Para  $\tau, y \in \mathbb{R}$

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}},$$

también es solución en  $t > \tau$ .

**Definición 3.4.** La función

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

se conoce como la solución fundamental de la ecuación del calor.

*Observación 3.3.*

a) Como se verá la solución fundamental sirve para generar todas (dentro de un orden) las soluciones de la ecuación del calor.

Un aspecto que no se ha comentado es el carácter altamente irreversible de la ecuación del calor. Obsérvese que

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & t = 0, \end{cases}$$

cuando  $t \rightarrow 0+$ . De alguna manera,  $u(x, t)$  representa la “dispersión” de una cantidad unidad de energía liberada en  $x = 0$  para  $t = 0$  (una “detonación”). Así, mientras la solución tiene un comportamiento suave cuando  $t$  crece, el comportamiento “retrógrado” cuando  $t \rightarrow 0+$  es pésimo: se trata de una función que vale 0 si  $x \neq 0$ ,  $\infty$  si  $x = 0$ .

En la Figura 3.1 se representan los perfiles de la solución fundamental para:

$$t = 0,0001, \quad t = 0,001, \quad t = 0,01 \quad \& \quad t = 0,1.$$

La siguiente propiedad trata con funciones de la forma:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t, y) dy, \quad (3.6)$$

y se desea saber bajo qué condiciones es  $u(x, t)$  de clase  $C^k$  y las derivadas responden a la fórmula:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{\alpha+\beta} K}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(x, t, y) dy. \quad (3.7)$$

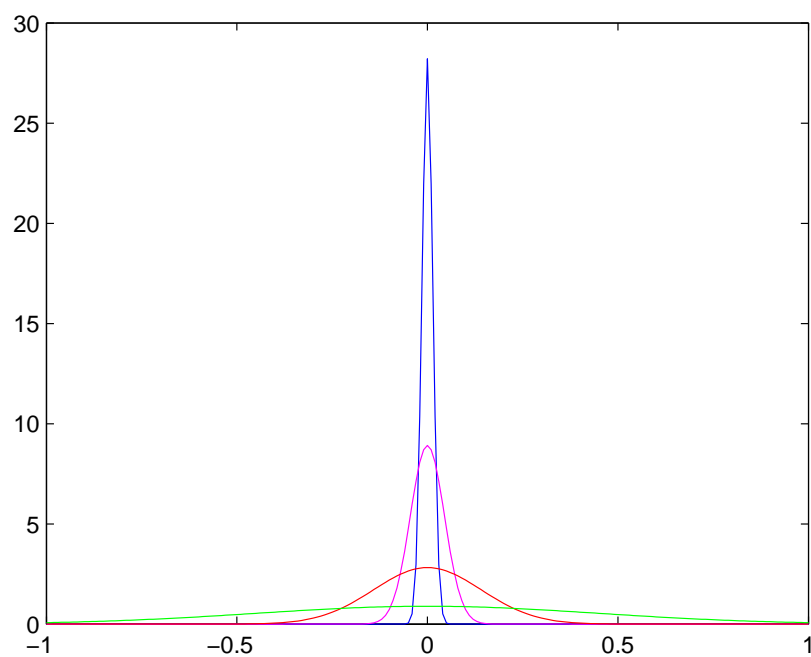


Figura 3.1: Perfiles de la solución fundamental para  $t = 0,0001$ ,  $t = 0,001$ ,  $t = 0,01$  y  $t = 0,1$ .

**Proposición 3.5.** Sea  $K(x, t, y)$  definida en  $x, s \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  una función que cumple las propiedades siguientes:

- i) Para cada  $(x, t)$  la función  $K(x, t, y)$  es absolutamente Riemann-integrable en  $\mathbb{R}$  con respecto a  $y$ .
- ii) La función  $K(x, t, y)$  es de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  con respecto a  $(x, t)$  para todo  $y \in \mathbb{R} \setminus F$  donde  $F$  es un conjunto finito de valores de  $y$ . Además, las funciones  $K_x(x, t, y)$ ,  $K_t(x, t, y)$  son absolutamente Riemann-integrables en  $\mathbb{R}$  con respecto a  $y$ .
- iii) Cada  $(x_0, t_0)$  admite un entorno  $U$  y funciones absolutamente Riemann-integrables en  $\mathbb{R}$  con respecto a  $s$ ,  $f_i(s)$ ,  $i = 1, 2, 3$  tales que:

$$|K(x, t, s)| \leq f_1(s), \quad |K_x(x, t, s)| \leq f_2(s), \quad |K_t(x, t, s)| \leq f_3(s),$$

para todo  $(x, t) \in U$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

Entonces  $u(x, t)$  definida por (3.6) es de clase  $C^1$  y sus derivadas se expresan en la forma (3.7).

**Teorema 3.6.** Sea  $f(x)$  una función acotada que es absolutamente Riemann-integrable en  $\mathbb{R}$ . Representamos por

$$u(x, t) = \mathcal{K}(f)(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy. \quad (3.8)$$

Se cumplen las siguientes propiedades

- a)  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  es una solución de la ecuación del calor que cumple:

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0)} u(x, t) = f(x_0),$$

en todos aquellos puntos  $x_0$  donde  $f$  es continua. Si  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ ,  $u(x, t)$  define una solución clásica de (3.5).

- b) Para  $f(x) = 1$  se tiene:

$$\mathcal{K}(f)(x, t) = 1.$$

- c) (Conservación de la energía)

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \quad t > 0.$$

- d) (Comparación con el dato inicial)

$$\inf f \leq u(x, t) \leq \sup f \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

- e) (Positividad)

$$f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \geq 0.$$

- f) (Unicidad). Para  $f \in C(\mathbb{R})$  acotada,  $u$  es la única solución clásica acotada en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  del problema (3.5).

g) (Regularidad hasta  $t = 0$ ) En las condiciones precedentes, si  $f \in C^k(\mathbb{R})$  entonces  $u$  admite derivadas parciales:

$$u_j(x, t) = \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \quad j = 1, \dots, k,$$

y cada  $u_j$  resuelve el problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f^{(j)}(x). \end{cases}$$

*Observación 3.4.* Debe advertirse que con  $f \in C(\mathbb{R})$  en las condiciones del teorema previo, el problema (3.5) no tiene la propiedad de unicidad de soluciones. Como se afirma en e), la unicidad es cierta si nos restringimos a la clase de las soluciones que son acotadas.

*Observación 3.5.* La expresión (3.8) se llama la fórmula de Poisson.

A efectos de los ejercicios se define la función “error”:

$$\text{Erf}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{-z^2} dz.$$

Se introduce asimismo la función de Heaviside (función escalón):

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

### 3.2.2. Ejercicios

1. Hallar qué ecuación diferencial ordinaria cumplen las soluciones de la ecuación del calor de la forma:

$$u(x, t) = \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

**Solución.** Llamando  $\zeta = \frac{x}{\sqrt{t}}$ ,

$$\phi'' + \frac{\zeta}{2}\phi' = 0.$$

2. Se considera el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \theta(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.9)$$

¿Qué condiciones debe cumplir  $\phi(\zeta)$  para que

$$u(x, t) = \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

sea solución de dicho problema.

**Solución.** Se tiene

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \phi(\zeta) = 0 \quad \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \phi(\zeta) = 1.$$

3. Resuélvase (3.9) en base a los ejercicios anteriores.

**Solución.** Se tiene:

$$u(x, t) = \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

donde:

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Erf}\left(\frac{\zeta}{2}\right).$$

4. Pruébese directamente que si  $u(x, t)$  resuelve (3.9) entonces  $\forall \lambda > 0$ :

$$u_\lambda(x, t) = u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t),$$

también es solución.

5. Resuélvase ahora (3.9) usando la fórmula de Poisson (3.8).

6. Hallar una solución de los problemas de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

en los siguientes casos.

- a)  $f(x) = \theta(-x)$ .
- b)  $f(x) = \theta(x - a)$ .
- c)  $f(x) = \theta(b - x)$ .
- d)  $f(x) = \chi_I(x)$  donde si  $I = [a, b]$ ,

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & x \in I \\ 0 & x \notin I. \end{cases}$$

7. Resolver, mediante (3.8) el problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{x^2}. \end{cases}$$

**Solución.**

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}} e^{\frac{x^2}{1-4t}}.$$

8. Resolver, mediante (3.8) el problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{ax^2}, \end{cases}$$

donde  $a > 0$ .

**Solución.**

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-4at}} e^{\frac{ax^2}{1-4at}}.$$

9. Hállese una solución del problema de Cauchy (3.5) para la ecuación del calor unidimensional con dato inicial  $u(x, 0) = x^2$ . Una guía para hacerlo es la que sigue. Pruébese que si  $u(x, t)$  es una hipotética solución entonces  $u_{xxx}(x, t)$  también satisface la ecuación del calor con dato  $f(x) \equiv 0$ . Conclúyase de aquí (¡ilegalmente!) que  $u_{xxx}(x, t) \equiv 0$ . Usando esta información calcular una solución.

10. La misma cuestión que en el problema anterior con el dato  $f(x) = e^{-x}$ .

### 3.2.3. Problema de valor inicial y de contorno

Estudiamos el problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \pi \\ \mathcal{B}_0 u = 0, \mathcal{B}_\pi u = 0 & t > 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

donde las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet:

$$\mathcal{B}_0 u = u(0, t) \quad \mathcal{B}_\pi u = u(\pi, t),$$

o Neumann:

$$\mathcal{B}_0 u = u_x(0, t) \quad \mathcal{B}_\pi u = u_x(\pi, t).$$

**Teorema 3.7.** *El problema (3.10) admite a lo más una solución  $u(x, t) \in C^2[0, \pi] \times [0, \infty)$ .*

*Observaciones 3.6.* Pueden probarse resultados mejores. Si  $f \in C[0, \pi]$ ,  $f(0) = f(\pi) = 0$  entonces el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0 & t > 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

admite una única solución en  $C^2((0, \pi) \times (0, \infty)) \cap C([0, \pi] \times [0, \infty))$ .

Análogamente, el problema de Neumann:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \pi \\ u_x(0, t) = 0, u_x(\pi, t) = 0 & t > 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

admite una única solución en  $C^2[(0, \pi) \times (0, \infty)] \cap C^1[[0, \pi] \times [0, \infty)]$  si  $f \in C^1[0, \pi]$  y

$$f'(0) = f'(\pi).$$

### 3.2.4. Solución del problema de Dirichlet por separación de variables

Supongamos que  $f \in C[0, \pi]$  es  $C^1$  a trozos y cumple:

$$f(0) = f(\pi) = 0.$$

Se sabe entonces (Capítulo II) que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \quad (3.13)$$

siendo la serie uniformemente convergente en  $[0, \pi]$ . Usando el método de separación de variables (véase la ecuación de ondas) se encuentra que la serie:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} b_n \operatorname{sen} nx, \quad (3.14)$$

satisface la ecuación del calor para  $t > 0$ , siendo de clase  $C^\infty$  en esa región. Cumple además las condiciones de contorno.

Puede probarse además que:

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0)} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx_0 = f(x_0) \quad (3.15)$$

$\forall x_0 \in [0, \pi]$ . Por tanto (3.14) es la solución clásica del problema de Dirichlet.

*Observación 3.7.* La serie (3.13) tiene sentido con tal que  $f(x)$  sea integrable Riemann y acotada. Converge a  $f$  en media cuadrática. Con esa sola hipótesis se comprueba que la serie (3.14) es  $C^\infty$  en  $t > 0$  y cumple las condiciones de contorno, también en  $t > 0$ . Además, si  $x_0 \in (0, \pi)$  es un punto de continuidad de  $f$  entonces la función  $u(x, t)$  ajusta con el dato inicial en  $x_0$  es decir, se cumple (3.15). Los detalles no son sencillos.

En particular, con la sola hipótesis  $f \in C[0, \pi]$ ,  $f(0) = f(\pi)$  el problema de valor inicial admite una solución  $u \in C^\infty\{t > 0\}$  que cumple  $u \in C[0, \pi] \times [0, \infty)$ .

### 3.2.5. Solución del problema de Neumann por separación de variables

Ahora partimos de  $f \in C^1[0, \pi]$  cumpliendo:

$$f'(0) = f'(\pi) = 0.$$

Añadimos la condición de que la propia  $f'$  sea  $C^1$  a trozos. Se sabe entonces (Capítulo II) que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

siendo la serie uniformemente convergente en  $[0, \pi]$ . La misma propiedad se cumple para la derivada teniéndose que:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \operatorname{sen} nx.$$

Usando de nuevo el método de separación de variables se encuentra que la serie:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} a_n \cos nx, \quad (3.16)$$

satisface la ecuación del calor para  $t > 0$ , siendo de clase  $C^\infty$  en esa región. Cumple además las condiciones de contorno.

Puede probarse además que:

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx_0 = f(x_0)$$

$\forall x_0 \in [0, \pi]$ . Por tanto (3.16) es la solución clásica del problema de Neumann.

*Observación 3.8.* Como en el caso Neumann, con menos condiciones de regularidad se pueden conseguir soluciones. No insistimos en los detalles.

### 3.2.6. Ejercicios

1. Resolver el problema de Neumann:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \pi \\ u_x(0, t) = 0, u_x(\pi, t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

para las siguientes elecciones de datos iniciales:

- a)  $f(x) = x$ .
- b)  $f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ .



- c)  $f(x) = x^2$ .
- d)  $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos x$ .

2. Resolver el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

para las siguientes elecciones de datos iniciales:

- a)  $f(x) = x$ .
- b)  $f(x) = \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x$ .
- c)  $f(x) = x^2$ .
- d)  $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ .



# Bibliografía

- [1] BREZIS, H., *Análisis Funcional*. Alianza, Madrid, 1983.
- [2] CHOW S. N., HALE J. K., *Methods in local bifurcation theory*. Springer, Berlín, 1982.
- [3] COPPEL, W. A., *Stability and asymptotic behavior of differential equations*. D. C. Heath and Company, Boston, 1965.
- [4] DE GUZMÁN, M., *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Teoría de la Estabilidad y Control*. Alhambra, Madrid, 1975.
- [5] DE GUZMÁN, M. (EDITOR), *Matemáticas en un Mundo Moderno*. Ed. Blume, Barcelona, 1970.
- [6] HARTMAN, PH., *Ordinary Differential Equations*. J. Wiley, New York, 1964.
- [7] KLINE M., *Pensamientos matemáticos desde la antigüedad hasta nuestros días* (3 Vols.). Alianza Universidad, Madrid, 1990.
- [8] ORTEGA R., UREÑA A., *Introducción a la Mecánica Celeste*. Ediciones de la Universidad de Granada, Granada, 2010.
- [9] PUIG ADAM, P., *Ecuaciones diferenciales*. Madrid, 1977.
- [10] ROUCHÉ N., MAWHIN J., *Équations Différentielles Ordinaires. Vol. I, Théorie Générale*. Masson et Cie, París, 1973.
- [11] HIRSCH M., SMALE S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974. Versión castellana en Alianza Universidad.
- [12] SOTOMAYOR J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides # 11. IMPA, Río de Janeiro, 1979.
- [13] SPIVAK, M., *Calculus*. Reverté, Barcelona.
- [14] WALTER, W., *Ordinary Differential Equations*. Springer, Berlín-NY, 199\*.